भौतिकी

कक्षा XI के लिए पाठ्यपुस्तक

भाग I

लेखक

अरविंद कुमार | ए.एस. निगवेकर
बी.के. शर्मा | डी.पी. तिवारी
पी.सी. जैन | राजाराम नित्यानंद
वी.पी. श्रीवास्तव | विजय ए. सिंह
सुरेश चंद्र

संपादक

अरविंद कुमार | बी.के. शर्मा
पी.सी. जैन | सुरेश चंद्र



राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

प्रथम संस्करण
सितंबर 2002
भाद्रपद 1924
PD 5T NSY

ISBN 81-7450-085-5

एन.सी.ई.आर.टी. के प्रकाशन विभाग के कार्यालय

एन.सी.ई.आर.टी. कैम्पस	108, 100 फीट रोड, होस्डेकेरे	नवजीवन ट्रस्ट भवन	सी.डब्लू.सी. कैम्पस
श्री अरविंद मार्ग	हेली एक्सटेंशन बनाशंकरी III इस्टेज	डाकघर नवजीवन	32, बी.टी. रोड, सुखचर
नई दिल्ली 110 016	**बैंगलूर 560 085**	**अहमदाबाद 380 014**	**24 परगना 743 179**

प्रकाशन सहयोग

संपादन : नरेश यादव
उत्पादन : प्रमोद रावत
: राजेंद्र चौहान
सज्जा : विजय व्यास

रु 60.00

एन.सी.ई.आर.टी. वाटर मार्क 80 जी.एस.एम. पेपर पर मुद्रित

प्रकाशन विभाग में सचिव, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, श्री अरविन्द मार्ग, नई दिल्ली 110016 द्वारा प्रकाशित तथा टैन प्रिंट्स (इंडिया) प्रा. लि., राष्ट्रीय राजमार्ग, गांव रोहद, जिला झज्जर (हरियाणा) द्वारा टाइप सैट होकर कौशिक ऑफसेट प्रिंटर्स (प्रा.) लि., सी-34, सैक्टर 58, नोएडा 201301 द्वारा मुद्रित।

प्रस्तावना

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् पिछले चार दशकों से विज्ञान और गणित की शिक्षा में गुणात्मक सुधार के लिए कार्य कर रही है। इसके लिए परिषद् ने पाठ्यक्रम तथा पाठ्यचर्या विकसित करने का उत्तरदायित्व लिया है। इस समय तक परिषद् विभिन्न अभिगमों के साथ कई बार पाठ्यसामग्री तथा संबंधित अन्य शैक्षणिक सामग्री विकसित करने का कार्य पूरा कर चुकी है। इन सामग्रियों को विभिन्न राज्य/केंद्र शासित प्रदेश अपनाते/रूपांतरित कर लेते हैं। हर बार परिषद् की मुख्य सोच यही रही है कि राष्ट्रीय शिक्षा नीति का समुचित अनुपालन करते हुए कार्य किया जाए तथा विद्यालय स्तर पर पाठ्यचर्या नवीकरण प्रक्रिया के दौरान विभिन्न सामाजिक तथा शैक्षणिक मुद्दों पर विचार किया जाए। परिषद् द्वारा प्रकाशित *विद्यालयी शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा-2000* इन्हीं प्रयासों के अनुरूप है। इसमें विज्ञान और गणित शिक्षा तथा उच्चतर माध्यमिक स्तर पर चयनित विषय के रूप में भौतिकी विषय के शिक्षण की गुणवत्ता में सुधार लाने के लिए पुनरावृत्ति की गई है। इस राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा ने पाठ्य-सामग्री तथा अन्य संबंधित शैक्षणिक सामग्री के सत्रवार विकास की अनुशंसा भी की है। कक्षा XI के लिए भौतिकी की इस पाठ्यपुस्तक में सत्र I और II को सम्मिलित किया गया है।

इस पुस्तक की प्रथम पाण्डुलिपि एक लेखक मंडल द्वारा परिषद् तथा भारत के विभिन्न सुविख्यात शैक्षणिक तथा अनुसंधानिक संगठनों के विशेषज्ञों (जिनके नाम का उल्लेख अन्यत्र है) को सम्मिलित करके विकसित की गई। इस पाठ्यपुस्तक के विकास के समय लेखक मंडल ने भौतिकी के प्रचलित पाठ्यक्रम तथा पाठ्यपुस्तक के विषय में प्राप्त पुनर्निवेशन पर विचार किया। प्रस्तुत पुस्तक को विद्यार्थियों के लिए और अधिक प्रासंगिक तथा अर्थपूर्ण बनाने के लिए लेखक मंडल ने पिछले दशक में शैक्षणिक तथा विषयवस्तु में हुए समकालीन परिवर्तनों पर विचार किया। पाण्डुलिपि के प्रारूप की समीक्षा विषय के अनुभवी शिक्षकों तथा विषय विशेषज्ञों के एक समूह (जिनके नाम का उल्लेख अन्यत्र है) द्वारा एक समीक्षा कार्यशाला में की गई। इस समीक्षा कार्यशाला में प्राप्त हुए सुझावों पर लेखकों ने विचार करके पाण्डुलिपि के प्रारूप में उचित परिमार्जन किया। प्रकाशन से पूर्व विशेषज्ञों के एक समूह द्वारा पाण्डुलिपि का अंतिम संपादन किया गया।

मैं लेखक मंडल के अध्यक्ष एवं सदस्यों को उनके राष्ट्रीय स्तर पर शैक्षणिक योगदान के लिए धन्यवाद देता हूं। मैं समीक्षा कार्यशाला के प्रतिभागी शिक्षकों तथा विषय विशेषज्ञों का उनके द्वारा की गई समीक्षा और सुझावों के लिए भी आभारी हूं जिसने प्रस्तुत पुस्तक के परिमार्जन में सहायता की है।

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् इस पुस्तक में सुधार के लिए प्रयोक्ताओं द्वारा दिए गए सुझावों का स्वागत करेगी।

जगमोहन सिंह राजपूत
निदेशक
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान
और प्रशिक्षण परिषद्

नई दिल्ली
जून, 2002

भारत का संविधान

भाग 4अ

नागरिकों के मूल कर्त्तव्य

अनुच्छेद 51अ

मूल कर्त्तव्य–भारत के प्रत्येक नागरिक का यह कर्त्तव्य होगा कि वह–

(क) संविधान का पालन करे और उसके आदर्शों, संस्थाओं, राष्ट्रध्वज और राष्ट्रगान का आदर करे,

(ख) स्वतंत्रता के लिए हमारे राष्ट्रीय आंदोलन को प्रेरित करने वाले उच्च आदर्शों को हृदय में संजोए रखे और उनका पालन करे,

(ग) भारत की संप्रभुता, एकता और अखंडता की रक्षा करे और उसे अक्षुण्ण बनाए रखे,

(घ) देश की रक्षा करे और आह्वान किए जाने पर राष्ट्र की सेवा करे,

(ङ) भारत के सभी लोगों में समरसता और समान भ्रातृत्व की भावना का निर्माण करे जो धर्म, भाषा और प्रदेश या वर्ग पर आधारित सभी भेदभावों से परे हो, ऐसी प्रथाओं का त्याग करे जो महिलाओं के सम्मान के विरुद्ध हो,

(च) हमारी सामासिक संस्कृति की गौरवशाली परंपरा का महत्त्व समझे और उसका परिरक्षण करे,

(छ) प्राकृतिक पर्यावरण की, जिसके अंतर्गत वन, झील, नदी और वन्य जीव हैं, रक्षा करे और उसका संवर्धन करे तथा प्राणिमात्र के प्रति दयाभाव रखे,

(ज) वैज्ञानिक दृष्टिकोण, मानववाद और ज्ञानार्जन तथा सुधार की भावना का विकास करे,

(झ) सार्वजनिक संपत्ति को सुरक्षित रखे और हिंसा से दूर रहे, और

(ञ) व्यक्तिगत और सामूहिक गतिविधियों के सभी क्षेत्रों में उत्कर्ष की ओर बढ़ने का सतत प्रयास करे, जिससे राष्ट्र निरंतर बढ़ते हुए प्रयत्न और उपलब्धि की नई ऊंचाइयों को छू सके ।

आमुख

एक दशक से भी अधिक समय पूर्व, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् ने प्रो. टी.वी. रामकृष्णन, एफ.आर.एस., की अध्यक्षता में लेखकों के एक दल की सहायता से कक्षा XI तथा XII के लिए लिखी गई पाठ्यपुस्तकें प्रकाशित की थीं। इन पुस्तकों को विद्यार्थियों तथा शिक्षकों ने समान रूप से भलीभांति अपनाया। वास्तव में ये पुस्तकें मील का पत्थर तथा विचारधारा निर्धारित करने वाली सिद्ध हुईं। तथापि, पाठ्यपुस्तकों और विशेषकर विज्ञान की पुस्तकों का विकास परिवर्तनशील बोध, आवश्यकता, पुनर्निवेशन तथा विद्यार्थियों, शिक्षाविदों तथा समाज के अनुभवों की दृष्टि से एक गत्यात्मक प्रक्रिया है। इसी बीच राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् ने *विद्यालयी शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा*-2000 प्रकाशित की तथा विद्यालयी स्तर पर पाठ्यचर्या नवीकरण प्रक्रिया के दौरान पाठ्यक्रम में तदनुसार संशोधन किया गया। *उच्चतर माध्यमिक स्तर के लिए पाठ्यक्रम* (एन.सी.ई.आर.टी., 2001) विकसित किया गया है। कक्षा XI के भौतिकी के पाठ्यक्रम में सत्र I तथा II प्रत्येक में पांच-पांच इकाइयां हैं। प्रस्तुत पुस्तक लेखकों के वर्तमान दल के सतत् प्रयास का परिणाम है और साथ ही यह आशा है कि यह विद्यार्थियों तथा शिक्षकों को भौतिकी विषय के अध्ययन के लिए प्रेरित एवं प्रोत्साहित करने में सहायक होगी।

विज्ञान और प्रौद्योगिकी की लगभग सभी शाखाओं के ज्ञान का आधारभूत भौतिकी है। हम इस तथ्य से अभिज्ञ हैं कि भौतिकी के कुछ सरल आधारिक सिद्धांत प्राय: प्रत्यात्मक रूप में जटिल होते हैं। इस पुस्तक में हमनें 'प्रत्यात्मक सामंजस्य' लाने का प्रयास किया है। शैक्षणिक तथा विषय की परिशुद्धता को बनाए रखकर सरल एवं सुबोध भाषा का प्रयोग करना हमारे प्रयास का केंद्र बिंदु है। भौतिकी विषय की प्रकृति ही ऐसी है जिसके लिए कुछ न्यूनतम गणित का उपयोग करना आवश्यक हो जाता है। जहां तक संभव हो सका है हमने गणितीय सूत्रों को तार्किक ढंग से विकसित करने का प्रयास किया है।

इस पुस्तक में कुछ नई विशिष्टताएं जोड़ी गई हैं। हमें पूर्ण आशा एवं विश्वास है कि ये विद्यार्थियों के लिए पुस्तक की उपयोगिता में वृद्धि करेंगी। अध्याय की विषय-वस्तु पर तेजी से सरसरी दृष्टि डालने के लिए प्रत्येक अध्याय के अंत में "सारांश" दिया गया है। इसके पश्चात् "विचारणीय विषय" दिए गए हैं जो विद्यार्थियों के मस्तिष्क में उत्पन्न होने वाली संभावित भ्रांतियों, अध्याय में दिए कुछ प्रकथनों/सिद्धांतों में छिपी उलझनों तथा अध्याय से उपलब्ध ज्ञान के उपयोग के लिए आवश्यक "चेतावनियों" की ओर इंगित करते हैं। इन 'बिंदुओं' पर सोचना तथा अपने मस्तिष्क का अनुप्रयोग करना विद्यार्थियों को रोचक लगेगा। इसके अतिरिक्त संकल्पनाओं के स्पष्टीकरण तथा/अथवा दैनिक जीवन की परिस्थितियों में इन संकल्पनाओं के अनुप्रयोगों की व्याख्या के लिए बड़ी संख्या में पाठ्य सामग्री में "हल सहित अभ्यासों" का समावेश किया गया है। यदा-कदा भौतिकी विषय के क्रमिक विकास के प्रति जिज्ञासा को शांत करने के लिए ऐतिहासिक परिप्रेक्ष्यों को भी सम्मिलित किया गया है। बहुत से अध्यायों में या तो इसी उद्देश्य के लिए अथवा उन विषयवस्तुओं जिनमें विद्यार्थियों को अतिरिक्त ध्यान देने की आवश्यकता होती है, उनकी कुछ विशेष विशिष्टताओं की ओर आकर्षित करने के उद्देश्य से विषयवस्तु को "बॉक्स" में दिया गया है।

सुस्पष्ट चित्र प्रदान करने की ओर विशेष ध्यान दिया गया है। चित्रों की स्पष्टता में वृद्धि के लिए उन्हें 'दो रंगों' में रेखांकित किया गया है। प्रत्येक अध्याय के अंत में पर्याप्त संख्या में अभ्यास दिए गए हैं। इनमें से कुछ जीवन की वास्तविक परिस्थितियों से संबंधित हैं। कुछ अभ्यासों को हल करने के लिए संकेत

एवं उत्तर दिए गए हैं। विद्यार्थियों से अनुरोध है कि वे इन्हें हल करें और ऐसा करते समय वे इन अभ्यासों को अत्यधिक शिक्षाप्रद पाएंगे। संपूर्ण पुस्तक में SI मात्रकों का उपयोग किया गया है। निर्धारित पाठ्यक्रम/पाठ्यचर्या के भाग के रूप में और साथ ही भौतिकी के लक्ष्य में सहायक के रूप में अध्याय 2 में "मात्रक और मापन" का विस्तृत विवरण दिया गया है।

इस पुस्तक को पूर्ण कर पाना बहुत से व्यक्तियों की सहज स्वाभाविक एवं सतत् सहायता के कारण ही संभव हो सका है। विज्ञान शिक्षा में सुधार के लिए राष्ट्रीय प्रयासों के एक भाग के रूप में इस पाठ्यपुस्तक के निर्माण का कार्य सौंपने के लिए हम प्रो. जगमोहन सिंह राजपूत, निदेशक, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् के प्रति अपना आभार प्रकट करते हैं। परिषद् के विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग के अध्यक्ष प्रो. राम दुलार शुक्ल इस उद्यम में सदैव ही हर संभव ढंग से हमारी सहायता के लिए तत्पर रहे। परिषद् के प्रो. बी.के. शर्मा ने इस पुस्तक के लेखक के रूप में कार्य करने के अतिरिक्त, योग्यतापूर्वक लेखक मंडल के समस्त कार्य तथा क्रियाकलापों का समन्वयन तथा उसी प्रकार अंतिम पाण्डुलिपि के प्रकाशन से संबद्ध समग्र पर्यवेक्षक का कार्य संपन्न किया। परिषद् के ही डा. वी.पी. श्रीवास्तव ने "कंप्यूटर ग्रंथकारी" जैसे श्रमसाध्य कार्य का उत्तरदायित्व वहन किया। परिषद् के डा. गगन गुप्त ने हिंदी संस्करण में सराहनीय योगदान दिया।

प्रस्तुत पाठ्यपुस्तक को उन शिक्षकों तथा विशेषज्ञों का श्रेष्ठ विद्वत्तापूर्ण निवेश प्राप्त हुआ है जिन्होंने प्रथम पाण्डुलिपि पर चर्चा तथा परिमार्जन के लिए आयोजित समीक्षा कार्यशाला में पुस्तक में सुधार के लिए वास्तविक सुझाव दिए। हम प्रो. टी.वी. रामकृष्णन तथा उनके लेखक मंडल को उनके द्वारा 1988 में लिखी गई पाठ्यसामग्री के लिए धन्यवाद देते हैं जिसने हमें इस पाठ्यपुस्तक को विकसित करने में संदर्भ प्रदान किया। यदा-कदा इस पुस्तक के कुछ भागों को, विशेषकर जिन्हें विद्यार्थियों/शिक्षकों ने सराहा है, विद्यार्थियों की भावी पीढ़ी के हित को ध्यान में रखकर, प्रस्तुत पुस्तक में अपनाया/रूपांतरित किया है।

हम अपने सम्मानित प्रयोक्ताओं, विशेषकर विद्यार्थियों तथा शिक्षकों से प्राप्त समीक्षा एवं सुझावों का आदर करते हैं। हम अपने युवा पाठकों की भौतिकी के रोमांचकारी कार्यक्षेत्र की ओर अग्रसर होने की कामना करते हैं।

सुरेश चंद्र
भौतिकी विभाग
बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय
वाराणसी
(सभी लेखकों/संपादकों की ओर से)

लेखन मंडल के सदस्य

प्रो. सुरेशचंद्र (**अध्यक्ष**)
भौतिकी विभाग
बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय
वाराणसी

प्रो. राजाराम नित्यानंद
निदेशक
रेडियो-खगोलभौतिकी राष्ट्रीय केंद्र
पुणे

प्रो. पी.सी. जैन
भौतिकी एवं खगोलभौतिकी विभाग
दिल्ली विश्वविद्यालय
दिल्ली

प्रो. विजय ए. सिंह
भौतिकी विभाग
इंडियन इंस्टीट्यूट ऑफ टैक्नोलॉजी
कानपुर

प्रो. अरविंद कुमार
निदेशक
होमी भाभा विज्ञान शिक्षा केंद्र
मुंबई

प्रो. ए.एस. निगवेकर
अध्यक्ष
विश्वविद्यालय अनुदान आयोग
नई दिल्ली

प्रो. डी.पी. तिवारी
भौतिकी विभाग
इंडियन इंस्टीट्यूट ऑफ टैक्नोलॉजी
दिल्ली

एन.सी.ई.आर.टी.
विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग
डॉ. वी.पी. श्रीवास्तव
प्रो. बी.के. शर्मा (**समन्वयक**)

गांधी जी का जन्तर

तुम्हें एक जन्तर देता हूं। जब भी तुम्हें सन्देह हो या तुम्हारा अहम् तुम पर हावी होने लगे, तो यह कसौटी आजमाओ :

जो सबसे गरीब और कमजोर आदमी तुमने देखा हो, उसकी शकल याद करो और अपने दिल से पूछो कि जो कदम उठाने का तुम विचार कर रहे हो, वह उस आदमी के लिए कितना उपयोगी होगा। क्या उससे उसे कुछ लाभ पहुंचेगा? क्या उससे वह अपने ही जीवन और भाग्य पर कुछ काबू रख सकेगा? यानि क्या उससे उन करोड़ों लोगों को स्वराज्य मिल सकेगा जिनके पेट भूखे हैं और आत्मा अतृप्त है?

तब तुम देखोगे कि तुम्हारा सन्देह मिट रहा है और अहम् समाप्त होता जा रहा है।

मो. क. गांधी

हिंदी संस्करण की पांडुलिपि के पुनरावलोकन हेतु कार्यशाला के सदस्य

डॉ. एन. जी. डोंगरे
रीडर
बी-62, ब्रिज एन्क्लेव
सुंदरपुर, वाराणसी

श्री आर. के. तिवारी
लेक्चरर
एच.एम.डी.ए.वी. सीनियर सेकंडरी स्कूल
दरियागंज, नई दिल्ली

डॉ. एम. एन. बापत
रीडर
क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, मैसूर

डॉ. संत प्रकाश
रीडर
क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भोपाल

डॉ. एस. के. पराडकर
रीडर
क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, अजमेर

श्री डी.सी पाण्डेय
सहायक निदेशक, विज्ञान शिक्षा (अवकाश प्राप्त)
शिक्षा निदेशालय, राष्ट्रीय राजधानी क्षेत्र, दिल्ली
794, सेक्टर XII, आर. के. पुरम, नई दिल्ली

श्री एस.पी. सिंह
सहायक शिक्षा निदेशक
शिक्षा निदेशालय, दिल्ली

डॉ. ओ.पी. खण्डेलवाल
रीडर (अवकाश प्राप्त)
1708 ए, हांउसिंग बोर्ड कॉलोनी, सेक्टर-31
गुडगांव

श्री वेद रत्न
प्रोफेसर (अवकाश प्राप्त)
सी-536, सरस्वती विहार, दिल्ली

श्री जे.सी. शर्मा
जिला प्रशिक्षण एवं स्थापन अधिकारी
सी-431, सरस्वती विहार, दिल्ली

डॉ. पी.सी. जैन
प्रोफेसर
भौतिकी एवं खगोलभौतिकी विभाग
दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

श्री कन्हैया लाल
प्राचार्य (अवकाश प्राप्त)
121, अफगानन, दिल्ली गेट, गाजियाबाद

श्री आर.एस. दास
उपप्रधानाचार्य
बलवंत राय मेहता विद्याभवन
सीनियर सेकंडरी स्कूल, लाजपत नगर, नई दिल्ली

श्रीमती हर्ष आर्य
स्नातकोत्तर शिक्षिका (भौतिकी)
रामजस स्कूल
आनंद पर्वत, नई दिल्ली

डॉ. पी.के. मुखर्जी
रीडर
देशबंधु कॉलेज, कालकाजी, नई दिल्ली

श्री पी.आर. तिवारी
स्नातकोत्तर शिक्षक (भौतिकी)
चिन्मय विद्यालय, वसंत विहार, नई दिल्ली

प्रोफेसर बी.बी. त्रिपाठी
निदेशक (सूचना प्रौद्योगिकी)
जी.जी. विश्वविद्यालय, बिलासपुर

डॉ. डी.पी. तिवारी
प्रोफेसर
16-ए, मंदाकिनी एन्क्लेव
अलकनंदा, नई दिल्ली

हिंदी रूपांतर

डॉ. एस.एस. कुशवाहा
प्रोफेसर, भौतिकी विभाग
बनारस हिंदू विश्वविद्यालय
वाराणसी

डॉ. एम.के. गांधी
स्नातकोत्तर शिक्षक (भौतिकी)
दिल्ली पब्लिक स्कूल
गाजियाबाद

श्री जे.पी. अग्रवाल
प्राचार्य (अवकाश प्राप्त)
शिक्षा निदेशालय, राष्ट्रीय राजधानी क्षेत्र, दिल्ली
3, शक्ति अपार्टमेंट्स
काकाजी लेन, अशोक विहार, फेज III, दिल्ली

एन.सी.ई.आर.टी.
विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग
डॉ. वी.पी. श्रीवास्तव
डॉ. गगन गुप्त
प्रो. बी.के. शर्मा (**समन्वयक**)

संपादन

डॉ. आर.एम.पी. जायसवाल
प्रोफेसर (अवकाश प्राप्त)
भौतिकी विभाग
कुरुक्षेत्र विश्वविद्यालय
कुरुक्षेत्र

श्री जे.पी. अग्रवाल
प्राचार्य (अवकाश प्राप्त)
शिक्षा निदेशालय, राष्ट्रीय राजधानी क्षेत्र, दिल्ली
3, शक्ति अपार्टमेंट्स, काकाजी लेन
अशोक विहार, फेज III, दिल्ली

प्रो. बी.के. शर्मा
एन.सी.ई.आर.टी.
नई दिल्ली

विषयसूची

अध्याय 7

कणों के निकाय तथा घूर्णी गति

मुख्य आवरण अभिकल्पना

आनंद डी. घईसास
होमी भाभा विज्ञान शिक्षा केंद्र
(टाटा इंस्टीट्यूट ऑफ फंडामेंटल रिसर्च, मुंबई)
(नोबेल फाउंडेशन की शासकीय
वेबसाइट से रूपांतरित)

"लेसर किरणपुंजों और चुंबकीय क्षेत्रों के उचित विन्यासों के नियोजन द्वारा परमाणुओं को प्रगृहीत और ठंडा किया जा सकता है। इन प्रविधियों ने 1995 में किसी अतिशीतित क्षारिक परमाणुओं की तनु गैस द्रव्य की एक नई अवस्था - बोस आइंस्टीन द्राव (Bose Einstein Condensate - BEC) के सर्जन का मार्गदर्शन किया। किसी BEC में परमाणु समुदाय का अधिकांश भाग निम्नतम ऊर्जा अवस्था में होता है : मुख्य आवरण की तली में दाईं ओर दिए गए आंतरिक चित्र में परमाणुओं के वेग वितरण में उच्च शिखरों का अवलोकन कीजिए। इसके ऊपर 'परमाणु-लेसर'-संसक्त द्रव्य के स्पंद का निदर्शन है।"

अध्याय 1

भौतिक जगत

1.1 भौतिकी क्या है ?

प्रादुर्भाव से ही मनुष्य को अपने चारों ओर फैले विश्व के बारे में अधिक से अधिक जानने की जिज्ञासा रही है । अनादिकाल से ही रात को आकाश में चमकने वाले खगोलीय पिंड उसे आकर्षित करते रहे हैं । दिन-रात की सतत् पुनरावृत्ति, ऋतुओं के वार्षिक चक्र, ग्रहण, ज्वार-भाटे, ज्वालामुखी तथा इन्द्रधनुष सदा से ही उसके आश्चर्य के स्रोत रहे हैं । यह जगत विस्मयकारी पदार्थों तथा जीवन एवं व्यवहार की रहस्यमयी विविधताओं से परिपूर्ण है । मनुष्य के कल्पनाशील तथा अन्वेषी मस्तिष्क ने प्रकृति के इन आश्चर्यों तथा विस्मयों के प्रति विभिन्न प्रतिक्रियाएं व्यक्त की हैं । आदिकाल से ही मनुष्य की प्रवृत्ति भौतिक पर्यावरण का प्रेक्षण करने, प्राकृतिक परिघटनाओं के सार्थक रूप निर्धारण करने तथा पारस्परिक संबंधों को समझने तथा प्रकृति के साथ व्यवहार करने के लिए आवश्यक नए-नए यंत्रों का निर्माण एवं उनके प्रयोग करने की रही है । कालान्तर में मनुष्य के इन प्रयासों ने ही आधुनिक विज्ञान तथा प्रौद्योगिकी का मार्ग प्रशस्त किया है ।

Science शब्द लैटिन के शब्द 'Scientia' जिसका अर्थ है–'जानना' से व्युत्पन्न हुआ है । संस्कृत शब्द 'विज्ञान' और अरबी शब्द 'इल्म' समानार्थी हैं, जिनका अर्थ है–'संगठित ज्ञान' । विस्तृत रूप में विज्ञान उतना ही प्राचीन है जितनी कि मानव जाति । मिस्र, भारत, चीन, यूनान, मैसोपोटामिया तथा विश्व के अन्य अनेक देशों की प्राचीन सभ्यताओं ने इसके विकास में महत्त्वपूर्ण योगदान किया है । सोलहवीं शताब्दी के बाद यूरोप में विज्ञान के क्षेत्र में अत्यधिक प्रगति हुई है । बीसवीं शताब्दी के मध्य तक विज्ञान वास्तविक रूप से अंतर्राष्ट्रीय उद्यम बन गया है और इसके विकास में अनेक देशों तथा सभ्यताओं ने अपना योगदान दिया है ।

विज्ञान और **वैज्ञानिक विधि** क्या हैं ? मोटे तौर पर कहें तो **'विज्ञान'** प्राकृतिक परिघटनाओं को, यथासंभव सुव्यवस्थित तथा विस्तृत रूप से समझने और इस प्रकार अर्जित ज्ञान से परिघटना के संबंध में अनुमान लगाने और नियंत्रित प्रयोगों द्वारा उन्हें संशोधित करने का प्रयास है । 'वैज्ञानिक विधि' के अंतर्गत विभिन्न अन्योन्याश्रित चरण; जैसे–प्रेक्षण, नियंत्रित प्रयोग, गुणात्मक तथा मात्रात्मक तर्क, गणितीय प्रतिरूपण, पूर्वानुमान तथा सत्यापन/असत्यापन आदि आते हैं । विज्ञान में परिकल्पना तथा चिन्तन का भी महत्त्वपूर्ण स्थान है, लेकिन किसी वैज्ञानिक सिद्धांत के अंतिम रूप में स्वीकार्य होने के लिए यह आवश्यक है कि वह संगत प्रेक्षणों या प्रयोगों द्वारा सत्यापित भी हो । विज्ञान की प्रकृति

और कार्यविधि दार्शनिक विवादों का विषय रही है, यहां हमें इसकी चर्चा नहीं करनी है । इस भाग के अंत में दिए गए विवेचनात्मक प्रश्न इन विषयों के संबंध में हमारे विचारों को अधिक स्पष्ट करने में सहायक हो सकते हैं ।

विज्ञान की प्रगति का मूल आधार सिद्धांत तथा प्रेक्षण (अथवा प्रयोग) में होने वाली पारस्परिक क्रिया है । विज्ञान सदैव गतिशील है । विज्ञान में किसी भी सिद्धांत को 'अंतिम' नहीं कहा जा सकता और न ही वैज्ञानिकों में कोई विवादरहित सत्ता ही होती है । जैसे-जैसे प्रेक्षणों की व्यापकता तथा परिशुद्धता में संशोधन होते हैं अथवा प्रयोगों द्वारा नए परिणामों की पुष्टि होती है, तो प्रतिपादित सिद्धांतों द्वारा, यदि आवश्यक हो तो उनमें समुचित संशोधन करके उनकी भलीभांति व्याख्या की जानी चाहिए । बहुधा ये संशोधन अत्यंत गहन न होकर वर्तमान सिद्धांत के ढाँचे में ही होते हैं । उदाहरण के लिए जब जोहानेस केप्लर (1571-1630) ने टाइको ब्राह (1546-1601) द्वारा संग्रहीत, ग्रहों से संबंधित, विस्तृत आंकड़ों का परीक्षण किया, तो निकोलस कोपर्निकस (1473-1543) द्वारा कल्पित सूर्य केंद्रीय सिद्धांत (सूर्य सौर परिवार के केंद्र पर स्थित है) में आंकड़ों की समुचित व्याख्या करने के लिए ग्रहों की वृत्ताकार कक्षाओं को दीर्घवृत्तीय कक्षाओं की धारणा से प्रतिस्थापित करना पड़ा । फिर भी यह संभव हो सकता है कि वर्तमान सिद्धांत नवीन प्रेक्षणों की पर्याप्त व्याख्या करने में समर्थ न हो। इससे वैज्ञानिकों को चिन्तन करने के अवसर मिलते हैं जिनके परिणामस्वरूप विज्ञान में महान परिवर्तन होते हैं । बीसवीं शताब्दी के आरंभ में वैज्ञानिकों ने यह अनुभव किया कि उस समय तक सर्वमान्य न्यूटनी यांत्रिकी परमाण्वीय परिघटना की कुछ मूल विशेषताओं की व्याख्या करने में सफल नहीं है । इसी प्रकार उस समय तक सर्वमान्य "प्रकाश का तरंग गति सिद्धांत" भी ''प्रकाश-विद्युत् प्रभाव'' की व्याख्या करने में समर्थ नहीं था । वैज्ञानिकों ने इन विषयों पर अध्ययन किया जिसके परिणामस्वरूप परमाण्वीय तथा आण्विक परिघटनाओं को भलीभांति समझने के लिए मूल रूप से एक नई यांत्रिकी (क्वान्टम यांत्रिकी) का विकास हुआ।

जिस प्रकार कोई नया प्रयोग किसी वैकल्पिक सैद्धांतिक प्रतिरूप के विचार को जन्म दे सकता है, उसी प्रकार कोई सैद्धांतिक प्रगति किसी प्रयोग में 'क्या देखा जाए' के संबंध में सुझाव दे सकती है । सन् 1911 में अर्नेस्ट रदरफोर्ड (1871-1937) द्वारा किए गए ऐल्फा कणों के प्रकीर्णन के प्रयोग ने परमाणु के नाभिकीय प्रतिरूप की स्थापना की जो सन् 1913 में नील बोर (1885-1962) द्वारा प्रतिपादित हाइड्रोजन परमाणु के क्वान्टम सिद्धांत का आधार बन गया । वहीं दूसरी ओर, सन् 1930 में पॉल डिरैक (1902-1984) ने सबसे पहले सैद्धांतिक रूप से प्रतिकण की अभिधारणा प्रस्तुत की जिसकी पुष्टि दो वर्ष बाद कार्ल एन्डरसन की पॉजीट्रान (प्रति-इलेक्ट्रॉन) की प्रायोगिक खोज द्वारा हुई ।

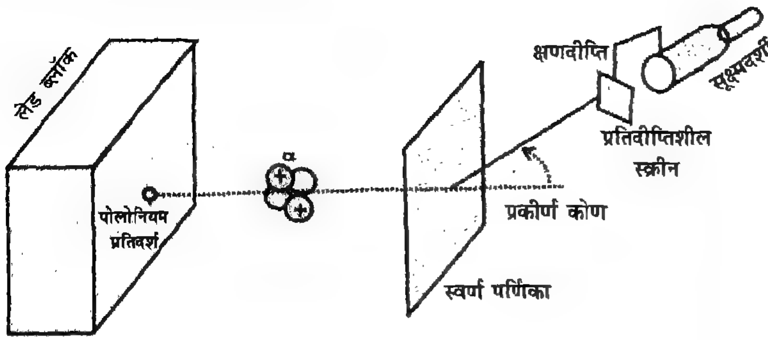
भौतिकी **'प्राकृतिक विज्ञान'** की श्रेणी का एक आधारभूत विषय है जिसके अंतर्गत रसायन विज्ञान तथा जीव विज्ञान जैसे अन्य विषय भी सम्मिलित हैं । **'Physics'** शब्द ग्रीक भाषा के एक शब्द से व्युत्पन्न हुआ है जिसका अर्थ है 'प्रकृति' । यह संस्कृत भाषा के शब्द भौतिक (Bhautika) के समान है जिसे 'भौतिक' जगत के संबंध में प्रयोग किया जाता है । इस विषय की परिशुद्ध परिभाषा देना न तो संभव ही है और न ही आवश्यक । मोटे तौर पर हम भौतिकी का वर्णन प्रकृति के मूलभूत नियमों का अध्ययन तथा उनको विभिन्न प्राकृतिक परिघटनाओं में अभिव्यक्ति करने वाले विषय के रूप में कर सकते हैं । भौतिकी के कार्यक्षेत्र का संक्षिप्त वर्णन अगले अनुभाग में किया गया है । यहां हम भौतिकी के दो प्रमुख विचारों- **एकीकरण** तथा **न्यूनीकरण** पर ही अपना ध्यान केंद्रित करेंगे ।

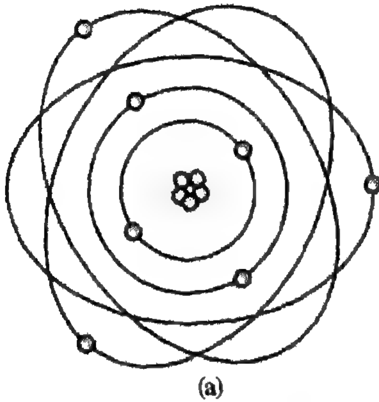
भौतिकी के अंतर्गत हम विविध भौतिक परिघटनाओं की व्याख्या कुछ धारणाओं और नियमों के पदों में करने का प्रयास करते हैं । इसका उद्देश्य विभिन्न क्षेत्रों और दशाओं में भौतिक जगत को कुछ सार्वत्रिक नियमों की अभिव्यक्ति के रूप में देखना है । उदाहरण के लिए, न्यूटन द्वारा प्रतिपादित वही गुरुत्वाकर्षण का नियम सेब के पृथ्वी पर गिरने; चंद्रमा द्वारा पृथ्वी की परिक्रमा करने तथा ग्रहों द्वारा सूर्य की परिक्रमा करने का वर्णन करता है। इसी प्रकार, विद्युत्-चुंबकत्व के मूल नियम (मैक्सवैल की समीकरणें) सभी (स्थूल) वैद्युत तथा चुंबकीय परिघटनाओं को नियंत्रित करते हैं । प्रकृति के मूलभूत बलों को एकीकृत करने वाले प्रयास, एकीकरण के इसी अन्वेषण को प्रतिबिम्बित करते हैं (अनुभाग 1.4 देखिए)।

किसी अपेक्षाकृत बड़े तथा अधिक जटिल निकाय के गुणों को इसके सरल अवयवी अंगों की पारस्परिक क्रियाओं और गुणों से व्युत्पन्न करना एक संबद्ध प्रयास है । यह उपागम **'न्यूनीकरण'** कहलाता है और यह भौतिकी का अंत: सार है । उदाहरण के लिए, उन्नीसवीं शताब्दी में विकसित ऊष्मागतिकी का विषय स्थूल निकायों से स्थूल राशियों; जैसे– ताप, आंतरिक ऊर्जा, एन्ट्रॉपी (उत्क्रम-माप) आदि के पदों में व्यवहार करता है । तदनंतर में अणुगति सिद्धांत और सांख्यिकीय यान्त्रिकी विषयों ने स्थूल निकायों के आण्विक अवयवों के गुणों के रूप में इन्ही राशियों की व्याख्या की । विशेष रूप से यह देखने में आया कि किसी निकाय का ताप उस निकाय के अणुओं की औसत गतिज ऊर्जा से संबंधित है ।

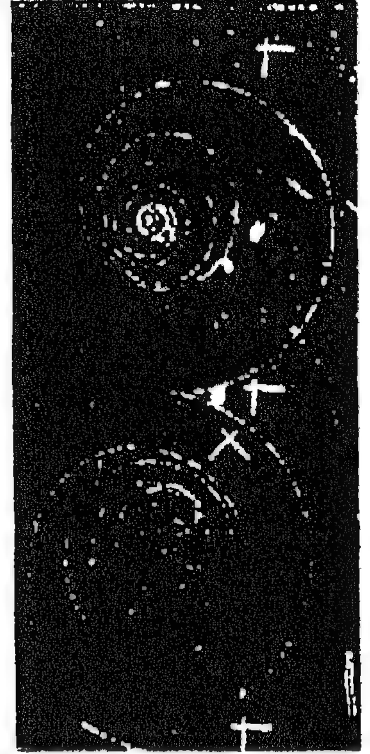
1.2 भौतिकी के कार्यक्षेत्र तथा अंतर्निहित रोमांच

भौतिकी के कार्यक्षेत्र का अनुमान हम इसकी विभिन्न उपशाखाओं को देखकर लगा सकते हैं । मूल रूप से इसके दो ही प्रभाव क्षेत्र हैं–स्थूल तथा सूक्ष्म । स्थूल क्षेत्र के अंतर्गत प्रयोगशाला, पार्थिव तथा खगोलीय स्तर की परिघटनाएं आती हैं जबकि सूक्ष्म क्षेत्र के अंतर्गत परमाण्वीय, आण्विक तथा नाभिकीय





(a)



(b)

चित्र 1.1 *भौतिकी में प्रयोग तथा सिद्धांत साथ-साथ चलते हैं और एक-दूसरे की प्रगति में सहायक होते हैं। (a) रदरफोर्ड के ऐल्फा किरणों के प्रकीर्णन के प्रयोग ने परमाणु का नाभिकीय प्रतिरूप दिया (b) डिरैक के सैद्धांतिक कार्य ने प्रतिकण की अवधारणा प्रस्तुत की जिसकी पुष्टि बाद में एन्डरसन द्वारा की गई पॉजिट्रॉन (प्रति इलेक्ट्रॉन) की खोज से हुई। छायाचित्र किसी चुंबकीय क्षेत्र में विपरीत दिशाओं में सर्पिलन करते हुए किसी इलेक्ट्रॉन एवं पॉजिट्रॉन के पथचिह्नों को दर्शाता है।*

परिघटनाएं आती हैं* । **चिरसम्मत भौतिकी** मुख्यतः स्थूल परिघटनाओं से संबद्ध होती है जिसके अंतर्गत **यांत्रिकी**, **वैद्युतगतिकी**, **प्रकाशिकी** तथा **ऊष्मागतिकी** जैसे विषय आते हैं। यांत्रिकी न्यूटन के गति के नियमों तथा गुरुत्वाकर्षण के नियम पर आधारित है तथा इसका संबंध कणों, दृढ़ तथा विरूपणशील पिण्डों, तथा कणों के व्यापक निकायों की गति (या साम्यावस्था) से है। जेट के रूप में निष्कर्षित गैसों द्वारा राकेट-नोदन, जल तरंगों का संचरण, वायु में ध्वनि तरंगों का संचरण तथा किसी भार के अधीन झुकी छड़ की साम्यावस्था यांत्रिकी से संबंधित समस्याएं हैं। वैद्युतगतिकी विद्युत् आवेशित तथा चुंबकीय पिण्डों से संबद्ध वैद्युत तथा चुंबकीय परिघटनाओं से संबंध रखती है। इसके आधारभूत नियम कूलॉम, ऑर्स्टेड, ऐम्पियर, तथा फैराडे द्वारा दिए गए और मैक्सवेल ने अपनी प्रसिद्ध समीकरणों में इन नियमों को संपुटित किया। किसी विद्युत् वाही चालक की किसी चुंबकीय क्षेत्र में गति, किसी विद्युत् परिपथ पर प्रत्यावर्ती धारा सिग्नल की अनुक्रिया, किसी ऐन्टीना की कार्यविधि तथा आयनमंडल में रेडियो तरंगों का संचरण आदि वैद्युतगतिकी से संबंधित समस्याएं हैं। प्रकाशिकी, प्रकाश पर आधारित परिघटनाओं से संबंधित होती है। दूरदर्शक तथा सूक्ष्मदर्शी की कार्यविधि, पतली झिल्ली के रंग आदि उपविषय प्रकाशिकी के अंतर्गत आते हैं। ऊष्मागतिकी यांत्रिकी के विपरीत होती है, यह पिण्डों की समग्र रूप में गति से संबंधित नहीं होती। अपितु यह निकायों की स्थूल साम्यावस्था से व्यवहार करती है तथा बाह्य कार्य और ऊष्मा के स्थानान्तरण द्वारा निकाय की आंतरिक ऊर्जा, ताप, एन्ट्रॉपी (उत्क्रम-माप) आदि से व्यवहार करती है। ऊष्मा इंजन तथा रेफ्रिजरेटर की दक्षता, किसी भौतिक अथवा रासायनिक प्रक्रिया की दिशा, आदि ऊष्मागतिकी की रोचक समस्याएं हैं।

भौतिकी के सूक्ष्म प्रभाव क्षेत्र के अंतर्गत परमाणुओं तथा नाभिकों के सूक्ष्मतम पैमाने पर (तथा लंबाई के इससे भी

---

* हाल ही में स्थूल तथा सूक्ष्म प्रभाव क्षेत्रों के बीच एक मध्य प्रभाव क्षेत्र (मध्याकार भौतिकी या Mesoscopic Physics) जो कुछ दसों या कुछ सैकड़ों परमाणुओं के समूहों से संबद्ध है, अनुसंधान के एक रोमांचकारी क्षेत्र के रूप में प्रतिपादित हुआ है।

अधिक सूक्ष्म पैमाने पर) द्रव्य का संघटन तथा संरचना, एवं इलेक्ट्रॉन, फोटॉन, तथा अन्य मूल कणों जैसे विभिन्न अन्वेषियों से उनकी अन्योन्यक्रियाएं होती हैं । चिरसम्मत भौतिकी इस प्रभाव क्षेत्र से व्यवहार करने में सक्षम नहीं है तथा सूक्ष्म परिघटनाओं की व्याख्या के लिए क्वान्टम सिद्धांत को हाल ही में उचित प्राधार माना गया है । समग्र रूप में, भौतिकी की इमारत अत्यधिक भव्य और सुंदर है और जैसे-जैसे आप इसका गहन अध्ययन करेंगे वैसे-वैसे आप इसकी महत्ता को समझकर इसकी अधिकाधिक सराहना करेंगे ।

अब आप यह देख सकते हैं कि भौतिकी का कार्यक्षेत्र वास्तव में अत्यधिक विस्तृत है । यह लंबाई, द्रव्यमान, समय, ऊर्जा आदि जैसी भौतिक राशियों के परिमाण के अत्यंत विशाल परास का प्रतिपादन करती है । एक ओर तो इसके अंतर्गत इलेक्ट्रॉन, प्रोटॉन आदि से संबंधित परिघटनाओं का लंबाई के अति सूक्ष्म पैमाने (10^{-14}m अथवा इससे भी कम) पर अध्ययन किया जाता है, तो वहीं दूसरी ओर इसके अंतर्गत खगोलीय परिघटनाओं का अध्ययन, आकाशगंगाओं के पैमाने अथवा संपूर्ण विश्व के पैमाने, जिसका विस्तार 10^{26}m कोटि का है, पर करते हैं । इन दोनों पैमानों में एक पैमाना दूसरे पैमाने का 10^{40} गुना अथवा अधिक होता है । लंबाइयों के परास को प्रकाश की चाल से भाग करके समयों के पैमाने का परास, 10^{-22}s से 10^{18}s प्राप्त किया जा सकता है । भौतिकी के अन्तर्गत अध्ययन किए जाने वाले द्रव्यमानों का परास इलेक्ट्रॉन के द्रव्यमान (10^{-30} kg) से ज्ञात दृष्टिगोचर विश्व के द्रव्यमान (10^{55} kg) तक विस्तृत है । पार्थिव परिघटनाएं इस परास के बीच कहीं भी हो सकती हैं ।

भौतिकी कई प्रकार से रोमांचकारी है । कुछ व्यक्ति इसे मूल सिद्धांतों की सार्वत्रिकता एवं परिष्कृतता से इस तथ्य के आधार पर रोमांचित हो उठते हैं कि भौतिकी की कुछ मूल धारणाएं तथा नियम भौतिक राशियों के अत्यधिक विशाल परिमाण के परास का प्रतिपादन करने वाली परिघटनाओं की व्याख्या कर सकते हैं । कुछ अन्य के लिए प्रकृति के रहस्यों को प्रकट करने के लिए नए काल्पनिक प्रयोगों को कार्यान्वित करने की चुनौती, नियमों को सत्यापित करना अथवा उनका निराकरण करना रोमांच से भरपूर हो सकता है । अनुप्रयुक्त भौतिकी का महत्त्व किसी भी दृष्टि से सैद्धांतिक भौतिकी से कम नहीं है । मूल नियमों से रोचक तथा उपयोगी अनुप्रयोगों की ओर अग्रसर होने के लिए अत्यधिक प्रवीणता तथा सतत् प्रयास की आवश्यकता होती है ।

पिछली कुछ शताब्दियों में भौतिकी के क्षेत्र में हुई असाधारण प्रगति के पीछे क्या रहस्य छुपा हुआ है ? महत्त्वपूर्ण प्रगति से प्राय: हमारे मूल प्रत्यक्ष ज्ञान में परिवर्तन संबद्ध होते हैं । सर्वप्रथम यह अनुभव किया गया कि वैज्ञानिक प्रगति के लिए केवल गुणात्मक सोच, यद्यपि निसंदेह महत्त्वपूर्ण है, पर्याप्त नहीं है । चूंकि प्रकृति के नियम सुस्पष्ट गणितीय समीकरणों द्वारा व्यक्त किए जा सकते हैं अत: विज्ञान और विशेषकर भौतिकी के विकास के लिए परिमाणात्मक मापन की प्रमुख स्थिति होती है । दूसरी अत्यंत महत्त्वपूर्ण अंतर्दृष्टि यह थी कि भौतिकी के मूल नियम सार्वत्रिक हैं : समान नियम व्यापक रूप से भिन्न संदर्भों पर लागू होते हैं । अंतत: सन्निकटन की नीति (योजना) अत्यधिक सफल सिद्ध हुई । दैनिक जीवन की अधिकांश प्रेक्षित परिघटनाएं मूल नियमों की जटिल अभिव्यक्ति ही होती हैं । वैज्ञानिकों ने किसी परिघटना के महत्त्वपूर्ण लक्षणों की सार (निष्कर्ष) महत्ता को उसके अपेक्षाकृत कम महत्त्वपूर्ण पहलुओं से पहचाना । किसी परिघटना की समस्त जटिलताओं को एक साथ एक ही बार में स्पष्ट कर पाना व्यावहारिक नहीं होता । एक अच्छी नीति यही है कि पहले परिघटना के परमावश्यक लक्षणों पर ध्यान केंद्रित किया जाए, मूल सिद्धांतों की खोज की जाए, तत्पश्चात् संशुद्धियों को लागू करके उस परिघटना के सिद्धांतों को और अधिक परिष्कृत किया जाए । उदाहरण के लिए, मुक्त रूप से समान ऊंचाई से गिराए जाने पर कोई पत्थर तथा पंख पृथ्वी पर एक साथ नहीं पहुंचते । इसका कारण यह है कि इस परिघटना के परमावश्यक पहलू "गुरुत्व बल के अधीन मुक्त पतन" को वायु के प्रतिरोध की उपस्थिति ने जटिल बना दिया है । गुरुत्व बल के अधीन मुक्त पतन के लिए नियम प्राप्त करने के लिए यह श्रेयस्कर है कि ऐसी अवस्थिति पैदा की जाए जिसमें वायु-प्रतिरोध नगण्य हो । ऐसा हम कर सकते हैं । उदाहरण के लिए, एक लंबी निर्वातित नली में पत्थर तथा पंख को एक साथ मुक्त रूप से गिरने दीजिए । इस प्रकरण में, दोनों पिण्ड लगभग समान दर से नीचे गिरेंगे, जिससे यह मूल नियम प्राप्त होगा कि गुरुत्वीय त्वरण पिण्ड के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता । इस प्रकार प्राप्त मूल नियम से हम वापस पंख पर जा सकते हैं, वायु प्रतिरोध के कारण संशुद्धि का समावेश कर सकते हैं, तथा गुरुत्व बल के अधीन मुक्त रूप से गिरते पिण्डों के लिए अधिक यथार्थवादी सिद्धांत बनाने का प्रयास कर सकते हैं ।

1.3 भौतिकी, प्रौद्योगिकी तथा समाज

भौतिकी, प्रौद्योगिकी तथा समाज के बीच पारस्परिक संबंधों को अनेक उदाहरणों में देखा जा सकता है । ऊष्मागतिकी विषय का उद्भव ऊष्मा इंजनों की कार्यविधि को समझने और उसमें सुधार करने की आवश्यकता के कारण हुआ । जैसा कि हम सभी जानते हैं, भाप इंजन अठारहवीं शताब्दी में इंग्लैंड में हुई औद्योगिक क्रांति का अभिन्न अंग था जिसने मानव सभ्यता को अत्यधिक प्रभावित किया है । कभी प्रौद्योगिकी नई भौतिकी को जन्म देती है तो कभी भौतिकी नई प्रौद्योगिकी को उत्पन्न करती है । भौतिकी द्वारा नई प्रौद्योगिकी उत्पन्न करने का एक उदाहरण है-बेतार संचार प्रौद्योगिकी जो उन्नीसवीं शताब्दी में हुई विद्युत् और चुंबकत्व के मूल नियमों की खोज के अनुगमन से ही विकसित हुई । भौतिकी के अनुप्रयोगों के

विषय में पहले से ही जान लेना सदैव संभव नहीं होता । सन् 1933 के अंत तक प्रसिद्ध भौतिकविद् अर्नस्ट रदरफोर्ड परमाणुओं से ऊर्जा निष्कासित करने की संभावना को पूर्ण रूप से मस्तिष्क से निकाल चुके थे । परंतु कुछ ही वर्षों के पश्चात् सन् 1938 में हैन तथा मिटनर ने न्यूट्रॉन-प्रेरित यूरेनियम नाभिक के विखण्डन से संबंधित परिघटना की खोज की जिसने आण्विक शस्त्रों तथा आण्विक शक्ति रिएक्टरों को आधार प्रदान किया । भौतिकी से प्रौद्योगिकी के उद्भव का एक अन्य महत्त्वपूर्ण उदाहरण सिलिकॉन चिप है जिसने बीसवीं शताब्दी के अंतिम तीन दशकों में 'कम्प्यूटर क्रांति' को प्रेरित किया है । ''वैकल्पिक ऊर्जा स्रोतों का विकास'' विज्ञान का एक ऐसा महत्त्वपूर्ण क्षेत्र है जिसमें भौतिकी का सदैव ही योगदान रहा है और भविष्य में भी रहेगा । हमारे ग्रह के जीवाश्मी ईंधन बहुत तेज़ी से घट रहे हैं, तथा खर्च सह सकने योग्य ऊर्जा-स्रोतों की खोज अतिआवश्यक है । इस दिशा में पहले से ही काफी प्रगति हो चुकी है (उदाहरण के लिए, सौर ऊर्जा, भूतापीय ऊर्जा आदि का वैद्युत ऊर्जा में रूपांतरण के रूप में) परंतु अभी भी बहुत कुछ किया जाना शेष है ।

भौतिकी की भांति, रसायन विज्ञान तथा जीव विज्ञान भी प्रौद्योगिकी तथा समाज से घनिष्ठ रूप से संबद्ध हैं । आनुवंशिक अभियांत्रिकी, बायोटैक्नोलॉजी तथा नए रासायनिक पदार्थ, आदि आधुनिक वैज्ञानिक खोजों के ऐसे प्रमुख क्षेत्र हैं जिनसे इक्कीसवीं शताब्दी का मानव समाज अवश्य ही प्रभावित होगा ।

सारणी 1.1 में कुछ महान भौतिकविदों, उनके प्रमुख योगदानों तथा उनके मूल देशों के विषय में जानकारी दी गई है । इस सारणी के द्वारा आप वैज्ञानिक प्रयासों के बहुसांस्कृतिक, अंतर्राष्ट्रीय स्वरूप के महत्त्व को समझेंगे । सारणी 1.2 में कुछ महत्त्वपूर्ण प्रौद्योगिकियों तथा भौतिकी के उन सिद्धांतों जिन पर वे आधारित हैं, को सूचीबद्ध किया गया है । स्पष्ट है कि यह सूचियां सुविस्तृत नहीं हैं । हमारा आपसे यह अनुरोध

सारणी 1.1 संसार के विभिन्न देशों के कुछ भौतिकविदों के प्रमुख योगदान

नाम	प्रमुख योगदान/खोज	मूल देश
आइज़क न्यूटन	गुरुत्वाकर्षण का सार्वत्रिक नियम, गति के नियम, परावर्ती दूरदर्शक	इंग्लैंड
गैलिलियो गैलीली	जड़त्व का नियम	इटली
आर्किमिडीज़	उत्प्लावकता का नियम, उत्तोलक का नियम	यूनान
जेम्स क्लार्क मैक्सवेल	विद्युत्-चुंबकीय सिद्धांत; प्रकाश-एक विद्युत्-चुंबकीय तरंग	इंग्लैंड
डब्ल्यू. के. रोंजन	एक्स-किरणें	जर्मनी
मैरी स्क्लोडोव्स्का क्यूरी	रेडियम तथा पोलोनियम की खोज; प्राकृतिक रेडियोऐक्टिवता का अध्ययन	पोलैंड
अल्बर्ट आइंस्टाइन	प्रकाश-वैद्युत का नियम; आपेक्षिकता का सिद्धांत	जर्मनी
एस. एन. बोस	क्वान्टम सांख्यिकी	भारत
जेम्स चैडविक	न्यूट्रॉन	इंग्लैंड
नील बोर	हाइड्रोजन परमाणु का क्वान्टम प्रतिरूप	डेन्मार्क
अर्नस्ट रदरफोर्ड	परमाणु का नाभिकीय प्रतिरूप	न्यूजीलैंड
सी.वी. रमन	अणुओं द्वारा प्रकाश का अप्रत्यास्थ प्रकीर्णन	भारत
क्रिश्चियन हाइगेंस	प्रकाश का तरंग सिद्धांत	हॉलैंड
माइकल फैराडे	विद्युत्-चुंबकीय प्रेरण के नियम	इंग्लैंड
एडविन हबल	प्रसरणशील विश्व	अमेरिका
होमी जहांगीर भाभा	कॉस्मिक विकिरण में क्रम-प्रपात प्रक्रम	भारत
अब्दुस सलाम	दुर्बल तथा विद्युत्-चुंबकीय अन्योन्यक्रियाओं का एकीकरण	पाकिस्तान
आर.ए. मिलिकन	इलेक्ट्रॉन आवेश की माप	अमेरिका
अर्नस्ट औरलैंडो लॉरेन्स	साइक्लोट्रॉन	अमेरिका
वॉल्फगैंग पॉली	क्वान्टम अपवर्जन सिद्धांत	आस्ट्रिया
लुइस विक्टर द-ब्रॉग्ली	द्रव्य की तरंग प्रकृति	फ्रांस
जे. जे. टॉमसन	इलेक्ट्रॉन की खोज	इंग्लैंड
एस. चन्द्रशेखर	चन्द्रशेखर सीमा, तारों का विकास तथा संरचना	भारत
लेव डेवीडोविक लैंडो	संघनित द्रव्य का सिद्धांत, द्रव हीलियम	रूस
हैनरिक रूडोल्फ हर्ट्ज़	विद्युत्-चुंबकीय तरंगें	जर्मनी
जे.सी. बोस	अतिलघु रेडियो तरंगें	भारत
हिडेकी युकावा	नाभिकीय बलों का सिद्धांत	जापान
वर्नर हेज़ेनबर्ग	क्वान्टम यान्त्रिकी, अनिश्चितता का सिद्धांत	जर्मनी
विक्टर फ्रांसिस हैस	कॉस्मिक विकिरण	आस्ट्रिया
एम. एन. साहा	ऊष्मीय आयनीकरण	भारत
जी. एन. रामचंद्रन	प्रोटीन की त्रि-सर्पिल संरचना	भारत

सारणी 1.2 प्रौद्योगिकी तथा भौतिकी के बीच संबंध

प्रौद्योगिकी	वैज्ञानिक सिद्धांत
भाप इंजन	ऊष्मागतिकी के नियम
नाभिकीय रिएक्टर	नाभिकीय विखंडन
रेडियो तथा टेलीविजन	विद्युत्-चुंबकीय तरंगों का संचरण
अभिकलित्र	अंकीय तर्क
लेसर	विकिरण के उद्दीपित उत्सर्जन द्वारा प्रकाश प्रवर्धन (जनसंख्या व्युत्क्रमण)
अतिउच्च चुंबकीय क्षेत्र का उत्पादन	अतिचालकता
राकेट नोदन	न्यूटन के गति के नियम
विद्युत् जनित्र	फैराडे के विद्युत्-चुंबकीय प्रेरण नियम
जलविद्युत् शक्ति	गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा का विद्युत् ऊर्जा में रूपांतरण
वायुयान	द्रवगतिकी से संबंधित बर्नूली का सिद्धांत
कण त्वरक	विद्युत्-चुंबकीय क्षेत्रों में आवेशित कणों की गति
सोनार	पराश्रव्य तरंगों का परावर्तन

है कि अच्छी-अच्छी पुस्तकों, वैज्ञानिक वेबसाइट तथा अपने शिक्षकों के सहयोग से इन सूचियों में और नाम एवं खोज लिखकर इन्हें और व्यापक बनाइए । आपको यह कार्य अत्यंत शिक्षाप्रद तथा मनोरंजक लगेगा । हमें पूर्ण विश्वास है कि यह कार्य कभी समाप्त नहीं होगा । विज्ञान की प्रगति निरंतर है ।

1.4 प्रकृति में मूल बल*

हम सभी में बल से संबंधित एक सहज अवधारणा है । हमारे अनुभव के आधार पर किसी वस्तु को तोड़ने-मरोड़ने, फेंकने, धकेलने तथा लाने-ले जाने के लिए बल की आवश्यकता होती है । जब हम किसी "मेरी गो राउण्ड झूले" में घूम रहे होते हैं या कोई गतिमान पिण्ड हमसे टकराता है, तो उस समय भी हम अपने ऊपर बल के आघात का अनुभव करते हैं । बल की इस सहज अवधारणा से सटीक वैज्ञानिक अवधारणा की ओर बढ़ना कोई सहज बात नहीं है । अरस्तू जैसे आरंभिक विचारकों की इस संबंध में गलत धारणा थी । बल की सही अवधारणा आइज़क न्यूटन ने अपने सुप्रसिद्ध 'गति के नियमों' द्वारा प्रस्तुत की । उन्होंने दो पिंडों के बीच गुरुत्वाकर्षण बल के लिए भी सुस्पष्ट व्यवस्था दी । हम इन विषयों का अध्ययन अनुवर्ती अध्यायों में करेंगे ।

स्थूल जगत में, गुरुत्वाकर्षण बल के साथ-साथ हमारा सामना कई अन्य प्रकार के बलों से होता है- पेशीय बल, पिण्डों के बीच स्पर्शीय बल, घर्षण बल (जो कि स्पर्शी पृष्ठों के समानान्तर लगने वाला स्पर्शीय बल ही है), दबी या खिंची हुई कमानियों द्वारा लगने वाला बल तथा कसी हुई रस्सी या डोरी का बल (तनाव), उत्प्लावकता तथा श्यानता का बल, जब पिंड किसी तरल के संपर्क में होते हैं, किसी तरल के दाब से उत्पन्न बल, तथा किसी द्रव के पृष्ठ तनाव के कारण बल आदि । आवेशित तथा चुंबकित पिण्डों में भी बल होते हैं। सूक्ष्म प्रभाव क्षेत्र में हम वैद्युत तथा चुंबकीय बल, प्रोटॉनों तथा न्यूट्रॉनों के बीच नाभिकीय बल तथा अंतराण्विक और अंतरपरमाण्विक बल देखते हैं । हम इस प्रकार के बलों का परिचय इस पाठ्यक्रम के अंतिम भागों में प्राप्त करेंगे ।

बीसवीं शताब्दी की भौतिकी का एक महत्त्वपूर्ण अंतर्ज्ञान यह है कि विभिन्न संदर्भों में उत्पन्न होने वाले ये विभिन्न बल प्रकृति के केवल कुछ ही मूल बलों से उत्पन्न होते हैं । उदाहरण के लिए, कमानी का प्रत्यास्थ बल, जब कमानी को खींचा/दबाया जाता है तो कमानी में पास-पास स्थित अणुओं के बीच नेट आकर्षण/प्रतिकर्षण से उत्पन्न होता है । और इस नेट आकर्षण/प्रतिकर्षण को अणुओं के आवेशित संघटकों के बीच के वैद्युत बलों (असंतुलित) के योग के रूप में देखा जा सकता है । इसी प्रकार, किसी गैस में दो उदासीन परमाणुओं के बीच का वान्डरवाल बल कोई मूल बल नहीं है बल्कि एक नेट अवशिष्ट बल है जो दो अणुओं के नाभिकों और इलेक्ट्रॉनों के बीच के विभिन्न वैद्युत बलों को जोड़े जाते समय उपस्थित रहता है । आशा के अनुरूप आण्विक आकारों से अधिक अंतराण्विक दूरियों के लिए यह बल प्रायः समाप्त ही हो जाता है क्योंकि उस समय विभिन्न वैद्युत बल लगभग पूरी तरह से निरस्त हो जाते हैं ।

सिद्धांत रूप में, इसका तात्पर्य है कि 'व्युत्पन्न' बल (जैसे कमानी बल, घर्षण, वान्डरवाल बल) प्रकृति के मूल बलों से स्वतंत्र नहीं हैं । यद्यपि इन व्युत्पन्न बलों का मूल अत्यधिक जटिल है । इसलिए, व्यवहार में हम सामान्य रूप से

* अनुभाग 1.4 और 1.5 में कुछ ऐसी धारणाओं का समावेश है जिनको पहली बार पढ़ने पर आपको समझने में कठिनाई हो सकती है । तथापि हम आपको यह परामर्श देते हैं कि आप भौतिकी के उन पहलुओं जिनके विषय में आप उच्चस्तरीय पाठ्यक्रम में गहन अध्ययन करेंगे, के विषय में अध्ययन करके इनके प्रारंभिक ज्ञान का अनुभव प्राप्त करें ।

व्युत्पन्न बलों के नियमों को मूल नियमों से कठोरतापूर्वक प्राप्त करने का प्रयत्न नहीं करते हैं, बल्कि उन्हें प्रयोगों द्वारा अथवा सामान्य सैद्धांतिक चित्रों द्वारा प्राप्त करके संतुष्ट रहते हैं । इस प्रकार प्राप्त आनुभविक नियम (जैसे घर्षण के नियम) सन्निकट होते हैं और इनकी वैधता का क्षेत्र सीमित होता है, लेकिन ये प्रायोगिक व्यवहारों में अत्यंत उपयोगी होते हैं।

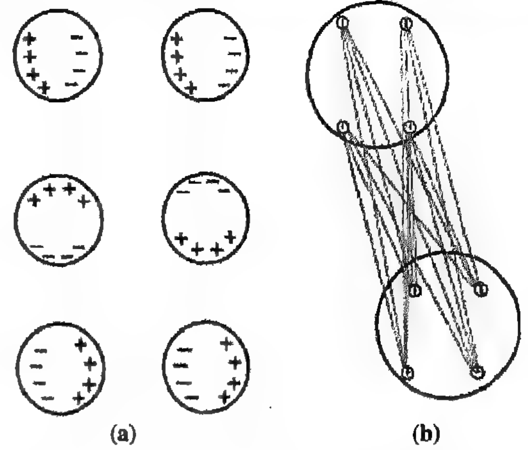
ये मूल बल क्या हैं ? अपनी वर्तमान समझ के अनुसार हम मानते हैं कि प्रकृति में चार मूल बल हैं जिनका यहां संक्षिप्त वर्णन किया गया है।

1.4.1 गुरुत्वाकर्षण बल

गुरुत्वाकर्षण बल दो पिंडों के बीच उनके द्रव्यमानों के कारण पारस्परिक आकर्षण बल है । यह एक सार्वत्रिक बल है । विश्व में स्थित प्रत्येक पिंड दूसरे पिंड के कारण इस बल का अनुभव करता है । उदाहरण के लिए, पृथ्वी पर स्थित सभी पिंड पृथ्वी के कारण गुरुत्व बल का अनुभव करते हैं । न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण नियम के अनुसार यह पारस्परिक आकर्षण बल दोनों पिंडों के द्रव्यमानों के गुणनफल का अनुक्रमानुपाती तथा उनके बीच की दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है । इस प्रकार गुरुत्व का प्रभाव अधिक दूरियों पर यद्यपि घटते परिमाण में, पड़ता है और इसके लिए किसी मध्यवर्ती माध्यम की आवश्यकता नहीं होती । अन्य मूल बलों की तुलना में गुरुत्वीय बल प्रकृति का दुर्बलतम बल है । फिर भी यह विश्व में होने वाली अधिकांश भौतिक परिघटनाओं के लिए उत्तरदायी है, इन कारणों को हम शीघ्र ही जान लेंगे । मुख्य रूप से गुरुत्वीय बल पृथ्वी की चंद्रमा और कृत्रिम उपग्रहों द्वारा परिक्रमा, सूर्य की ग्रहों द्वारा परिक्रमा को और हां, पृथ्वी पर गिरने वाली वस्तुओं की गति को संचालित करता है । यह विश्व में होने वाली वृहत् परिघटनाओं; जैसे– तारों, आकाशगंगाओं और मंदाकिनीय गुच्छों के बनने और विकसित होने में महत्त्वपूर्ण भूमिका का निर्वाह करता है ।

1.4.2 विद्युत्-चुंबकीय बल

विद्युत्-चुंबकीय बल आवेशित कणों के बीच लगने वाला बल है । सहज रूप में, जब आवेश स्थिर होते हैं तो उनके मध्य पारस्परिक बल को कूलॉम के नियम द्वारा व्यक्त करते हैं : विजातीय आवेशों के बीच आकर्षण और सजातीय आवेशों के बीच प्रतिकर्षण; बल का परिमाण 'व्युत्क्रम-वर्ग नियम' का पालन करता है । गतिमान आवेश चुंबकीय प्रभाव उत्पन्न करते हैं और चुंबकीय क्षेत्र गतिमान आवेश पर एक बल उत्पन्न करता है । वैद्युत और चुंबकीय प्रभाव सामान्य रूप से अविभाज्य होते हैं अत: इन्हें विद्युत्-चुंबकीय बल कहा जाता है । गुरुत्वीय बल के समान ही विद्युत्-चुंबकीय बल भी लंबी दूरियों तक कार्यरत रहता है और इसके लिए भी किसी मध्यवर्ती माध्यम की आवश्यकता नहीं होती । गुरुत्व बल की तुलना में यह बल अत्यधिक प्रबल होता है । उदाहरण के लिए एक



चित्र 1.2 दो उदासीन अणुओं के बीच का बल-वान्डरवाल बल, 'व्युत्पन्न' बल का उदाहरण है । यह दोनों अणुओं के आवेशित संघटकों के बीच के मूल वैद्युत बलों के योग से प्राप्त होने वाला अवशिष्ट बल होता है । (a) दोनों अणु एक दूसरे के आवेश वितरण को विकृत कर देते हैं और तात्कालिक द्विध्रुव आघूर्ण विकसित कर देते हैं । (b) आवेशों के विभिन्न युग्मों के मध्य वैद्युत बल से दो विद्युत् द्विध्रुवों के मध्य बल का उत्पन्न होना रेखाओं द्वारा निरूपित किया गया है ।

निश्चित दूरी के लिए दो प्रोटॉनों के बीच का वैद्युत बल उनके बीच के गुरुत्वीय बल का 10^{36} गुना होता है ।

द्रव्य, जैसा कि हम जानते हैं, इलेक्ट्रॉन तथा प्रोटॉन जैसे प्राथमिक आवेशयुक्त संघटनों से युक्त होता है । चूंकि विद्युत्-चुंबकीय बल गुरुत्वीय बल से अधिक प्रबल होता है, यह आण्विक तथा परमाण्विक मापन में सभी परिघटनाओं पर प्रभावशाली होता है (अन्य दो बल, जैसा कि हम आगे चल कर देखेंगे, केवल नाभिकीय मापन पर कार्यरत होते हैं) । इस प्रकार यह केवल विद्युत्-चुंबकीय बल ही है जो अणुओं तथा परमाणुओं की संरचना, रासायनिक अभिक्रियाओं की गतिकी तथा द्रव्यों के यांत्रिक, तापीय और दूसरे गुणों को संचालित करता है । यह स्थूल बलों; जैसे- तनाव, घर्षण, सामान्य बल तथा कमानी बल आदि का आधार है । अंतरआण्विक या अंतरपरमाण्विक बल-वान्डरवाल बल, जैसा कि पहले बताया गया है, एक अवशिष्ट विद्युत्-चुंबकीय बल है ।

संक्षेप में, नाभिकीय परिघटना को छोड़कर, हमारे चारों ओर की दुनिया मूल रूप से विद्युत्-चुंबकीय तथा गुरुत्वीय बलों से संचालित है । फिर भी इन दोनों में गुरुत्वीय बल अधिक व्यापक बल के रूप में दिखाई पड़ता है । गुरुत्व बल मुख्य रूप से गति को पार्थिव तथा खगोलीय स्केल पर ज्ञात करता है । विद्युत्-चुंबकीय बल की तुलना में अत्यधिक दुर्बल यह गुरुत्वीय बल इन प्रभाव-क्षेत्रों में कैसे सफल होता



अल्बर्ट आइंस्टाइन (1879-1955)

सन् 1879 ई. में जर्मनी में उल्म नामक स्थान पर जन्मे अल्बर्ट आइंस्टाइन आज तक के विश्व के भौतिकविदों में सर्वाधिक महान भौतिकविद् के रूप में जाने जाते हैं । उनका विस्मयकारी वैज्ञानिक जीवन उनके सन् 1905 ई. में प्रकाशित तीन क्रांतिकारी शोधपत्रों से आरंभ हुआ । उन्होंने अपने प्रथम शोधपत्र में प्रकाश क्वांटा (अब फोटॉन कहा जाता है) की धारणा को प्रस्तुत किया और प्रकाश-वैद्युत प्रभाव के उस लक्षण की व्याख्या की जिसे विकिरण का चिरप्रतिष्ठित तरंग सिद्धांत नहीं समझा सका । अपने दूसरे शोधपत्र में उन्होंने ब्राउनी गति का सिद्धांत विकसित किया जिसकी कुछ वर्षों बाद प्रयोगात्मक पुष्टि हुई और जिसने द्रव्य के आण्विक चित्रण का विश्वासोत्पादक साक्ष्य उपलब्ध कराया । उनके तृतीय शोधपत्र ने आपेक्षिकता के विशिष्ट सिद्धांत को जन्म दिया जिसने उन्हें उनके जीवन काल में ही पौराणिक बना दिया । अगले दशक में उन्होंने अपने नए सिद्धांत के परिणामों का पूर्वेक्षण किया जिनमें अन्य बातों के साथ-साथ द्रव्यमान-ऊर्जा तुल्यता संबंध उनकी प्रसिद्ध समीकरण $E = mc^2$ से लक्षित हुआ । उन्होंने आपेक्षिकता के व्यापक रूपांतरण (आपेक्षिकता का व्यापक सिद्धांत) की भी रचना की जो गुरुत्वाकर्षण का आधुनिक सिद्धांत है । आइंस्टाइन के कुछ अन्य महत्त्वपूर्ण योगदान हैं : उद्दीपित उत्सर्जन की धारणा जो प्लांक कृष्णिका विकिरण नियम के एक वैकल्पिक व्युत्पन्न में प्रस्तुत की गई है, विश्व का स्थैतिक प्रतिरूप जिसने आधुनिक ब्रह्मांडिकी का आरंभ किया, किसी गैस के स्थूल बोसॉन की क्वांटम-सांख्यिकी, तथा क्वांटम-यांत्रिकी की संस्थापना का आलोचनात्मक विश्लेषण ।

है ? इसका उत्तर मात्र एक तथ्य पर आधारित है कि गुरुत्वीय बल सदैव ही आकर्षी बल होता है जबकि विद्युत्-चुंबकीय बल आकर्षी या प्रतिकर्षी हो सकता है । इसको दूसरे शब्दों में इस प्रकार कहा जा सकता है कि द्रव्यमान केवल एक ही प्रकार का होता है (द्रव्यमान धनात्मक तथा ऋणात्मक नहीं होता है) लेकिन आवेश दो प्रकार का – धनात्मक तथा ऋणात्मक, होता है । इस कारण से ही इसमें अंतर उत्पन्न होता है । उदाहरण के लिए, पत्थर के एक टुकड़े और पृथ्वी के बीच, बल पर विचार कीजिए । पृथ्वी और पत्थर, दोनों अत्यधिक संख्या में आवेशित संघटकों-इलेक्ट्रॉनों और प्रोटॉनों से बने हैं । पत्थर के एक इलेक्ट्रॉन या प्रोटॉन तथा पृथ्वी के एक इलेक्ट्रॉन या प्रोटॉन के बीच का गुरुत्वीय बल उनके बीच के विद्युत्-चुंबकीय बल से अतुलनीय रूप में अत्यधिक कम होता है । जैसे-जैसे आप इन दोनों वस्तुओं (पत्थर तथा पृथ्वी) के कणों के युग्मों पर लगने वाले बलों का योग करते जाते हैं, आकर्षी गुरुत्वीय बल बढ़ता जाता है । दूसरी ओर, विद्युत-चुंबकीय बल एक बड़े आकर्षी बल और उतने ही बड़े प्रतिकर्षी बल का योग होता है जो एक-दूसरे को निरस्त कर देते हैं क्योंकि दोनों वस्तुएं वैद्युतीय रूप से उदासीन हैं और बराबर धनात्मक तथा ऋणात्मक आवेश रखती हैं । गुरुत्वीय बल सदैव आकर्षी होता है और वस्तुओं का आकार (द्रव्यमान) बढ़ जाने से बढ़ता है, विद्युत्-चुंबकीय बल आकर्षी या प्रतिकर्षी हो सकते हैं और उदासीन वस्तुओं के लिए लगभग शून्य हो जाते हैं । यही कारण है कि विश्व में व्यापक स्तर पर होने वाली गति मुख्य रूप से गुरुत्वीय बल द्वारा संचालित होती है ।

यदि हम थोड़ा विचार करें तो हम अपने दैनिक कार्यकलापों में गुरुत्वीय बल की तुलना में विद्युत्-चुंबकीय बल की अत्यधिक शक्ति को स्पष्ट रूप से देख सकते हैं । जब हम अपने हाथ में एक पुस्तक को पकड़ते हैं तो हम अपने हाथ के 'सामान्य बल' द्वारा पुस्तक पर पृथ्वी के अत्यधिक द्रव्यमान के कारण गुरुत्वीय बल को संतुलित कर रहे होते हैं । यह 'सामान्य बल' और कुछ नहीं बल्कि पुस्तक के स्पर्श तल तथा हमारे हाथ के आवेशित संघटकों के बीच का कुल विद्युत्-चुंबकीय बल ही है । यदि विद्युत्-चुंबकीय बल, गुरुत्वीय बल से आंतरिक रूप में इतना सशक्त न होता, तो एक सशक्त व्यक्ति का हाथ भी एक पंख के भार से टुकड़े-टुकड़े हो जाता । वास्तव में, ऐसी दशा में हम स्वयं अपने ही भार से टूट जाते ।

1.4.3 प्रबल नाभिकीय बल

'प्रबल नाभिकीय बल' नाभिक में प्रोटॉनों तथा न्यूट्रॉनों को बांधता है । स्पष्ट है कि आकर्षण बल की अनुपस्थिति में नाभिक अपने प्रोटॉनों के वैद्युत प्रतिकर्षण के कारण अस्थायी होगा । यह आकर्षण बल गुरुत्वीय नहीं हो सकता क्योंकि गुरुत्वीय बल वैद्युत बल की तुलना में नगण्य होता है । अतः एक नया मूल बल अवश्य होना चाहिए । शक्तिशाली नाभिकीय बल सभी मूल बलों में सबसे अधिक प्रबल है, यह विद्युत्-चुंबकीय बल से लगभग 100 गुना प्रबल है । यह आवेश पर निर्भर नहीं करता है और प्रोटॉन-प्रोटॉन, न्यूट्रॉन-न्यूट्रॉन तथा प्रोटॉन-न्यूट्रॉन के बीच समान रूप से कार्य करता है । यद्यपि नाभिकीय आकार के क्रम में अत्यधिक छोटा होता है, यह नाभिक के स्थायित्व के लिए उत्तरदायी होता है और



सत्येन्द्रनाथ बोस (1894-1974)

सत्येन्द्रनाथ बोस सन् 1894 ई. में कोलकाता में जन्मे, भारतीय भौतिकविदों में से एक हैं जिन्होंने बीसवीं शताब्दी में विज्ञान की उन्नति में मौलिक योगदान दिया । बोस अपने शिक्षा काल में आरंभ से अन्त तक एक प्रतिभाशाली विद्यार्थी रहे । उन्होंने सन् 1916 ई. में अपनी जीविका, कोलकाता विश्वविद्यालय में भौतिकी-व्याख्याता के रूप में आरंभ की । पाँच वर्षों के उपरांत उन्होंने ढाका विश्वविद्यालय में पदभार ग्रहण किया । यहां सन् 1924 ई. में अपनी अंतर्दृष्टि से उन्होंने प्लांक-नियम की एक नई व्युत्पत्ति दी जिसमें उन्होंने विकिरणों को फोटॉनों की गैस के रूप में माना और फोटॉन अवस्था को गिनने हेतु नई सांख्यिकीय विधियाँ अपनाईं । उन्होंने इस विषय पर एक शोधपत्र लिखकर आइंस्टाइन को भेजा जिन्होंने तुरंत इसकी सार्थकता को समझा और इसका जर्मनी भाषा में अनुवाद करके, प्रकाशन के लिए भेज दिया । आइंस्टाइन ने उसी विधि को अणु गैस के लिए अपनाया ।

बोस के कार्य में मूल-संकल्पनात्मक अवयव के अनुसार कणों को अविभेद्य माना गया जो चिरप्रतिष्ठित मैक्सवैल-बोल्ट्ज़मान सांख्यिकी के आधार से आमूल रूप से अलग था । शीघ्र ही यह माना गया कि नई बोस-आइंस्टाइन सांख्यिकी केवल पूर्णांक प्रचक्रण वाले कणों पर ही लागू होती है और अर्ध-पूर्णांक प्रचक्रण वाले कणों के लिए जो पाउली अपवर्जन सिद्धांत को संतुष्ट करते हैं, के लिए एक नई क्वांटम सांख्यिकी (फर्मी-डिरैक सांख्यिकी) की आवश्यकता है । बोस के सम्मान में पूर्णांक प्रचक्रण वाले कणों को बोसॉन के नाम से जाना जाता है ।

बोस-आइंस्टाइन सांख्यिकी का एक महत्त्वपूर्ण निष्कर्ष यह है कि किसी निश्चित ताप से नीचे अणुओं की किसी गैस का प्रावस्था-संक्रमण किसी ऐसी अवस्था में होगा जिसमें अधिकांश परमाणु उसी न्यूनतम ऊर्जा अवस्था में रहेंगे । बोस की पथप्रदर्शक धारणा जिसे आइंस्टाइन ने आगे विकसित किया, के लगभग सत्तर वर्षों के पश्चात् उसकी द्रव्य की नई अवस्था के प्रेक्षणों की प्रभावशाली ढंग से पुष्टि की गई (मुख्य आवरण का भीतरी पृष्ठ देखें ।)

न्यूक्लिऑनों (प्रोटॉनों तथा न्यूट्रॉनों) के उच्च ऊर्जा संघट्टों की परिघटना को संचालित करता है । यह ध्यान रखना चाहिए कि इलेक्ट्रॉन इस बल का अनुभव नहीं करते हैं ।*

हाल ही में विकसित नए परिणामों से ज्ञात हुआ है कि उपरोक्त वर्णित न्यूक्लिऑनों के बीच का यह प्रबल नाभिकीय बल प्रकृति का मूल बल नहीं है । अब यह ज्ञान हो गया है कि प्रोटॉन तथा न्यूट्रॉन 'क्वार्क्स' नामक और अधिक प्राथमिक संघटकों से बने हैं । अब क्वार्क-क्वार्क बल को प्रकृति का मूल बल माना जाता है और इससे न्यूक्लिऑन-न्यूक्लिऑन बल को इसी प्रकार ज्ञात किया जाता है जैसे कि वान्डरवाल बल को मूल विद्युत्-चुंबकीय बल से ज्ञात किया जाता है । आप इन नवीन आश्चर्यजनक खोजों के संबंध में और अधिक उन्नत पाठ्यक्रम के अंतर्गत अध्ययन करेंगे ।

1.4.4 दुर्बल नाभिकीय बल

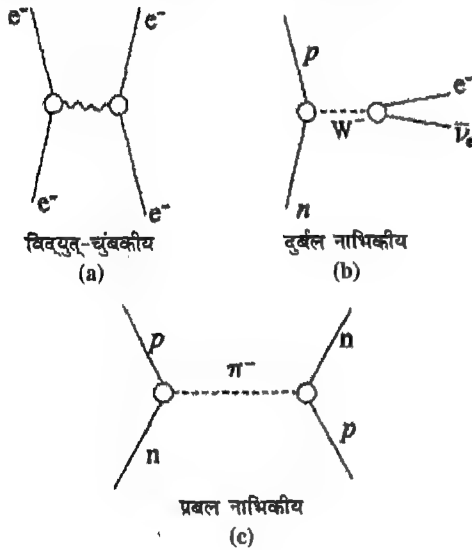
'दुर्बल नाभिकीय बल' केवल कुछ नाभिकीय प्रक्रियाओं, जैसे नाभिक के β-क्षय में दिखाई देता है । β-क्षय में नाभिक एक इलेक्ट्रॉन और एक अनावेशित कण, जिसे न्यूट्रिनो कहते हैं, को उत्सर्जित करता है ।** दुर्बल नाभिकीय बल इतना दुर्बल नहीं होता है जितना कि गुरुत्वीय बल होता है परंतु यह प्रबल नाभिकीय बल तथा विद्युत्-चुंबकीय बलों की तुलना में अधिक दुर्बल होता है । इस बात का ज्ञान इस तथ्य से होता है कि दुर्बल नाभिकीय बल के कारण होने वाले प्राथमिक कण का क्षय (उदाहरण के लिए, एक पाइऑन का एक म्यूऑन और एक न्यूट्रिनो में होने वाला क्षय) शक्तिशाली अथवा विद्युत्-चुंबकीय बलों द्वारा होने वाले क्षय की तुलना में पर्याप्त रूप से धीमा होता है । न्यूट्रिनो (और एन्टी-न्यूट्रिनो) केवल दुर्बल अन्योन्यक्रिया (गुरुत्वीय बल के अतिरिक्त) का अनुभव करते हैं । अतः इनसे संबद्ध कोई भी प्रक्रिया दुर्बल नाभिकीय बल द्वारा संचालित होती है । दुर्बल नाभिकीय बल का क्षेत्र अत्यधिक कम, 10^{-15}m की कोटि का होता है ।

वह आधारभूत प्रक्रिया क्या है जो इन बलों को उत्पन्न करती है ? आधुनिक भौतिकी में प्राथमिक कणों के मध्य के सभी बल तथा अन्योन्यक्रियाएं कुछ कणों के विनिमय से

* सामान्य रूप से प्राथमिक कणों को विभिन्न वर्गों, जैसे बेरयॉन्स, मेसॉन्स तथा लेप्टॉन्स में रखा गया है । न्यूक्लिऑन्स (प्रोटॉनों और न्यूट्रॉनों) और उनके उच्च द्रव्यमान वाले प्रतिरूप बेरयॉन्स वर्ग से संबंधित हैं । पाइऑन्स, काओन्स आदि मेसॉन्स हैं । इलेक्ट्रॉन, न्यूट्रॉन, उनके उच्च द्रव्यमान वाले प्रतिरूप (जैसे म्यूऑन, टाउ आदि) लैप्टॉन्स वर्ग से संबंधित हैं । लैप्टॉन्स शक्तिशाली नाभिकीय बल का अनुभव नहीं करते हैं । बेरयॉन्स और मेसॉन्स इसका अनुभव करते हैं और सम्मिलित रूप से हैड्रोन्स कहलाते हैं ।

**अधिक शुद्ध रूप में β^--क्षय एक इलेक्ट्रॉन और एक एन्टी-न्यूट्रिनो के उत्सर्जन से संबंधित है । β^+-क्षय एक पॉजिट्रॉन (एन्टी-इलेक्ट्रॉन) और एक न्यूट्रिनो के उत्सर्जन से संबंधित है ।

उत्पन्न हुए माने जाते हैं । यह दृश्य कुछ-कुछ एक-दूसरे से दूर खड़े दो व्यक्तियों के बीच हो रही अन्योन्यक्रिया जैसा है जिसमें व्यक्ति A द्वारा फेंकी गई गेंद को व्यक्ति B द्वारा लपका जा रहा है । संवेग संरक्षण द्वारा, जब गेंद फेंकी जाती है तो फेंकने के तुरंत पश्चात् A को झटका (प्रतिक्षेप) लगता है और उसी प्रकार गेंद को लपकते समय B भी उसी परिमाण का झटका अनुभव करता है । बल संवेग में परिवर्तन करता है अतः यह A और B के बीच के बल का एक सरल प्रतिरूप है ।



चित्र 1.3 बल कणों के विनिमय से उत्पन्न होते हैं । (a) दो इलेक्ट्रॉनों के मध्य लगने वाले विद्युत्-चुंबकीय बल का माध्यम फोटॉन (γ) है । (b) दुर्बल नाभिकीय बल द्वारा संचालित न्यूट्रॉन के β–क्षय का माध्यम आवेशित वेक्टर बोसॉन (W^-) है । (c) प्रबल नाभिकीय बल द्वारा शासित $np \rightarrow pn$ प्रकीर्णन में ऋणात्मक आवेशित पाइऑन (π^-) का विनिमय होता है ।

सारणी 1.3 में प्रकृति के चार मूल बलों की कुछ प्रमुख विशेषताओं का सार दिया गया है ।

प्रत्येक मूल बल को अपने अभिलाक्षणिक कण (कणों) जिसे बहुधा उस बल का क्वांटा भी कहते हैं, के विनिमय से उत्पन्न हुआ माना जाता है । विद्युत्-चुंबकीय बल आवेशित कणों के बीच फोटॉनों के विनिमय से उत्पन्न होता है; प्रबल नाभिकीय बल मेसॉन्स* के विनिमय से उत्पन्न होता है और दुर्बल नाभिकीय अन्योन्यक्रिया बोसॉन्स ($W^{\pm}$ और Z) कहे जाने वाले वेक्टर द्वारा व्यक्त होते हैं । इसी प्रकार, गुरुत्वीय बल को अभी तक खोजे न जा सके 'ग्रेवीटॉन' नामक कण के विनिमय से उत्पन्न हुआ माना जाता है । इन मनमोहक धारणाओं का विस्तृत अध्ययन मूल कण 'भौतिकी' की किसी अच्छी पुस्तक से किया जा सकता है ।

1.4.5 बलों के एकीकरण की ओर

हमने अनुभाग 1.1 में टिप्पणी की थी कि एकीकरण भौतिकी की आधारभूत खोज है । भौतिकी में हो रही महत्त्वपूर्ण प्रगति प्रायः विभिन्न सिद्धांतों और प्रभाव क्षेत्रों के एकीकरण के लिए उत्तरदायी होती है । न्यूटन ने पार्थिव और खगोलीय प्रभाव क्षेत्रों को गुरुत्वाकर्षण के सामान्य सिद्धांत के अंतर्गत एकीकृत किया है । ऑर्स्टेड तथा फैराडे की प्रायोगिक खोजों ने स्पष्ट किया है कि वैद्युतीय और चुंबकीय परिघटनाएं सामान्य रूप से अपृथक्करणीय होती हैं । मैक्सवेल ने विद्युत्-चुंबकत्व तथा प्रकाशिकी को, इस खोज के साथ कि प्रकाश एक विद्युत्-चुंबकीय तरंग है, एकीकृत कर दिया है । आइंस्टाइन ने आपेक्षिकता संबंधी अपने विशेष सिद्धांत में स्पष्ट किया है कि दिक् तथा काल संबंधी अवधारणाएं अन्तः संबंधित होती हैं, और यह भी कि द्रव्यमान और ऊर्जा तुल्य हैं । उनके आपेक्षिकता के सामान्य नियम ने गुरुत्वाकर्षण को अंतरिक्ष ज्यामिति से संबद्ध बताया है । इसके बाद उन्होंने गुरुत्व तथा

सारणी 1.3 प्रकृति के मूल बल

बल का नाम	आपेक्षित शक्ति	परास	जिनके बीच लगता है
गुरुत्वीय बल	10^{-38}	अनंत	विश्व में स्थित सभी पिण्ड
दुर्बल नाभिकीय बल	10^{-13}	अत्यधिक कम, नाभिकीय आकार ($\sim 10^{-15}$m) में	मूल कण
विद्युत्-चुंबकीय बल	10^{-2}	अनंत	आवेशित कण
प्रबल नाभिकीय बल	1	अत्यधिक कम, नाभिकीय आकार ($\sim 10^{-15}$m) में	न्यूक्लिऑन

* क्वार्क-क्वार्क बल, जिसे अब एक मूल बल माना जाता है, 'ग्लूऑन्स' नामक कणों के विनिमय से उत्पन्न होता है ।

सारणी 1.4 प्रकृति के विभिन्न बलों/प्रभाव क्षेत्रों के एकीकरण में प्रगति

भौतिकविद	वर्ष	एकीकरण संबंधी उपलब्धियां
आइज़क न्यूटन	1687	गति के नियम तथा गुरुत्वाकर्षण-नियम, पार्थिव तथा खगोलीय पिण्डों पर समान रूप से लागू होते हैं; पार्थिव तथा खगोलीय यान्त्रिकी को एकीकृत किया ।
हेंस क्रिश्चियन ऑर्स्टेड	1820	वैद्युतीय और चुंबकीय परिघटनाएं एकीकृत प्रभाव-क्षेत्र के
माइकल फैराडे	1830	अपृथक्करणीय पहलू हैं : विद्युत्-चुंबकत्व ।
जैम्स क्लार्क मैक्सवेल	1873	विद्युत्-चुंबकत्व तथा प्रकाशिकी को एकीकृत किया, स्पष्ट किया कि प्रकाश एक विद्युत्-चुंबकीय तरंग है।
शैल्डन ग्लाशोव, अब्दुस सलाम, स्टीवन वीनबर्ग	1979	स्पष्ट किया कि 'दुर्बल' नाभिकीय बल तथा विद्युत्-चुंबकीय बल को एक ही विद्युत्-दुर्बल बल के विभिन्न रूपों में देखा जा सकता है ।
कार्लो रूबिया साइमन वान्डर मिअर	1984	विद्युत्-दुर्बल बल के सिद्धांत के पूर्वानुमानों को प्रयोग द्वारा सिद्ध किया।

विद्युत्-चुंबकत्व को भी एकीकृत करने का प्रयत्न किया लेकिन अपने इस प्रयत्न में वे सफल न हो सके । लेकिन इस प्रयत्न ने भौतिकविदों को बलों के एकीकरण के क्षेत्र में उत्साहपूर्वक आगे बढ़ने के लिए हतोत्साहित नहीं किया।

पिछले कुछ दशकों में इस क्षेत्र में पर्याप्त प्रगति हुई है। विद्युत्-चुंबकीय तथा दुर्बल नाभिकीय बल अब एकीकृत कर दिए गए हैं और इन्हें एकल 'विद्युत्-दुर्बल' बल के रूपों में देखा जाता है । वास्तव में इस एकीकरण का क्या अर्थ है, यहां यह बता पाना कठिन है । विद्युत्-दुर्बल तथा शक्तिशाली (क्वार्क-क्वार्क) बल और यहां तक कि गुरुत्वाकर्षण बल को भी अन्य शेष बचे मूल बलों से एकीकृत करने के प्रयत्न किए गए हैं और अब भी किए जा रहे हैं । इस प्रकार की अनेक धारणाएं अब भी परिकल्पित और अनिर्णायक बनी हुई हैं । सारणी 1.4 के अंतर्गत प्रकृति के इन बलों के एकीकरण की दिशा में प्राप्त हुई प्रगति को सार रूप में प्रस्तुत किया गया है।

1.5 संरक्षण नियम

विभिन्न बलों द्वारा संचालित किसी भी भौतिक संबंध परिघटना में कई राशियां समय के साथ बदल सकती हैं । इस संबंध में एक महत्त्वपूर्ण तथ्य यह भी है कि विशिष्ट भौतिक राशियां समय के साथ अचर (नियत) रहती हैं। ये प्रकृति की संरक्षित राशियां हैं।

किसी संरक्षित* बल के अधीन गति के लिए कुल यांत्रिक ऊर्जा अर्थात् पिंड की गतिज और स्थितिज ऊर्जा का योग नियत रहता है । गुरुत्व बल के अधीन किसी पिंड का स्वतंत्रतापूर्वक नीचे गिरना इसका सुपरिचित उदाहरण है । पिंड की गतिज ऊर्जा तथा स्थितिज ऊर्जा, दोनों समय के साथ-साथ बदलती हैं लेकिन उनका योग नियत रहता है । यदि किसी पिंड को विरामावस्था से छोड़ा जाता है तो उसकी प्रारंभिक स्थितिज ऊर्जा पिंड के भूमि पर टकराने से ठीक पहले पूर्ण रूप से गतिज ऊर्जा में परिवर्तित हो जाती है । संरक्षी बल के लिए प्रतिबंधित इस नियम और किसी वियुक्त निकाय के ऊर्जा संरक्षण संबंधी सामान्य नियम (जो कि ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम का आधार है) में भ्रम उत्पन्न नहीं होना चाहिए। ऊर्जा संरक्षण का सामान्य नियम सभी बलों तथा ऊर्जा के विभिन्न प्रकारों में होने वाले किसी भी रूपांतरण के लिए सत्य है । गिरते पिंड के उदाहरण में यदि आप गिरते समय पिंड पर लगने वाले वायु के प्रतिरोध के प्रभाव को सम्मिलित कर लें और पिंड के भूमि पर टकराने और स्थिर होने की स्थिति को देखें तो आप पाएंगे कि स्पष्ट रूप से कुल यांत्रिक ऊर्जा संरक्षित नहीं हुई है। ऊर्जा संरक्षण का सामान्य नियम अब भी लागू होता है। पिंड की प्रारंभिक स्थितिज ऊर्जा, ऊर्जा के अन्य रूपों, जैसे ऊष्मा और ध्वनि, में बदल जाती है । वियुक्त निकाय (पिंड तथा उसके आस-पास का वातावरण) की कुल ऊर्जा नियत रहती है।

ऊर्जा-संरक्षण के नियम को प्रकृति के सूक्ष्म तथा स्थूल सभी प्रकार के प्रभाव-क्षेत्रों के लिए वैध माना गया है । इसे नैत्यिक रूप से परमाण्विक, नाभिकीय और मूल कण संबंधी प्रक्रमों में प्रयोग किया जाता है। दूसरी ओर, विश्व में हर समय अनेक प्रकार की उग्र परिघटनाएं घटती रहती हैं। फिर भी विश्व (सबसे अधिक आदर्श संभावित वियुक्त निकाय) की कुल ऊर्जा को अपरिवर्तनीय माना जाता है ।

आइंस्टाइन के आपेक्षिकता के सिद्धांत के आगमन से पूर्व द्रव्यमान-संरक्षण नियम को प्रकृति का एक दूसरा मूल संरक्षण नियम माना जाता था क्योंकि द्रव्य को अविनाशी माना जाता था। यह उदाहरण के लिए रासायनिक अभिक्रियाओं के

* किसी संरक्षी बल के अर्थ का वर्णन अध्याय 6 में किया गया है ।

विश्लेषण में प्रयोग किया गया एक महत्त्वपूर्ण सिद्धांत था और अब भी है। रासायनिक अभिक्रिया मूल रूप से परमाणुओं की विभिन्न अणुओं में की गई पुनर्व्यवस्था होती है। यदि अभिक्रियाशील अणुओं की कुल बंधन ऊर्जा उत्पादित अणुओं की कुल बंधन ऊर्जा से कम होती है तो यह अंतर ऊष्मा के रूप में दिखाई देता है और अभिक्रिया ऊष्माक्षेपी होती है। इसके विपरीत यदि अभिक्रियाशील अणुओं की कुल बंधन ऊर्जा उत्पादित अणुओं की कुल बंधन ऊर्जा से अधिक होती है तो अभिक्रिया (ऊष्माशोषी) में ऊष्मा का अवशोषण होता है। फिर भी, चूंकि परमाणु नष्ट न होकर मात्र पुनर्व्यवस्थित ही होते हैं, रासायनिक अभिक्रिया में अभिकारकों का कुल द्रव्यमान उत्पादों के कुल द्रव्यमान के समान ही होता है।

एक सामान्य नाभिकीय अभिक्रिया अनेक प्रकार से मिलती-जुलती होती है। यह विभिन्न नाभिकीय वर्गों में प्रोटॉनों तथा न्यूट्रॉनों की पुनर्व्यवस्था है। न्यूट्रॉनों तथा प्रोट्रॉनों की कुल संख्या अभिकारकों और उत्पादों के लिए अलग-अलग बराबर होती है। अभिकारकों तथा उत्पादों की नाभिकीय बंधन ऊर्जा का अंतर ऊर्जा (ऊष्मा) के निष्कासन के रूप में दिखाई देता है। फिर भी, हम पाते हैं कि अभिकारक नाभिकों का कुल द्रव्यमान उत्पादित नाभिकों के कुल द्रव्यमान के ठीक-ठीक बराबर नहीं होता है। इसमें थोड़ा-सा अंतर होता है, जिसे द्रव्यमान-क्षति कहा जाता है। द्रव्यमान संरक्षित क्यों नहीं रहा जबकि कोई भी प्रोटॉन या न्यूट्रॉन नष्ट नहीं हुआ? इसका उत्तर आइंस्टाइन के आपेक्षिकता सिद्धांत के परिणाम 'द्रव्यमान-ऊर्जा तुल्यता' में निहित है। इस तुल्यता के अनुसार एक बद्ध निकाय, जैसे नाभिक का द्रव्यमान इसके संघटकों (प्रोटॉनों तथा न्यूट्रॉनों) के द्रव्यमानों के योग के ठीक-ठीक बराबर नहीं होता है। यह कुछ कम (बंधन ऊर्जा को प्रकाश की चाल के वर्ग से भाग देने पर प्राप्त भागफल जितना) होता है।

एक बद्ध निकाय का द्रव्यमान = संघटकों के द्रव्यमानों का योग $- B.E./c^2$

जहां $B.E.$ - बंधन ऊर्जा तथा c प्रकाश की चाल को निरूपित करता है।

अब चूंकि किसी अभिक्रिया में अभिकारकों और उत्पादों की कुल बंधन ऊर्जाएं भिन्न-भिन्न हैं। अतः पूर्ववर्ती संबंध स्पष्टतया दर्शाता है कि अभिकारकों का कुल द्रव्यमान, उत्पादों के कुल द्रव्यमान के ठीक-ठीक बराबर नहीं होगा। किसी अभिक्रिया में थोड़ी-सी द्रव्यमान क्षति Δm (अभिकारकों का द्रव्यमान - उत्पादों का द्रव्यमान) ऊर्जा Q के रूप में मुक्त होती है, जहां ऊर्जा $Q = \Delta m\, c^2$ (यदि Δm ऋणात्मक है, तो ऊर्जा अवशोषित होती है।)

संक्षिप्त करने के लिए, किसी नाभिकीय अभिक्रिया में मुक्त ऊर्जा (Q) की हम दो प्रकार से व्याख्या कर सकते हैं। Q उत्पादों और अभिकारकों की कुल बंधन ऊर्जा का अंतर है [Q = उत्पादों की बंधन ऊर्जा - अभिकारकों की बंधन ऊर्जा (अभिकारकों की)]। दूसरी ओर Q द्रव्यमान क्षय के तुल्य ऊर्जा है : $Q = \Delta m\, c^2$। ऊपर दिए गए संबंध के अनुसार दोनों ही प्रकार पूर्णतया एक दूसरे के तुल्य हैं। यह विश्लेषण किसी भी रासायनिक अभिक्रिया के लिए भी समान रूप से सत्य है। इस प्रकरण में यद्यपि Δm आंकिक रूप से इतना छोटा है कि उपेक्षणीय है। यही कारण है कि किसी रासायनिक अभिक्रिया में द्रव्यमान-संरक्षण उच्च कोटि के सन्निकटन तक वैध है।

द्रव्यमान-ऊर्जा तुल्यता का एक विस्मयकारी उदाहरण वह प्रक्रिया है जिसमें कोई इलेक्ट्रॉन जब पॉजिट्रॉन से संघट्ट करता है और दोनों विलोपित होकर दो फोटॉन देते हैं। इस प्रक्रिया में इलेक्ट्रॉन और पॉजिट्रॉन का कुल द्रव्यमान फोटॉनों की ऊर्जा में परिवर्तित हो जाता है। क्योंकि इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान m_0 ऊर्जा $m_0 c^2$ के तुल्य है, अतः इस प्रक्रिया में द्रव्यमान ही नहीं अपितु ऊर्जा भी संरक्षित रहती है। संक्षेप में द्रव्यमान-संरक्षण का नियम* भौतिकी के मूल संरक्षण नियमों में से एक नहीं समझा जाता है। द्रव्यमान केवल ऊर्जा का एक रूप है जो किसी अन्य रूप जैसे गति की ऊर्जा या विकिरण आदि में रूपांतरित किया जा सकता है। किसी वियुक्त निकाय की कुल ऊर्जा संरक्षित रहती है।

ऊर्जा एक अदिश राशि है। परंतु सभी संरक्षित राशियां आवश्यक रूप से अदिश नहीं होती हैं। किसी वियुक्त निकाय के कुल रैखिक संवेग एवं कुल कोणीय संवेग दोनों सदिश भी संरक्षित राशियां हैं। इन नियमों को यांत्रिकी में न्यूटन के गति के नियमों से प्राप्त किया जा सकता है परंतु उनकी वैधता यांत्रिकी के क्षेत्र से परे है। वे सभी प्रभाव क्षेत्रों यहां तक कि जहां न्यूटन के नियम तर्कसंगत नहीं हैं, वहां भी प्रकृति के मूल संरक्षण नियमों में से हैं।

अब तक हमने गति, अभिक्रिया आदि से संबंधित संरक्षित राशियों पर विचार किया है। परंतु प्रकृति में बहुत-सी अन्य संरक्षित राशियां हैं जो गति से संबंधित नहीं हैं। किसी वियुक्त

---

* हम यहां बात कर रहे हैं कि किसी पिण्ड का 'विराम द्रव्यमान' क्या है तथा यह उसके 'गतिमान द्रव्यमान' से किस तरह भिन्न है। किसी पिण्ड का गतिमान द्रव्यमान उस पिण्ड की कुल ऊर्जा को प्रकाश की चाल के वर्ग से विभाजित करने पर प्राप्त होता है।

निकाय के विद्युत् आवेश का संरक्षण भी प्रकृति का मूल नियम है । आवेश उत्पन्न या नष्ट नहीं किया जा सकता है, इसका केवल स्थानांतरण या विनिमय किया जा सकता है । जब किसी कांच की छड़ को रेशम से रगड़ते हैं तो कांच की छड़ धनावेशित हो जाती है । आवेश-संरक्षण के नियम से स्पष्ट होता है कि रेशम भी परिमाण में उतना ही ऋणात्मक आवेश प्राप्त कर लेता है । जब हम उच्च-ऊर्जा मूल कण प्रक्रिया के परिमण्डल में जाते हैं तो कई नए संरक्षण नियम सामने आते हैं । इन अतिरिक्त संरक्षण नियमों के आह्वान की आवश्यकता का कारण यह है कि आवेश-संरक्षण के नियम द्वारा स्वीकृत कई प्रक्रियाएं कभी घटी ही नहीं हैं । उदाहरणार्थ, प्रोटॉन का पॉज़िट्रान और फोटॉन में क्षय ($p \rightarrow e^{+} + \gamma$) कभी नहीं होता है यद्यपि आवेश-संरक्षण नियम द्वारा यह स्वीकृत है । इससे स्पष्ट है कि किसी अन्य राशि या गुण का संरक्षण क्षय को वर्जित करता है । इस प्रकार के कई सुव्यवस्थित विश्लेषण से भौतिकविद् गुणों के संरक्षण नियमों तक पहुंचे हैं जिन्हें बैरिऑन संख्या, लेप्टॉन संख्या इत्यादि कहते हैं । कुछ संरक्षण नियम एक प्रकार के बलों के लिए सत्य हैं अन्य के लिए नहीं । उदाहरणार्थ, एक गुण 'समता' प्रबल एवं विद्युत्-चुंबकीय अन्योन्यक्रियाओं द्वारा संरक्षित है परंतु दुर्बल अन्योन्यक्रियाओं द्वारा नहीं । एक अन्य गुण 'विचित्रता' भी केवल प्रबल बलों द्वारा संरक्षित है दुर्बल बलों द्वारा नहीं । आप इन रोचक विषयों का गहन अध्ययन मूलकण भौतिकी की किसी अच्छी पुस्तक से कर सकते हैं ।

इसके अतिरिक्त इनकी अत्यधिक सरलता एवं व्यापकता के कारण प्रकृति संरक्षण के नियम व्यवहार में बहुत लाभदायक हैं । ऐसा प्रायः होता है कि किसी जटिल समस्या जिसमें विभिन्न कण और बल सम्मिलित हों, की पूर्ण गतिकी को हम हल नहीं कर सकते हैं परंतु संरक्षण-नियम ऐसी स्थितियों में भी उपयोगी परिणाम उपलब्ध कराते हैं । उदाहरणार्थ, ऐसा हो सकता है कि किन्हीं दो मोटरों के संघट्ट के दौरान लगने वाले जटिल बलों का हमें ज्ञान न हो परंतु संवेग-संरक्षण के नियम, बाह्य-पथ द्वारा जटिलताओं को दूर करके हमें संघट्ट के संभव परिणामों का पूर्वानुमान या वर्जन करने योग्य बनाते हैं । नाभिकीय और मूलकण परिघटनाओं में भी संरक्षण नियम विश्लेषण के उपयोगी साधन हैं । वास्तव में β-क्षय में ऊर्जा या संवेग-संरक्षण नियमों का प्रयोग करके वुल्फगेन्ग पाउली (1900-1958) ने सन् 1931 ई. में β-क्षय में इलेक्ट्रॉन के साथ निकलने वाले एक नए कण (जो अब न्यूट्रिनो कहलाता है) के अस्तित्व का सही रूप से पूर्वानुमान लगाया ।

संरक्षण नियमों का प्रकृति की सममितियों के साथ गहरे संबंध की खोज आप भौतिकी के अग्रवर्ती पाठ्यक्रम में करेंगे । उदाहरणार्थ, इसका एक महत्वपूर्ण प्रेक्षण है कि प्रकृति के नियम समय के साथ अपरिवर्तनीय हैं । यदि आप आज कोई प्रयोग अपनी प्रयोगशाला में करते हैं और उसी प्रयोग को एक वर्ष बाद दोहराते हैं (समरूप स्थितियों में उन्हीं पिण्डों पर), तो आप यह पाएंगे कि परिणाम वही आएंगे । इससे स्पष्ट होता है कि समय के साथ स्थानांतरण (अर्थात् विस्थापन) के सापेक्ष प्रकृति की सममिति, ऊर्जा-संरक्षण के नियम के तुल्य है । उसी प्रकार, दिक्स्थान समांग है और विश्व में कोई वरीय स्थान (स्वतः) नहीं है अर्थात् प्रकृति के नियम विश्व में प्रत्येक स्थान पर समान हैं (सावधान : असमान स्थितियों में भिन्न दशाएं होने के कारण परिघटनाएं स्थान परिवर्तन के साथ भिन्न हो सकती हैं) । उदाहरणार्थ, चंद्रमा पर गुरुत्वीय त्वरण का मान पृथ्वी पर गुरुत्वीय त्वरण के मान का 1/6 भाग है परंतु **गुरुत्वाकर्षण-नियम** चंद्रमा और पृथ्वी दोनों के लिए सदृश है । दिक्स्थान में स्थानांतरण के सापेक्ष प्रकृति के नियमों की सममिति से रैखिक संवेग संरक्षण नियम प्राप्त होता है । इसी प्रकार दिक्स्थान की समदैशिकता (दिक्स्थान में स्वतः वरीयता प्राप्त कोई दिशा नहीं) कोणीय संवेग-संरक्षण के नियम का आधार है ।* आवेश के संरक्षण-नियमों एवं मूलकणों के अन्य गुणों को कुछ अमूर्त सममितियों से भी संबद्ध कर सकते हैं । दिक्काल की सममितियां और अन्य अमूर्त सममितियां प्रकृति में मूल बलों के आधुनिक सिद्धांतों में मुख्य भूमिका निभाती हैं ।

सारांश

1. भौतिकी में हम प्रकृति के मूल नियमों और उनकी विभिन्न परिघटनाओं में अभिव्यक्ति का अध्ययन करते हैं । भौतिकी के मूल नियम सार्वत्रिक हैं और व्यापक रूप से विभिन्न संदर्भों में और दशाओं में लागू होते हैं ।
2. भौतिकी का क्षेत्र विस्तृत है जिसमें भौतिक राशियों के परिमाण की बहुत बड़ी परास फैली है ।
3. भौतिकी एवं प्रौद्योगिकी एक दूसरे से जुड़े हुए हैं । कभी प्रौद्योगिकी नई भौतिकी को जन्म देती है और कभी भौतिकी नई प्रौद्योगिकी को जन्म देती है । दोनों का समाज पर सीधा प्रभाव है ।

* अध्याय 7 देखिए ।

4. सूक्ष्म एवं स्थूल जगत की नानाविध परिघटनाओं के संचालन हेतु प्रकृति में चार मूल बल हैं अर्थात 'गुरुत्वाकर्षण बल', 'विद्युत्-चुंबकीय बल', 'प्रबल नाभिकीय बल' और 'दुर्बल नाभिकीय बल' । भौतिकविदों को भौतिकी में प्रकृति के इन विभिन्न बलों के एकीकरण की मूल तलाश है ।
5. किसी प्रक्रम में जो भौतिक राशियां अपरिवर्तित रहती हैं, संरक्षित राशियां कहलाती हैं । प्रकृति में सामान्य संरक्षण नियमों में (a) द्रव्यमान (b) ऊर्जा (c) संवेग (d) कोणीय संवेग (e) आवेश (f) समानता आदि संरक्षण के नियम भी सम्मिलित हैं । इनमें से कुछ संरक्षण नियम किसी एक मूल बल के लिए सत्य हैं लेकिन दूसरे के लिए नहीं ।
6. संरक्षण नियमों का प्रकृति में सममितियों से गहरा संबंध है । प्रकृति में मूल बलों के आधुनिक सिद्धांत मे दिक्काल की सममिति और अन्य प्रकार की सममितियों की मुख्य भूमिका है ।

अभ्यास

छात्रों के लिए नोट

इस अध्याय में अभ्यास के लिए दिए गए प्रश्नों का लक्ष्य आपको विज्ञान, प्रौद्योगिकी एवं समाज से संबंधित समस्याओं से अवगत कराना एवं उनके विषय में सोचने और अपने विचारों का सूत्रण करने के लिए प्रोत्साहित करना है । यहां दिए गए प्रश्नों के सुस्पष्ट 'लक्ष्यात्मक' उत्तर न होने की भी संभावना है ।

शिक्षकों के लिए नोट

यहां दिए गए प्रश्न किसी भी औपचारिक परीक्षा के लिए नहीं हैं ।

1.1 विज्ञान की प्रकृति के विषय में सबसे गंभीर कथनों में से कुछ कथन महान वैज्ञानिक अल्बर्ट आइंस्टाइन ने कहे हैं । आप क्या सोचते हैं कि आइंस्टाइन का क्या तात्पर्य था जब उन्होंने कहा : ''विश्व के बारे में सबसे नासमझी की बात यह है कि इसे समझा जा सकता है ।''

1.2 ''हर महान भौतिक सिद्धांत अनधिकृत मत से या कही सुनी बात से आरंभ होता है और अंत में यह धर्मसिद्धांत बन जाता है ।'' विज्ञान के इतिहास से इस तीक्ष्ण टिप्पणी की वैधता के लिए कुछ उदाहरण दीजिए ।

1.3 ''संभाव्यता की कला का नाम राजनीति है'' इसी प्रकार ''समाधेयता की कला का नाम विज्ञान है'' । विज्ञान की प्रकृति व व्यवहार पर इस सुंदर सूक्ति की व्याख्या कीजिए ।

1.4 यद्यपि भारत में विज्ञान तथा प्रौद्योगिकी का आधार काफी बड़ा है और यह तेजी के साथ बढ़ रहा है, फिर भी इसे विज्ञान के क्षेत्र में विश्व नेता बनने की संभावना को साकार करने के लिए काफी दूरी तय करनी है, कुछ महत्त्वपूर्ण कारण बताइए जो आपके विचार में भारत में विज्ञान की प्रगति में बाधक रहे हैं ।

1.5 किसी भी भौतिकविद् ने कभी भी परमाणु को नहीं ''देखा'', फिर भी सभी भौतिकविद् मानते हैं कि परमाणुओं का अस्तित्व है । कोई बुद्धिमान या अंधविश्वासी व्यक्ति भी इसी बात को तर्क देते हुए कहता है कि भूत-प्रेत का अस्तित्व है यद्यपि किसी ने उसे नहीं ''देखा'' है । आप उसके तर्क का खंडन किस प्रकार करेंगे ?

1.6 जापान के किसी विशेष समुद्रतटीय क्षेत्र में पाए जाने वाले केकड़े के कवच ज्यादातर किसी समुरई के किंवदंती चेहरे से मिलते जुलते हैं । इस प्रेक्षित तथ्य की दो व्याख्याएं नीचे दी गई हैं । इन दोनों में से आपको कौन-सी वैज्ञानिक व्याख्या लगती है ?

(i) कई शताब्दियों पहले किसी भयानक समुद्री दुर्घटना में युवा समुरई डूब गया । उसकी बहादुरी की प्रशंसा में प्रकृति ने अपने रहस्यमयी ढंग से इस क्षेत्र में केकड़ों के कवचों पर उसका चेहरा अंकित करके उसे अमर कर दिया ।

(ii) समुद्री दुर्घटना के बाद उस क्षेत्र के मछुआरे उनके द्वारा पकड़े गए केकड़ों के हर उस कवच को अपने मृत नेता के सम्मान में वापिस फेंक देते थे जिन पर संयोगवश समुरई से मिलती-जुलती आकृति बनी होती थी । इसके परिणामस्वरुप केकड़ों की वह विशेष आकृति (शक्ल) ज्यादा समय तक जीवित रही और इसलिए समय के साथ इसी आकृति का आनुवंशतः प्रजनन हुआ । यह कृत्रिम चयन द्वारा विकास का एक उदाहरण है ।

(नोट: यह रोचक उदाहरण कार्ल सागन की पुस्तक ''द कॉसमस'' से लिया गया है और यह इस तथ्य पर प्रकाश डालता है कि प्राय: अनोखे व अव्याख्येय तथ्य एक दृष्टि डालने पर ''अंधविश्वासी'' लगते हैं परंतु वास्तव में उनकी साधारण वैज्ञानिक व्याख्याएं होती हैं । इस प्रकार के अन्य उदाहरणों पर विचार कीजिए ।)

1.7 दो शताब्दियों से भी पहले इंग्लैंड तथा पश्चिमी यूरोप में औद्योगिक क्रांति कुछ प्रमुख वैज्ञानिक व प्रौद्योगिक उपलब्धियों के कारण आरंभ हुई थी । ये उपलब्धियां क्या थीं ?

1.8 प्रायः यह कहा जाता है कि विश्व अब दूसरी औद्योगिक क्रांति के दौर से गुजर रहा है जो समाज में मूल परिवर्तन कर देगी जैसा कि पिछली क्रांति से हुआ था । विज्ञान और प्रौद्योगिकी के कुछ वे समकालीन नाम बताइए जो उस क्रांति के लिए उत्तरदायी हैं।

1.9 बाईसवीं शताब्दी की विज्ञान व प्रौद्योगिकी के बारे में अपना अनुमान लगाते हुए लगभग 1000 शब्दों में एक छोटी-सी कल्पित कहानी लिखिए ।

1.10 विज्ञान के प्रयोग पर अपने ''नैतिक'' विचार सूत्रबद्ध करने का प्रयास कीजिए । कल्पना कीजिए कि आप स्वयं संयोग से कोई खोज कर रहे हैं जो शैक्षिक तौर पर तो बहुत ही रोचक है परंतु इसके परिणाम अधिकांश मानवजाति के लिए भयंकर होने के अतिरिक्त कुछ नहीं होंगे । यदि आप इस दुविधा का हल करना चाहते हैं तो क्या करेंगे ?

1.11 किसी भी सूचना और ज्ञान की तरह विज्ञान को भी अच्छे या बुरे काम के लिए उपयोग किया जा सकता है और यह उपयोग करने वाले पर निर्भर करता है । विज्ञान के कुछ अनुप्रयोग नीचे दिए गए हैं । अपने विचारों को सूत्रबद्ध कीजिए कि क्या कोई विशेष अनुप्रयोग अच्छा है या बुरा या फिर उसे स्पष्टता के साथ वर्गीकृत नहीं किया जा सकता :

(i) आम जनता को चेचक के टीके लगाना ताकि इस रोग को दबाया जा सके और अंततः जनता को इससे मुक्त कराया जा सके। (ऐसा भारत में पहले ही सफलतापूर्वक किया जा चुका है ।)

(ii) निरक्षरता को समाप्त करने तथा समाचारों व विचारों के जनसंचार के लिए टेलीविजन ।

(iii) जन्मपूर्व लिंग निर्धारण ।

(iv) कार्यदक्षता में वृद्धि करने के लिए कम्प्यूटर ।

(v) पृथ्वी के चारों ओर विभिन्न कक्षाओं में कृत्रिम उपग्रहों को छोड़ना ।

(vi) नाभिकीय शस्त्रों का विकास ।

(vii) रासायनिक व जैव युद्ध के लिए नई व शक्तिशाली तकनीकों का विकास ।

(viii) पीने के पानी का शुद्धिकरण ।

(ix) प्लास्टिक शल्यक्रिया ।

(x) क्लोनिंग ।

1.12 भारत में गणित, खगोलशास्त्र, भाषा विज्ञान, तर्क व नैतिकता में महान विद्वता की लंबी व अटूट परंपरा रही है। फिर भी इसके समानांतर हमारे समाज में कई अंधविश्वासी तथा रूढ़िवादी दृष्टिकोण व परंपराएं फली-फूली हैं और दुर्भाग्य से ऐसा अभी भी जारी है-यहां तक कि अनेक पढ़े-लिखे लोगों में भी । इन दृष्टिकोणों का विरोध करने के लिए आप अपने विज्ञान के ज्ञान का प्रयोग, अपनी रणनीति को विकसित करने में किस प्रकार करेंगे ?

1.13 यद्यपि भारत में कानून ने महिलाओं को समानता का अधिकार दिया है फिर भी अनेक व्यक्तियों के महिलाओं की स्वाभाविक प्रकृति, क्षमता व बुद्धिमता पर अवैज्ञानिक विचार हैं, और उन्होंने व्यवहार में महिलाओं को दूसरा स्थान व भूमिका दी है । वैज्ञानिक तर्कों का प्रयोग करते हुए तथा विज्ञान व अन्य क्षेत्रों में महान महिलाओं के उदाहरण देते हुए इस विचार को धराशायी कीजिए; और स्वयं को तथा दूसरों को समझाइए कि यदि महिलाओं को समान अवसर दिए जाएं तो वे अपने को पुरुषों के समकक्ष सिद्ध करेंगी ।

1.14 ''भौतिकी में समीकरणों के प्रयोगों से सहमत होने से कहीं अधिक उनका सुंदर होना अधिक महत्वपूर्ण है ।'' यह कथन महान ब्रिटिश भौतिकविद् पी. ए. एम. डिरैक का था । इस प्रक्कथन की आलोचना कीजिए । इस पुस्तक में उन समीकरणों व परिणामों को ढूंढ़िए जो आपको सुंदर लगें ।

1.15 यद्यपि उपर्युक्त कथन विवादास्पद हो सकता है परंतु अधिकांश भौतिकविद् यह अनुभव करते हैं कि भौतिकी के महान नियम साधारण व सुंदर होते हैं । डिरैक के अतिरिक्त जिन प्रसिद्ध भौतिकविदों ने ऐसा अनुभव किया है उनके नाम हैं : आइंस्टाइन, बोर, हाइजनबर्ग, चंद्रशेखर तथा फाइनमैन । आपसे अनुरोध है कि आप भौतिकी के इन विद्वानों तथा अन्य महान विद्वानों की सामान्य पुस्तकों व लेखों तक पहुंचने के लिए विशेष प्रयास करें। (इस पुस्तक के अंत में दी गई पुस्तक-सूची देखें) । उनके लेख वास्तव में प्रेरणा के स्रोत हैं ।

1.16 विज्ञान की पाठ्यपुस्तकों को पढ़ने पर आपकी यह धारणा गलत हो सकती है कि विज्ञान रसहीन है तथा यह अत्यंत गंभीर विषय है और वैज्ञानिक प्रायः दैनिक जीवन में खोए-खोए व अंतर्मुखी होते हैं जो न कभी हँसते हैं, न ही कभी मुस्कराते हैं । विज्ञान व वैज्ञानिकों का यह चित्रण बिल्कुल आधारहीन है । अन्य व्यक्तियों के समुदाय की तरह वैज्ञानिक भी विनोदप्रिय हुए हैं और उन्होंने बहुत ही विनोदवृत्ति व साहस के साथ अपना जीवन व्यतीत किया है और साथ ही अपने वैज्ञानिक कार्य को भी बड़ी ही गंभीरता के साथ पूरा किया है । इस शैली के दो महान भौतिकविद् हैं- गैमो तथा फाइनमैन । ग्रंथ सूची में दी गई उनकी पुस्तकों को पढ़ना आपको रुचिकर लगेगा ।

अध्याय 2

मात्रक और मापन

2.1 प्रस्तावना

भौतिकी एक परिमाणात्मक विज्ञान है । किसी भी भौतिक परिघटना की व्याख्या करने हेतु, विभिन्न भौतिक राशियों का मापन अति आवश्यक है । किसी भी भौतिक राशि का मापन एक मूल स्वेच्छगृहीत अंतर्राष्ट्रीय स्तर पर मान्य संदर्भ मानक के साथ तुलना करना है । इस संदर्भ मानक को **'मात्रक'** कहते हैं । किसी भी भौतिक राशि की माप को मात्रक के साथ एक संख्या (आंकिक माप) से व्यक्त किया जाता है । यद्यपि हमारे द्वारा मापी जाने वाली भौतिक राशियों की संख्या बहुत अधिक है, फिर भी हमें सभी भौतिक राशियों को व्यक्त करने के लिए मात्रकों की सीमित संख्या की ही आवश्यकता है, क्योंकि ये राशियां एक दूसरे से परस्पर संबंधित हैं । मूल राशियों को व्यक्त करने के लिए प्रयुक्त मात्रकों को **'मूल मात्रक'** कहते हैं । इसके अतिरिक्त अन्य सभी भौतिक राशियों के मात्रकों को इन मूल मात्रकों के संयोग से व्यक्त किया जा सकता है । इस प्रकार से प्राप्त किए गए मात्रकों को **'व्युत्पन्न मात्रक'** कहते हैं । मूल मात्रकों और व्युत्पन्न मात्रकों के संपूर्ण समुच्चय को **मात्रकों की प्रणाली** (या **पद्धति**) कहते हैं ।

2.2 मात्रकों की अंतर्राष्ट्रीय प्रणाली

आजकल अंतर्राष्ट्रीय स्तर पर मान्य प्रणाली *"सिस्टम इंटरनेशनल डी यूनिट्स"* है (जो मात्रकों की अंतर्राष्ट्रीय प्रणाली का फ्रेंच तुल्य है) । इसे संक्षेप में SI लिखा जाता है । SI प्रतीकों, मात्रकों और संक्षेपों की मानक योजना सहित 1971 में हुए माप तोल के सामान्य सम्मेलन द्वारा विकसित की गई जिसका वैज्ञानिक, तकनीकी, औद्योगिक और व्यापारिक कार्यों में प्रयोग हेतु अनुमोदन किया गया । SI मात्रकों की 10 की घातों पर आधारित (दशमिक) प्रकृति के कारण विभिन्न प्रणालियों में रूपान्तरण अत्यन्त सरल एवं सुविधाजनक है । SI मीट्रिक पद्धति का आधुनिक एवं विकसित स्वरूप है । हम इस पुस्तक में SI मात्रकों का ही प्रयोग करेंगे । SI में सात मूल मात्रक हैं जो सारणी 2.1 में दिए गए हैं । सात SI मूल मात्रकों के अतिरिक्त दो अन्य मात्रक हैं जो कोण एवं घन कोण को परिभाषित करते हैं । सारणी 2.1 में कोण का मात्रक रेडियन है जिसका प्रतीक rad है और घन कोण का मात्रक स्टिरेडियन है जिसका प्रतीक sr है ।

ध्यान दीजिए कि सारणी 2.1 में प्रकाश की निर्वात में चाल 299, 792, 458 $m\,s^{-1}$ दर्शाई गई है । याद रखें कि जब भी मोल (mole) का प्रयोग करें, तो उसके 'मूल सत्व (तत्व)' का विशेष रूप से उल्लेख किया जाना चाहिए । ये मूल सत्व (तत्व) परमाणु, अणु, आयन, इलेक्ट्रॉन, अन्य कण या विशेष रूप से वर्णित कुछ उक्त कणों के समूह हो सकते हैं ।

सारणी 2.2 में SI मूल मात्रकों के पदों में कुछ व्युत्पन्न मात्रक दिए गए हैं । इसके अतिरिक्त हम कुछ और भौतिक राशियों के लिए मात्रक प्रयोग में लाते हैं जो सात मूल मात्रकों के योग से व्युत्पन्न किए जा सकते हैं । इन व्युत्पन्न SI मात्रकों को विशेष नाम से जाना जाता है (सारणी 2.3), और कुछ व्युत्पन्न SI मात्रक इन विशिष्ट नामों वाले मात्रकों और सात मूल मात्रकों का प्रयोग करते हैं (सारणी 2.4) । उक्त मात्रकों को आपके तात्कालिक संदर्भ के लिए सारणी 2.3 एवं 2.4 में दिया गया है । सामान्य प्रयोग के कुछ अन्य मात्रकों को सारणी 2.5 में दिया गया है ।

सामान्य SI पूर्वलग्न तथा गुणज और अपवर्तकों के प्रतीक परिशिष्ट 2 में दिए गए हैं । आपके तात्कालिक संदर्भ के लिए भौतिक राशियों, रासायनिक तत्वों एवं न्यूक्लाइडों के लिए प्रयुक्त प्रतीकों के सामान्य निर्देश परिशिष्ट 7 में और SI मात्रकों एवं अन्य मात्रकों के लिए सूची परिशिष्ट 8 में दिए गए हैं ।

सारणी 2.1 SI मूल राशियां एवं उनके मात्रक

मूल राशि	SI मात्रक		
	नाम	प्रतीक	परिभाषा
लंबाई	मीटर	m	प्रकाश द्वारा निर्वात में एक सेकंड के 299, 792, 458 वें समय अंतराल में तय किए गए पथ की लंबाई एक मीटर है । (1983 से मान्य)
द्रव्यमान	किलोग्राम	kg	फ्रांस में पेरिस के पास सेवरिस में अंतर्राष्ट्रीय माप-तोल विभाग में रखे प्लेटिनम-इरिडियम मिश्रधातु से बने सिलिंडर का द्रव्यमान मानक किलोग्राम है । (1889 से मान्य)
समय	सेकंड	s	एक सेकंड वह अंतराल है जो सीजियम के समस्थानिक –133 के परमाणु के विशेष विकिरण के 9,192,631,770 कंपनों की अवधि के बराबर है । (1967 से मान्य)
विद्युत् धारा	ऐम्पियर	A	एक ऐम्पियर वह नियत विद्युत् धारा है जो कि निर्वात में 1 मीटर की दूरी पर स्थित दो सीधे अनंत लंबाई वाले समानांतर एवं नगण्य वृत्तीय अनुप्रस्थ काट में प्रवाहित होने पर, तारों के बीच प्रति मीटर लंबाई पर 2×10^{-7} न्यूटन का बल उत्पन्न करती है । (1948 से मान्य)
ताप	केल्विन	K	जल के त्रिक-बिंदु के ऊष्मागतिक ताप के 1/273.16 वें भाग को केल्विन कहते है । (1967 से मान्य)
पदार्थ की मात्रा	मोल	mol	मोल, किसी निकाय में पदार्थ की वह मात्रा है जिसमें मूल सत्वों (तत्वों) की संख्या उतनी ही है जितने 0.012 kg कार्बन-12 में परमाणुओं की संख्या । (1971 से मान्य)
ज्योति-तीव्रता	कैंडेला	cd	कैंडेला, किसी दिशा में 540×10^{12} Hz आवृत्ति वाले स्रोत की ज्योति-तीव्रता है जो उस दिशा में (1/683) वाट, प्रति स्टिरेडियन की विकिरण तीव्रता का एकवर्णीय प्रकाश उत्सर्जित करता है (1979 से मान्य)

सारणी 2.2 SI मूल मात्रकों के पदों में व्यक्त SI व्युत्पन्न मात्रक

भौतिक राशि	SI मात्रक	
	नाम	प्रतीक
क्षेत्रफल	वर्गमीटर	m^2
आयतन	घनमीटर	m^3
चाल, वेग	मीटर प्रति सेकंड	m/s या $m\ s^{-1}$
कोणीय वेग	रेडियन प्रति सेकंड	rad/s या $rad\ s^{-1}$
त्वरण	मीटर प्रतिवर्ग सेकंड	m/s^2 या $m\ s^{-2}$
कोणीय त्वरण	रेडियन प्रतिवर्ग सेकंड	rad/s^2 या $rad\ s^{-2}$
तरंग संख्या	प्रति मीटर	m^{-1}
घनत्व, द्रव्यमान घनत्व	किलोग्राम प्रति घनमीटर	kg/m^3 या $kg\ m^{-3}$
विद्युत् धारा घनत्व	ऐम्पियर प्रति वर्गमीटर	A/m^2 या $A\ m^{-2}$
चुंबकीय क्षेत्र की तीव्रता, चुंबकीय तीव्रता, चुंबकीय आघूर्ण घनत्व	ऐम्पियर प्रति मीटर	A/m या $A\ m^{-1}$
सांद्रता (पदार्थ की मात्रा की)	मोल प्रति घनमीटर	mol/m^3 या mol/m^{-3}
विशिष्ट आयतन	घन मीटर प्रति किलोग्राम	m^3/kg या $m^3\ kg^{-1}$
ज्योति-तीव्रता	कैंडेला प्रति वर्गमीटर	cd/m^2 या cd/m^{-2}
शुद्धगतिक श्यानता	वर्गमीटर प्रति सेकंड	m^2/s या $m^2\ s^{-1}$
संवेग	किलोग्राम मीटर प्रति सेकंड	kg m/s या $kg\ m\ s^{-1}$
जड़त्व आघूर्ण	किलोग्राम वर्गमीटर	$kg\ m^2$
परिभ्रमण त्रिज्या	मीटर	m
रेखीय/क्षेत्रीय (पृष्ठीय)/आयतन प्रसरणीयता	प्रति केल्विन	K^{-1}
प्रवाह दर	घनमीटर प्रति सेकंड	m^3/s या $m^3 s^{-1}$

सारणी 2.3 विशेष नाम वाले SI व्युत्पन्न मात्रक

भौतिक राशि	SI मात्रक			
	नाम	प्रतीक	अन्य मात्रकों के पदों में व्युत्पन्न मात्रक	SI मूल मात्रकों के पदों में व्युत्पन्न मात्रक
आवृत्ति	हर्ट्ज	Hz	—	s^{-1}
बल	न्यूटन	N	—	$kg\ m/s^2$ या $kg\ m\ s^{-2}$
दाब, प्रतिबल	पास्कल	Pa	N/m^2 या $N\ m^{-2}$	$kg\ m^{-1}s^{-2}$ या kg/s^2m
कार्य, ऊर्जा, ऊष्मा की मात्रा	जूल	J	N m	$kg\ m^2/s^2$ या $kg\ m^2\ s^{-2}$
शक्ति, विकिरण फलक्स	वाट	W	J/s या $J\ s^{-1}$	$kg\ m^2/s^3$ या $kg\ m^2s^{-3}$
विद्युत् आवेश	कूलॉम	C	—	A s
विद्युत् विभव, विभवान्तर, विद्युत्वाहक बल	वोल्ट	V	W/A या $W\ A^{-1}$	$kg\ m^2/s^3A$ या $kg\ m^2s^{-3}A^{-1}$
धारिता	फैरड	F	C/V या $C\ V^{-1}$	$A^2s^4/kg\ m^2$ या $kg^{-1}\ m^{-2}s^4A^2$

विद्युत् प्रतिरोध	ओम	Ω	V/A या VA^{-1}	kg m^2/s^3A^2 या kg $m^2s^{-3}A^{-2}$
विद्युत् चालकता	सीमेन्स	S	A/V या VA^{-1}	s^3A^2/kg m^2 या $kg^{-1}m^{-2}s^3A^2$
चुंबकीय अभिवाह	वेबर	Wb	V s या (J/A या JA^{-1})	kg m^2/s^2A या kg $m^2s^{-2}A^{-1}$
चुंबकीय क्षेत्र, चुंबकीय अभिवाह घनत्व, चुंबकीय प्रेरण	टेस्ला	T	Wb/m^2 या Wb m^{-2}	kg/s^2A या kg $s^{-2}A^{-1}$
प्रेरकत्व	हेनरी	H	Wb /A या Wb A^{-1}	kg m^2/s^2A^2 या kg $m^2s^{-2}A^{-2}$
ज्योति फलक्स, दीप्त शक्ति	ल्यूमेन	lm	—	cd/sr या cd sr^{-1}
प्रदीप्त घनत्व	लक्स	lx	lm/m^2 या lm m^{-2}	cd/sr m^2 या m^{-2} cd sr^{-1}
सक्रियता (रेडियो न्यूक्लाइड/रेडियोएक्टिव स्रोत की)	बेकेरल	Bq	—	s^{-1}
अवशोषित मात्रा, अवशोषित मात्रा सूचकांक	ग्रे	Gy	J/kg या J/kg^{-1}	m^2/s^2 या m^2s^{-2}

सारणी 2.4 विशेष नाम वाले SI मात्रकों के पदों में व्यक्त SI व्युत्पन्न मात्रक

भौतिक राशि	SI मात्रक		
	नाम	प्रतीक	SI मूल मात्रकों के पदों में व्युत्पन्न मात्रक
चुंबकीय आघूर्ण	जूल प्रति टेस्ला	J T^{-1}	m^2 A
द्विध्रुव आघूर्ण	कूलॉम मीटर	C m	m A s
गतिक श्यानता	पायसल अथवा पास्कल सेकंड अथवा न्यूटन सेकंड प्रति वर्ग मीटर	Pl या Pa s या N s m^{-2}	kg $m^{-1}s^{-1}$
युग्म, बल आघूर्ण	न्यूटन मीटर	N m	kg m^2s^{-1}
पृष्ठ तनाव	न्यूटन प्रति मीटर	N/m या N m^{-1}	kg s^{-2}
शक्ति घनत्व, किरणीत ऊर्जा मान, ऊष्मीय फ्लक्स घनत्व	वाट प्रति वर्ग मीटर	W/m^2	kg s^{-3}
ऊष्मा धारिता, एन्ट्रॉपी	जूल प्रति केल्विन	J/K	kg $m^2s^{-2}K^{-1}$
विशिष्ट ऊष्मा, विशिष्ट एन्ट्रॉपी	जूल प्रति किलोग्राम केल्विन	J/kg K	$m^2s^{-2}K^{-1}$
विशिष्ट ऊर्जा, गुप्त ऊष्मा	जूल प्रति किलोग्राम	J/kg या J kg^{-1}	m^2s^{-2}
विकिरण तीव्रता	वाट प्रति स्टिरेडियन	W/sr या W sr^{-1}	kg $m^2s^{-3}sr^{-1}$
ऊष्मीय चालकता	वाट प्रति मीटर केल्विन	W/m K या W $m^{-1}K^{-1}$	kg m s^{-3} K^{-1}
ऊर्जा घनत्व	जूल प्रति घन मीटर	J/m^3 या J m^{-3}	kg m^{-1} s^{-2}
विद्युत् क्षेत्र तीव्रता	वोल्ट प्रति मीटर	V/m या V m^{-1}	kg m s^3A^{-1}
विद्युत् आवेश घनत्व	कूलॉम प्रति घन मीटर	C/m^3 या C m^{-3}	m^{-3} s A
विद्युत् फ्लक्स घनत्व	कूलॉम प्रति वर्ग मीटर	C/m^2 या C m^{-2}	m^{-2} s A
परावैद्युतांक	फैरड प्रति मीटर	F/m या F m^{-1}	$kg^{-1}m^{-3}s^4A^2$
चुंबकशीलता	हेनरी प्रति मीटर	H/m या H m^{-1}	kg m $s^{-2}A^{-2}$
मोलर ऊर्जा	जूल प्रति मोल	J/mol या J mol^{-1}	kg m^2s^{-2} mol^{-1}

कोणीय संवेग, प्लांक नियतांक	जूल सेकंड	J s	$kg\ m^2 s^{-1}$
मोलर एन्ट्रॉपी, मोलर ऊष्मा धारिता	जूल प्रति मोल केल्विन	J/mol K या $J\ mol^{-1}K^{-1}$	$kg\ m^2 s^{-2} K^{-1} mol^{-1}$
उद्भासन (exposure)	कूलॉम प्रति किलोग्राम	C/kg या $C\ kg^{-1}$	$kg^{-1} s\ A$
(X-तथा γ-किरणें)	ग्रे प्रति सेकंड	Gy/s या $Gy\ s^{-1}$	$m^2 s^{-3}$
संपीड्यता	प्रति पास्कल	Pa^{-1}	$kg^{-1} m\ s^2$
प्रत्यास्थता गुणांक	न्यूटन प्रति वर्गमीटर	N/m^2 या $N\ m^{-2}$	$kg\ m^{-1} s^{-2}$
दाब प्रवणता	पास्कल प्रति मीटर	Pa/m या $N\ m^{-3}$	$kg\ m^{-2} s^{-2}$
पृष्ठ विभव	जूल प्रति किलोग्राम	J/kg या $J\ kg^{-1}$; N m/kg या $N\ m\ kg^{-1}$	$m^2 s^{-2}$
दाब ऊर्जा	पास्कल घन मीटर	$Pa\ m^3$ या N m	$kg\ m^2 s^{-2}$
आवेग	न्यूटन सेकंड	N s	$kg\ m\ s^{-1}$
कोणीय आवेग	न्यूटन मीटर सेकंड	Nm s	$kg\ m^2 s^{-1}$
विशिष्ट प्रतिरोध	ओम मीटर	Ω m	$kg\ m^3 s^{-3} A^{-2}$
पृष्ठ ऊर्जा	जूल प्रति वर्गमीटर	J/m^2 या $J\ m^{-2}$; N/m या $N\ m^{-1}$	$kg\ s^{-2}$

सारणी 2.5 सामान्य प्रयोग के लिए SI मात्रकों के अतिरिक्त कुछ अन्य मात्रक

नाम	प्रतीक	SI मात्रक के पदों में मान
मिनट	min	60 s
घंटा	h	60 min = 3600 s
दिन	d	24 h = 86400 s
वर्ष	y	365.25 d = 3.156×10^7 s
डिग्री	°	1° = (π/180) rad
लिटर	L	$1\ dm^3 = 10^{-3} m^3$
टन	t	10^3 kg
कैरट	c	200 mg
बार	bar	0.1 MPa = 10^5 Pa
क्यूरी	Ci	$3.7 \times 10^{10} s^{-1}$
रोंजन	R	$2.58 \times 10^{-4} C\ kg^{-1}$
क्विंटल	q	100 kg
बार्न	b	$100\ fm^2 = 10^{-28} m^2$
आर	a	$1\ dam^2 = 10^2 m^2$
हेक्टार	ha	$1\ hm^2 = 10^4 m^2$
मानक वायुमंडलीय दाब	atm	101 325 Pa = 1.013×10^5 Pa

2.3 लंबाई का मापन

आप लंबाई मापने की कुछ प्रत्यक्ष विधियों से पहले से ही परिचित हैं। उदाहरणार्थ 10^{-3} m से 10^2 मीटर तक की लंबाई मापने के लिए मीटर पैमाने का प्रयोग किया जाता है। 10^{-4} m तक की लंबाई को यथार्थता से मापने के लिए वर्नियर केलिपर्स का प्रयोग किया जाता है। 10^{-5} m तक की लंबाई को मापने हेतु स्क्रूगेज (पेंचमापी) या गोलाईमापी (Spherometer) का प्रयोग कर सकते हैं। परंतु इन परासों से परे की दूरियों के मापन हेतु हम कुछ विशेष परोक्ष विधियों का प्रयोग करते हैं।

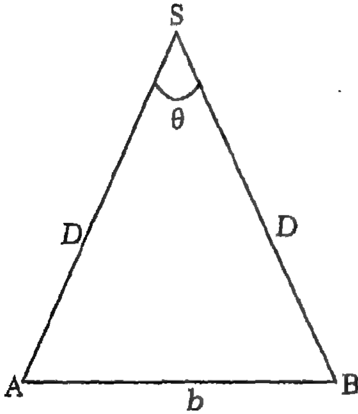
2.3.1 बड़ी दूरियों का मापन : लंबन विधि

बड़ी दूरियां जैसे कि किसी ग्रह अथवा तारे की पृथ्वी से दूरी हम प्रत्यक्ष रूप से किसी मीटर पैमाने की सहायता से नहीं माप सकते हैं। ऐसी दशाओं में महत्त्वपूर्ण विधि है **लंबन विधि**। यहां हम किसी वस्तु को दो भिन्न बिंदुओं से देखते हैं। उदाहरणार्थ आप किसी पेंसिल को किसी पृष्ठभूमि (दीवार) के किसी विशिष्ट बिंदु पर अपने सामने कीजिए। पेंसिल को पहले अपनी बाईं आंख (दाईं आंख बंद रखते हुए) से और फिर अपनी दाहिनी आंख (बाईं आंख को बंद रखते हुए) से देखिए। आप देखेंगे कि पृष्ठभूमि (दीवार) किसी बिंदु के सापेक्ष पेंसिल की स्थिति परिवर्तित प्रतीत होती है। इसे 'लंबन' कहा जाता है। प्रेक्षण के बिंदुओं के बीच की दूरी को 'आधारक' कहा जाता है। इस उदाहरण में आंखों के बीच की दूरी ही आधारक है।

लंबन विधि द्वारा किसी दूरस्थ ग्रह S की दूरी D के मापन हेतु, हम पृथ्वी पर इसे दो विभिन्न स्थितियों (वेधशालाओं) A और B (जिनके मध्य दूरी $AB = b$ है) से एक ही समय पर देखते हैं जैसा कि चित्र 2.1 में दर्शाया गया है । हम इन दोनों बिंदुओं, जिनके अनुदिश ग्रह को देखा गया है, के मध्य कोण मापते हैं । $\angle ASB = \theta$ को **लंबन कोण** अथवा **लंबनिक कोण** कहते है ।

क्योंकि ग्रह पृथ्वी से बहुत अधिक दूरी पर है, अर्थात् $\frac{b}{D} << 1$, कोण θ बहुत ही छोटा है । ऐसी दशा में हम AB को, केंद्र S और त्रिज्या D वाले वृत्त का b लंबाई का चाप मान सकते हैं । त्रिज्या AS = BS, तब $AB = b = D\,\theta$ होगा, जहां θ रेडियन में है ।

$$D = \frac{b}{\theta} \tag{2.1}$$



चित्र 2.1 लंबन विधि

D के निर्धारण के पश्चात्, हम इसी विधि द्वारा ग्रह की आमाप अथवा कोणीय व्यास भी निर्धारित कर सकते हैं । यदि किसी ग्रह का व्यास d है और उसकी कोणीय आमाप α (d द्वारा पृथ्वी के किसी बिंदु पर बनाया गया कोण) है, तब

$$\alpha = d/D \tag{2.2}$$

कोण α पृथ्वी के उसी बिंदु से मापा जा सकता है । यह किसी दूरदर्शक द्वारा ग्रह के दो व्यासत: सम्मुख (विपरीत) बिंदुओं को देखने पर उनकी दिशाओं के बीच का कोण है । चूंकि D ज्ञात है तो ग्रह का व्यास d समीकरण (2.2) की सहायता से निर्धारित किया जा सकता है ।

▶ ***उदाहरण 2.1*** पृथ्वी के दो व्यासत: सम्मुख (विपरीत) बिंदुओं A व B से चंद्रमा को देखा गया । प्रेक्षण की दो दिशाओं में चंद्रमा पर बनने वाले कोण θ की माप 1°54′ है । पृथ्वी का व्यास लगभग 1.276×10^7 m है । पृथ्वी से चंद्रमा की दूरी को अभिकलित कीजिए ।

हल ज्ञात है, θ = 1°54′ = 114′

$= (114 \times 60)'' \times (4.85 \times 10^{-6})$ rad

$= 3.32 \times 10^{-2}$ rad

चूंकि $1'' = 4.85 \times 10^{-6}$ rad

$b = AB = 1.276 \times 10^7$ m

अत: समीकरण (2.1) से, पृथ्वी और चंद्रमा के मध्य दूरी

$$D = b/\theta = \frac{1.276 \times 10^7}{3.32 \times 10^{-2}} = 3.84 \times 10^8 \text{m}$$ ◀

▶ ***उदाहरण 2.2*** सूर्य के कोणीय व्यास α की माप 1920″ है । सूर्य की पृथ्वी से दूरी 1.496×10^{11} m है । सूर्य के व्यास का परिकलन कीजिए ।

हल सूर्य का कोणीय व्यास α = 1920″

$= 1920 \times (4.85 \times 10^{-6})$ rad

$= 9.31 \times 10^{-3}$ rad

सूर्य का व्यास $d = \alpha D$

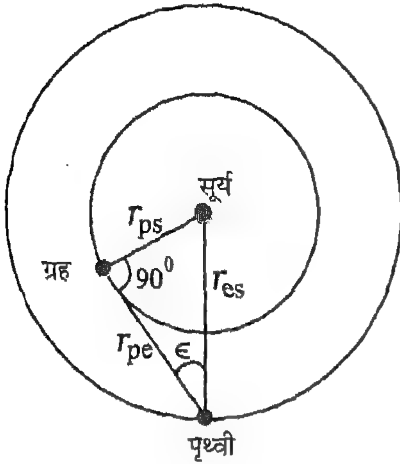
$= (9.31 \times 10^{-3}) \times (1.496 \times 10^{11})$ m

$= 1.39 \times 10^9$ m ◀

लंबन विधि द्वारा पृथ्वी से किसी ग्रह की दूरी ज्ञात की जा सकती है । कॉपरनिकस ने ग्रहीय कक्षाओं को वृत्ताकार मानते हुए बहुत समय पहले ग्रहों की सूर्य से सापेक्ष दूरियां निर्धारित की थीं । **अंतर्ग्रहों की दूरियों** के निर्धारण में उनकी विधि अति सरल है । यहां अंतर्ग्रह से तात्पर्य उस ग्रह से है जो पृथ्वी की अपेक्षा सूर्य के अति समीप है, जैसे बुध और शुक्र । पृथ्वी पर, पृथ्वी–ग्रह की दिशा एवं पृथ्वी–सूर्य की दिशा के मध्य बना कोण ग्रह का **प्रसर कोण (elongation)** कहलाता है । यह पृथ्वी से अवलोकित, ग्रह की सूर्य से कोणीय दूरी है जब प्रसर कोण ε का मान अधिकतम होता है (जैसा कि चित्र 2.2 में दर्शाया गया है) तब ग्रह सूर्य से अधिकतम दूरी पर दृष्टिगोचर होता है । ऐसी दशा में सरलता से देखा जा सकता है कि ग्रह पर सूर्य और पृथ्वी द्वारा अंतरित कोण 90° है । अत: सूर्य से ग्रह की दूरी

$$r_{ps} = r_{es} \sin \varepsilon$$
$$= \sin \varepsilon \text{ AU}$$

जहां r_{es} पृथ्वी और सूर्य के बीच की औसत दूरी है जिसे खगोलीय मात्रक (AU) कहते है ।



चित्र 2.2 किसी अंतर्ग्रह की सूर्य से और पृथ्वी से दूरी का निर्धारण ।

हमने इस प्रकार ग्रह और सूर्य के मध्य दूरी को AU के पदों में निर्धारित किया । यदि AU, किलोमीटर के पदों में ज्ञात हो तो ऊपर कथित दूरी को किलोमीटरों में भी व्यक्त कर सकते हैं । इसके लिए ध्यान दें कि पृथ्वी एवं ग्रह के मध्य दूरी हम निम्न व्यंजक से प्राप्त कर सकते हैं

$$D = r_{pe}$$
$$= \cos\varepsilon \text{ AU}$$

अब यदि r_{pe} को सीधे किलोमीटरों में निर्धारित कर लेते हैं तो उपरोक्त समीकरण से AU का मान किलोमीटरों में प्राप्त किया जा सकता है ।

पिछले कुछ वर्षों से, समीपी खगोलीय पिण्डों जैसे शुक्र, आदि की दूरी के यथार्थ माप के लिए रेडार का प्रयोग किया जा रहा है । खगोलीय संकेत शुक्र के पृष्ठ पर भेजे जाते हैं जो उसके पृष्ठ से परावर्तन के पश्चात् पृथ्वी पर रेडार के ग्राही यंत्र द्वारा संसूचित कर लिए जाते हैं । रेडियो तरंगें प्रकाश की चाल $c\,(=3\times10^8\,\text{m s}^{-1})$ से चलती हैं । अतः पृथ्वी एवं शुक्र के मध्य दूरी तय करने में लगा समय $t = r_{pe}/c$ लगता है । अतः रेडार से संकेत प्रेषण और इसकी प्रतिध्वनि के संग्रहण में बीते समय $2t$ की यथार्थ माप की जा सकती है । क्योंकि c, km s^{-1} में है तो $r_{pe} = c\,t$ किलोमीटर में प्राप्त हो जाता है । इससे खगोलीय मात्रक के मान को व्यजंक ($\text{AU} = r_{pe}/\cos\varepsilon$) के प्रयोग द्वारा किलोमीटर में परिकलित किया जाता है । इस प्रकार $1\text{AU} = 1.496\times10^{11}$ m है ।

उदाहरण 2.3 शुक्र ग्रह के लिए, अधिकतम प्रसर कोण ε लगभग 47° है । शुक्र एवं सूर्य के मध्य दूरी r_{vs} और शुक्र एवं पृथ्वी के मध्य दूरी r_{ve} ज्ञात कीजिए ।

हल जैसा कि ऊपर दर्शाया गया है कि

$$r_{vs} = \sin\varepsilon \text{ AU}$$
$$= \sin 47^0 \text{ AU}$$
$$= 0.73 \text{ AU}$$

और
$$r_{ve} = \cos\varepsilon \text{ AU}$$
$$= \cos 47^0 \text{ AU}$$
$$= 0.68 \text{ AU}$$

चूंकि $1\text{ AU} = 1.496\times10^{11}$ m है अतः ये दूरियां मीटरों में व्यक्त की जा सकती है ।

$$r_{vs} = 1.09\times10^{11}\text{ m}$$

और
$$r_{ve} = 1.02\times10^{11}\text{ m}$$ ◄

कॉपरनिकस ने बाह्य ग्रहों (वे ग्रह जिनकी कक्षा पृथ्वी की कक्षा से बड़ी है, जैसे उस समय पर ज्ञात ग्रह मंगल, बृहस्पति एवं शनि) की सूर्य से दूरी ज्ञात करने के लिए भी एक सरल विधि बताई । यह एक सीधी विधि है, परंतु अंतर्ग्रहों की दूरियां मापने में प्रयुक्त विधि से थोड़ी अधिक जटिल है । इस विधि के अनुसार, सूर्य से एक ग्रह की दूरी ज्ञात होने पर, किसी दूसरे ग्रह की दूरी का परिकलन किया जा सकता है । यह केप्लर के ग्रहीय गति के तीसरे नियम के परिणाम स्वरूप है जिसके अनुसार सूर्य के परितः किसी ग्रह के परिक्रमण काल (T) का वर्ग, उसकी कक्षा के अर्धदीर्घ अक्ष (a) के घन के अनुक्रमानुपाती होता है । अतः दो ग्रहों P_1 व P_2 के लिए

$$\frac{a_2^3}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{T_1^2} \qquad (2.3)$$

परिक्रमण काल सीधे प्रेक्षण द्वारा सुनिश्चित किए जा सकते हैं । अतः यदि a_1 माप लिया गया है तो a_2 का परिकलन किया जा सकता है ।

उदाहरण 2.4 उदाहरण 2.3 में प्राप्त निष्कर्ष के आधार पर शुक्र ग्रह की दिनों में कक्षीय अवधि ज्ञात कीजिए ।

हल उदाहरण 2.3 में हमने $r_{vs} = 0.73$ AU ज्ञात किया । यदि इसे शुक्र और सूर्य के मध्य की औसत दूरी लेते हैं, तो $a_v = 0.73$ AU; अतः समीकरण (2.3) को हम निम्न प्रकार से लिख सकते हैं

$$\frac{a_v^3}{a_e^3} = \frac{T_v^2}{T_e^2}$$

अतः a_v का मान प्रतिस्थापित करने पर और $a_e = 1$ AU तथा $T_e = 1$ y लेने पर,

$$T_v^2 = (a_v/a_e)^3 T_e^2$$
$$= (0.73)^3 y^2$$
$$= 0.39 y^2$$

अथवा $$T_v = 0.62 y$$
$$= 226. d$$ ◀

2.3.2 अति सूक्ष्म दूरियों का मापन : अणु का आमाप

अणु के आमाप (10^{-8} m - 10^{-10} m) जैसे बहुत ही छोटे आमापों को मापने के लिए हमें विशेष विधियां अपनानी पड़ती हैं । इनके लिए हम स्क्रूगेज या इस प्रकार के अन्य यंत्रों का प्रयोग नहीं कर सकते । यहां तक कि सूक्ष्मदर्शी की भी कुछ सीमाएं हैं। किसी निकाय की जांच के लिए प्रकाशिक सूक्ष्मदर्शी में दृश्य प्रकाश का प्रयोग किया जाता है । क्योंकि प्रकाश के लक्षण तरंग जैसे होते हैं, अतः प्रकाशिक सूक्ष्मदर्शी प्रकाश की तरंगदैर्ध्य के बराबर विभेदन के लिए प्रयुक्त किया जा सकता है । (इसकी विस्तृत व्याख्या कक्षा XII की भौतिकी की पाठ्यपुस्तक में दी गई है) । दृश्य प्रकाश की तरंगदैर्ध्य का परास लगभग 4000 Å से 7000 Å है (1 एंगस्ट्रम = 1 Å = 10^{-10} m) । अतः कोई प्रकाशिक सूक्ष्मदर्शी इससे छोटे आमापों के कणों का विभेदन नहीं कर सकता है । प्रकाश पुंज के स्थान पर हम किसी इलेक्ट्रॉन पुंज का उपयोग भी कर सकते हैं । इलेक्ट्रॉन पुंज को उचित प्रकार से अभिकल्पित वैद्युत एवं चुंबकीय क्षेत्रों द्वारा फोकस किया जा सकता है । इस प्रकार के इलेक्ट्रॉन सूक्ष्मदर्शी की विभेदन क्षमता अंततः इस कारण से सीमित होती है कि इलेक्ट्रॉन भी एक तरंग की भांति व्यवहार करता है (इसके विषय में अधिक जानकारी आप कक्षा XII में प्राप्त करेंगे) । किसी इलेक्ट्रॉन की तरंगदैर्ध्य एक एंगस्ट्रम के किसी अंश के बराबर तक कम हो सकती है । 0.6Å तक की विभेदन क्षमता वाले इलेक्ट्रॉन सूक्ष्मदर्शी का निर्माण किया जा चुका है । इनके द्वारा किसी पदार्थ में अणुओं तथा परमाणुओं का लगभग विभेदन किया जा सकता है । हाल ही के समय में विकसित सुरंगन सूक्ष्मदर्शिकी (tunnelling microscope) में विभेदन-सीमा एक एंगस्ट्रम से भी अधिक सूक्ष्म है । इससे भी अणुओं के आमापों का अनुमान लगाया जा सकता है ।

ओलीक अम्ल के आण्वीय आमाप की लगभग माप के लिए एक सरल विधि निम्न प्रकार है । ओलीक अम्ल एक साबुन के घोल जैसा द्रव है जिसका आण्वीय आमाप 10^{-9} m कोटि का है । आण्वीय आमाप के मापन हेतु सर्वप्रथम पानी के पृष्ठ पर ओलीक अम्ल की आण्वीय परत निम्न प्रकार से बनाई जाए । 20 cm^3 एल्कोहॉल में 1 cm^3 ओलीक अम्ल घोलिए । फिर इस घोल के 1 cm^3 भाग को 20 cm^3 एल्कोहॉल में पुनः घोलिए । तब इस घोल की सांद्रता 1 cm^3 घोल में $\frac{1}{20 \times 20} cm^3$ ओलीक अम्ल/cm^3 एल्कोहॉल के बराबर है । इस घोल की कुछ बूंदें पानी पर डालिए । अब पानी से भरे टब में थोड़ा लाइकोपोडियम पाउडर छिड़किए तथा इस पृष्ठ पर ओलीक अम्ल व एल्कोहॉल के घोल की एक बूंद डालिए । बहुत शीघ्र ही पानी के पृष्ठ पर ओलीक अम्ल की एक पतली, बड़ी तथा लगभग वृत्ताकार परत फैल जाती है जिसका क्षेत्र लाइकोपोडियम पाउडर की परिसीमा से स्पष्ट दृष्टिगोचर होता है । ओलीक अम्ल अल्प मात्रा में होने के कारण इसकी परत की मोटाई अणु के व्यास की कोटि की मानी जा सकती है । अतः शीघ्रता से इस परत का व्यास मापिए और क्षेत्रफल A परिकलित कीजिए । माना कि हमने जल पृष्ठ पर घोल की n बूंदें डालीं । प्रारंभ में, हम प्रत्येक बूंद का अनुमानित आयतन V cm^3 ज्ञात करते हैं ।

अतः घोल की n बूंदों का आयतन

$$= nV \, cm^3$$

इस घोल में ओलीक अम्ल की मात्रा

$$= nV\left(\frac{1}{20 \times 20}\right) cm^3$$

ओलीक अम्ल का घोल जल पृष्ठ पर अति शीघ्रता से फैलता है और यदि यह फैलकर A cm^2 क्षेत्रफल की ओर t मोटाई की परत बनाता है तो परत की मोटाई

$$t = \frac{\text{परत का आयतन}}{\text{परत का क्षेत्रफल}}$$

$$= \frac{nV}{20 \times 20 A} cm$$

यदि हम यह मान लें कि परत एक आण्विक मोटाई की है तो यह मोटाई ओलीक अम्ल के अणु का व्यास अथवा अणु का आमाप होगा । इसकी मोटाई 10^{-9} m की कोटि की होती है ।

▶ ***उदाहरण 2.5*** यदि किसी नाभिक की आमाप को किसी पिन की तीक्ष्ण नोंक के आमाप के बराबर मान लिया जाए, तो किसी परमाणु की लगभग अनुमानित आमाप क्या होगी ?

हल नाभिक की आमाप 10^{-15} m से 10^{-14} m के परास में होती है । पिन की तीक्ष्ण नोक को 10^{-5} m से 10^{-4} m के परास में माना जा सकता है । इस प्रकार हम नाभिक की आमाप को 10^{10} के गुणक से बढ़ा रहे हैं । अतः 10^{-10} m आमाप वाला परमाणु लगभग 1 m आमाप का प्रतीत होगा । अतः यदि किसी परमाणु का नाभिक पिन की तीक्ष्ण नोंक जितना (आमाप में) है तब वह परमाणु लगभग 1 m त्रिज्या के गोले के बराबर होगा । ◀

2.3.3 लंबाइयों का परास

विश्व में वस्तुओं की आमाप का विस्तृत परास है । इनका विस्तार क्षेत्र किसी परमाणु के एक सूक्ष्मतर नाभिक की आमाप (10^{-14} m) से प्रेक्षणीय विश्व की आमाप (10^{26} m) तक है । सारणी 2.6 में, इनमें से कुछ वस्तुओं की आमाप और लंबाइयों की कोटि और परास दिए गए हैं ।

अति सूक्ष्म एवं अत्यधिक बड़ी दूरियों के मापन हेतु कुछ और विशेष मात्रक निम्न हैं :

1 फर्मी = 1 f = 10^{-15} m

1 एंगस्ट्रम = 1 Å = 10^{-10} m

1 खगोलीय मात्रक = 1 AU (सूर्य की पृथ्वी से दूरी) = 1.496×10^{11} m

1 प्रकाश वर्ष = 1 ly = 9.46×10^{15} m (प्रकाश द्वारा 1 वर्ष में तय की गई दूरी)

1 पारसेक = 3.08×10^{16} m (एक आर्क सेकंड के वार्षिक लंबन के तद्नुरूप दूरी)

ध्यान दीजिए कि पारसेक, लंबनिक सेकंड (Parallactic second) का संक्षेपण है । वार्षिक लंबन वह कोण है जो तारे की दिशा के लंबवत् पृथ्वी की कक्षा के अर्धदीर्घ अक्ष (a) के द्वारा तारे पर बनता है ।

2.4 द्रव्यमान का मापन

द्रव्यमान द्रव्य का मूल गुण है । यह समष्टि में वस्तु के ताप, दाब अथवा उसके स्थान पर निर्भर नहीं करता । द्रव्यमान का SI मात्रक किलोग्राम (kg) है । अंतर्राष्ट्रीय मापतोल विभाग द्वारा दिए गए अंतर्राष्ट्रीय मानक किलोग्राम के आदिप्ररूप विभिन्न देशों की बहुत-सी प्रयोगशालाओं में उपलब्ध हैं । भारत में यह राष्ट्रीय भौतिक प्रयोगशाला (N.P.L.), नई दिल्ली में उपलब्ध है ।

परमाणुओं और अणुओं के द्रव्यमान-मापन हेतु, किलोग्राम एक सुविधाजनक मात्रक नहीं है । अतः परमाणुओं के द्रव्यमान को व्यक्त करने हेतु, द्रव्यमान के एक विशेष मानक मात्रक, **एकीकृत परमाण्वीय संहति मात्रक** (u) का प्रयोग करते हैं जिसके अनुसार

1 एकीकृत परमाण्वीय संहति मात्रक = 1 u

= कार्बन-12 समस्थानिक ($^{12}_{6}C$) के एक परमाणु की संहति का (1/12)वां अंश, जिसमें इलेक्ट्रॉनों का द्रव्यमान भी सम्मिलित है ।

= 1.66×10^{-27} kg

वैज्ञानिक धारणा के अनुसार द्रव्यमान दो प्रकार के हैं : जड़त्वीय द्रव्यमान और गुरुत्वीय द्रव्यमान । जड़त्वीय द्रव्यमान किसी वस्तु का वह गुण है जो न्यूटन के गति के द्वितीय नियमानुसार (अध्याय 5 देखें), किसी बाह्य बल के प्रति इसकी प्रतिक्रिया निर्धारित करता है । गुरुत्वीय द्रव्यमान वस्तु का वह गुण है जो न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण के नियम से प्रकट होता है (अध्याय 8 देखें) । जड़त्वीय एवं गुरुत्वीय द्रव्यमानों की तुल्यता, प्रकृति का एक अद्वितीय तथ्य है ।

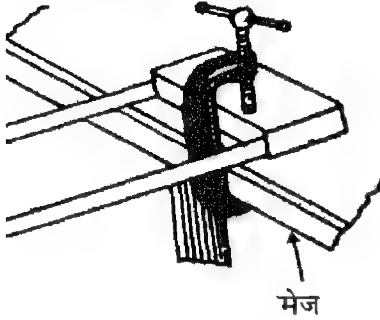
2.4.1 जड़त्वीय द्रव्यमान का मापन

किसी वस्तु के जड़त्वीय द्रव्यमान के मापन हेतु 'जड़त्वीय तुला' का प्रयोग किया जाता है । इस तुला में धातु की एक लंबी पत्ती

सारणी 2.6 लंबाइयों के परास

वस्तु का आकार अथवा दूरी	आमाप (m)
प्रोटॉन की त्रिज्या	10^{-15}
परमाण्वीय नाभिक का आकार	10^{-14}
हाइड्रोजन अणु का आकार	10^{-10}
किसी विशिष्ट जीवाणु की लंबाई	10^{-8}
प्रकाश की तरंगदैर्ध्य	10^{-7}
लाल रक्तकणिका का आकार	10^{-5}
किसी कागज की मोटाई	10^{-4}
समुद्र तल से माउंट एवरेस्ट की ऊंचाई	10^{4}
पृथ्वी की त्रिज्या	10^{7}
चंद्रमा की पृथ्वी से दूरी	10^{8}
सूर्य की पृथ्वी से दूरी	10^{11}
पृथ्वी से दूरस्थ ग्रह की दूरी	10^{13}
आकाशगंगा का आकार	10^{21}
पृथ्वी से एन्ड्रोमेडा मंदाकिनी की दूरी	10^{22}
प्रेक्षणीय विश्व की परिसीमा तक की दूरी	10^{26}

के एक सिरे को मेज के साथ बांक
। जाता है कि इसका चपटा पार्श्व
रलता से क्षैतिज कंपन कर सके ।
लड़ा जोड़ा जाता है जिसमें उस वस्तु
ान ज्ञात करना है, रखा जा सके ।
त्व पर निर्भर करते हैं न कि पृथ्वी



3 *जड़त्वीय तुला*

कंपन की आवृत्ति निम्न पर निर्भर
ुला की लंबाई (पत्ती के बहिर्विष्ट
ी के पदार्थ के कड़ेपन, और (iii)
वीय द्रव्यमान । पत्ती का आवर्तकाल
त्वीय द्रव्यमान m के वर्गमूल के

के द्रव्यमान की उपेक्षा कर सकते
वस्तु के आवर्तकाल के साथ, अज्ञात
की तुलना की जा सकती है । माना
जिनके आवर्तकाल क्रमशः T_1 व T_2

े हुए, अज्ञात द्रव्यमान m_2 ज्ञात किया

का मापन

हेतु हम कमानीदार तुला का प्रयोग
मानीदार तुला में, वस्तु पर आरोपित
ो खींचता है और कमानी की लंबाई
ा है । यह वृद्धि गुरुत्वाकर्षण बल पर
गुरुत्वीय द्रव्यमान के अनुक्रमानुपाती
ीदार तुला गुरुत्वीय द्रव्यमान मापती

है । शुरू में हम मानक द्रव्यमानों का प्रयोग करके लंबाई में वृद्धि मापते हैं और इस प्रकार कमानीदार तुला को अंशांकित कर सकते हैं । परिशुद्ध मापन हेतु कमानीदार तुला का अंशांकन और वस्तुओं के गुरुत्वीय द्रव्यमानों का मापन एक ही स्थान पर किया जाना चाहिए क्योंकि गुरुत्वीय त्वरणों का मान स्थानानुसार परिवर्तनीय है । पंसारी की दुकान में प्रयोग में लाई जाने वाली साधारण तुला उक्त समस्या से मुक्त हो जाती है क्योंकि किसी तोले जाने वाली वस्तु और मानक वाटों पर आरोपित गुरुत्वीय बल बराबर होते हैं (g के प्रभाव के निरसन होने के कारण) ।

2.4.3 द्रव्यमानों का परास

विश्व में पाई जाने वाली वस्तुओं के द्रव्यमानों का विस्तार क्षेत्र अत्यधिक व्यापक है । जो किसी इलेक्ट्रॉन के सूक्ष्म द्रव्यमान की कोटि (10^{-30} kg) से ज्ञात विश्व के विशाल द्रव्यमान की कोटि (लगभग 10^{55} kg) तक फैला हुआ है । सारणी 2.7 में विभिन्न वस्तुओं के विशिष्ट द्रव्यमानों की कोटि और परास दिए गए हैं ।

सारणी 2.7 द्रव्यमानों के परास

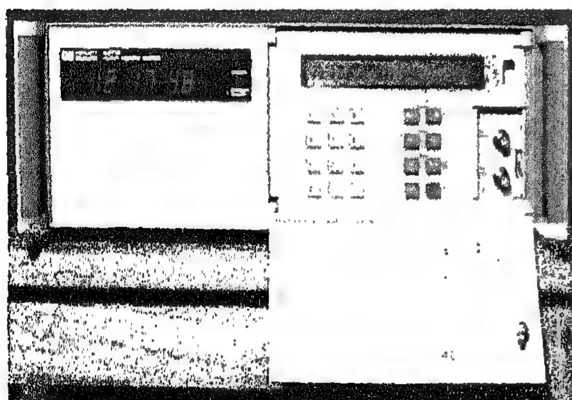
वस्तु	द्रव्यमान (kg)
इलेक्ट्रॉन	10^{-30}
प्रोटॉन	10^{-27}
यूरेनियम परमाणु	10^{-25}
लाल रक्त कोशिका	10^{-13}
धूल-कण	10^{-9}
वर्षा की बूंद	10^{-6}
मच्छर	10^{-5}
अंगूर	10^{-3}
मनुष्य	10^{2}
आटोमोबाइल	10^{3}
बोइंग 747 वायुयान	10^{8}
चंद्रमा	10^{23}
पृथ्वी	10^{25}
सूर्य	10^{30}
आकाशगंगा	10^{41}
प्रेक्षणीय विश्व	10^{55}

2.5 समय का मापन

किसी भी समयान्तराल के मापन के लिए हमें घड़ी की आवश्यकता होती है । समय-मापन के लिए श्रेष्ठतर मानक की आवश्यकता में **'परमाणु घड़ियां'** विकसित की गई हैं । अब हम समय मापन हेतु परमाण्वीय मानक प्रयोग करते हैं जो सीज़ियम परमाणु में उत्पन्न आवर्त कंपनों पर आधारित हैं । राष्ट्रीय मानकों में प्रयोग की जाने वाली **सीज़ियम घड़ी** जिसे **परमाणु घड़ी** भी कहते हैं का यही आधार है । ऐसे मानक अनेक प्रयोगशालाओं

में उपलब्ध हैं। सीज़ियम परमाणु घड़ी में एक सेकंड सीज़ियम-133 परमाणु के 9,192,631,770 कंपनों के संगत समय माना जाता है। सीज़ियम परमाणु के कंपन सीज़ियम परमाणु घड़ी के कंपन दर को ठीक वैसे ही समंजित करते हैं जैसे कि संतोलक चक्र के कंपन साधारण कलाई-घड़ी को समंजित करते हैं, या एक छोटे क्वार्ट्ज़ क्रिस्टल के कंपन किसी क्वार्ट्ज़ कलाई-घड़ी को समंजित करते हैं।

सीज़ियम परमाणु घड़ियां बहुत ही परिशुद्ध हैं। सिद्धांततः ये सुवाह्य मानक उपलब्ध कराते हैं। हमें समय मानक की प्रतिलिपि के लिए फ्रांस जाने की आवश्यकता नहीं पड़ती है बल्कि हमें केवल सीज़ियम परमाणु घड़ी बनाने की आवश्यकता है। समयान्तराल के राष्ट्रीय मानक 'सेकंड' और इसके अतिरिक्त आवृत्ति का रख-रखाव चार सीज़ियम परमाणु घड़ियों द्वारा किया जाता है। चित्र 2.4 में राष्ट्रीय भौतिक प्रयोगशाला (N.P.L.), नई दिल्ली में भारतीय मानक समय के रख-रखाव हेतु सीज़ियम परमाणु घड़ी दर्शाई गई है। हमारे देश में, समय आवृत्ति समेत भौतिक मानकों के रख-रखाव एवं उनमें सुधार आदि का उत्तरदायित्व राष्ट्रीय भौतिक प्रयोगशाला, नई दिल्ली का है।



चित्र 2.4 भारतीय मानक समय के रख-रखाव हेतु N.P.L., नई दिल्ली में रखी परमाणु घड़ी।

ध्यान दें कि भारतीय मानक समय (Indian Standard Time) इन परमाणु घड़ियों के समूह से संबंधित है। सीज़ियम परमाणु घड़ियां इतना यथार्थ समय बताती हैं कि समय मापन में अनिश्चितता $\pm 1 \times 10^{-13}$, अर्थात् 10^{13} में 1 अंश है। इसका अर्थ है कि इन घड़ियों में 1 वर्ष में $\pm 3\ \mu s$ से अधिक समय का अन्तर नहीं आता है। समय मापन में बहुत अधिक यथार्थता के कारण लंबाई के SI मात्रक को प्रकाश द्वारा निश्चित समय अंतराल (1/299,792,458 वें सेकंड) में तय की गई पथ-लंबाई के पदों में व्यक्त किया गया है।

उदाहरण 2.6 दो घड़ियों का किसी राष्ट्रीय प्रयोगशाला में रखी एक मानक घड़ी के साथ परीक्षण किया जा रहा है। जिस समय मानक घड़ी में दोपहर के 12:00:00 बजते हैं उस समय उन दो घड़ियों के पाठ्यांक इस प्रकार हैं :

	घड़ी 1	घड़ी 2
सोमवार	12 : 00 : 05	10 : 15 : 06
मंगलवार	12 : 01 : 15	10 : 14 : 59
बुधवार	11 : 59 : 08	10 : 15 : 18
बृहस्पतिवार	12 : 01 : 50	10 : 15 : 07
शुक्रवार	11 : 59 : 15	10 : 14 : 53
शनिवार	12 : 01 : 30	10 : 15 : 24
रविवार	12 : 01 : 19	10 : 15 : 11

यदि आप कोई प्रयोग कर रहे हैं जिसमें समय अंतराल के परिशुद्ध मापों की आवश्यकता है तो आप इन दोनों घड़ियों में से कौन-सी घड़ी चुनेंगे ?

हल सात दिनों के प्रेक्षण में परिवर्तन का परास घड़ी 1 के लिए 162 s है और घड़ी 2 के लिए 31 s है। घड़ी 1 का औसत पाठ्यांक घड़ी 2 के औसत पाठ्यांक की तुलना में मानक समय के अधिक निकट है। महत्त्वपूर्ण बात यह है कि घड़ी की 'शून्य-त्रुटि' परिशुद्ध कार्य के लिए उतनी महत्त्वपूर्ण नहीं है जितना कि इसमें परिवर्तन क्योंकि 'शुन्य-त्रुटि' को सदैव सरलता से दूर किया जा सकता है। इसलिए घड़ी 1 के बजाए घड़ी 2 को वरीयता दी जाएगी। ◀

विश्व में विभिन्न घटनाओं के समय अंतराल का परास व्यापक है। सारणी 2.8 में कुछ महत्त्वपूर्ण समय अंतरालों की कोटि और परास दर्शाए गए हैं।

सारणी 2.6 एवं 2.8 का अवलोकन करने पर आप देखेंगे कि विभिन्न आमाप और समय अंतराल में एक रोचक संयोग है। ध्यान दें कि विश्व में वस्तुओं की सबसे अधिक लंबाई और सूक्ष्मतम लंबाई की मापों का अनुपात लगभग 10^{41} है। इसी प्रकार हमारे विश्व में वस्तुओं और घटनाओं से संबंधित अधिकतम और सूक्ष्मतम समय अंतरालों का अनुपात भी 10^{41} है। वस्तुओं के द्रव्यमानों की सूची सारणी 2.7 में संख्या 10^{41} फिर से प्रकट होती है। विश्व के अधिकतम और न्यूनतम द्रव्यमानों का अनुपात $(10^{41})^2$ है। क्या संख्याओं के विशाल समूह में यह विलक्षण संपात मात्र सांयोगिक है ?

सारणी 2.8 समय अंतरालों का परास

घटना	समय अंतराल (s)
किसी अत्यधिक अस्थायी कण का जीवन काल	$\sim 10^{-24}$
प्रकाश द्वारा नाभिकीय दूरी को तय करने में लगा समय	$\sim 10^{-22}$
X- किरणों का आवर्तकाल	$\sim 10^{-19}$
परमाण्वीय कंपनों का आवर्तकाल	10^{-15}
प्रकाश तरंग का आवर्तकाल	10^{-15}
किसी परमाणु की उत्तेजित अवस्था का जीवनकाल	10^{-8}
रेडियो तरंग का आवर्तकाल	10^{-6}
ध्वनि तरंग का आवर्तकाल	10^{-3}
आंख के झपकने में लगा समय	10^{-1}
मानव हृदय की क्रमिक धड़कनों में लगा समय	$\sim 10^{0}$ (या 1)
प्रकाश के चंद्रमा से पृथ्वी तक आने में लगा समय	10^{0}
प्रकाश के सूर्य से पृथ्वी तक आने में लगा समय	10^{2}
किसी उपग्रह का आवर्तकाल	10^{4}
पृथ्वी का घूर्णनकाल	10^{5}
चंद्रमा का घूर्णन एवं परिक्रमण काल	10^{6}
पृथ्वी का परिक्रमण काल	10^{7}
प्रकाश के समीपी तारे से पृथ्वी तक आने में लगा समय	10^{8}
मानव का औसत जीवनकाल	10^{9}
मिस्र के पिरामिडों की आयु	10^{11}
डाइनासॉर के विलुप्त होने के बाद बीता समय	10^{15}
विश्व की आयु	10^{17}

2.6 यथार्थता, यंत्रों की परिशुद्धता तथा मापन में त्रुटियां

मापन दैनिक जीवन का अत्यन्त आवश्यक अंग है और यह सभी प्रायोगिक विज्ञान एवं प्रौद्योगिकी का आधार है । किसी भी भौतिक राशि का मापित मान प्राय: उसके सत्य मान से भिन्न होता है । किसी भी मापक यंत्र से ली गई प्रत्येक माप का परिणाम कोई सन्निकट संख्या होती है जिसमें कुछ अनिश्चितता होती है । यह अनिश्चितता **'त्रुटि'** कहलाती है । प्रत्येक परिकलित राशि जो मापित मानों पर आधारित है, में भी कुछ त्रुटि होती है । यहां हम दो पदों, **यथार्थता** और **परिशुद्धता** में भेद निम्न प्रकार से कर सकते हैं । किसी मान की यथार्थता वह माप है जो यह बताती है कि किसी राशि का मापित मान उसके सत्य मान के कितना समीप है, जबकि परिशुद्धता हमें यह बताती है कि कोई राशि किस विभेदन या सीमा तक मापी गई है ।

मापन में यथार्थता, मापक यंत्र की विभेदन या सीमा के साथ-साथ कई बातों पर निर्भर कर सकती है । उदाहरणार्थ, मान लीजिए कि किसी वस्तु की लंबाई का सत्य मान 3.678 cm है । किसी एक प्रयोग में, 0.1 cm विभेदन वाले मापक यंत्र द्वारा प्राप्त वस्तु की लंबाई का मापित मान 3.5 cm और किसी दूसरे प्रयोग में अधिक विभेदन (0.01 cm) वाले मापक यंत्र द्वारा प्राप्त उसी लंबाई का मापित मान 3.38 cm है । अत: पहली मापन विधि द्वारा प्राप्त माप अधिक यथार्थ (क्योंकि यह सत्य मान के समीप है) परंतु कम परिशुद्ध (क्योंकि इसकी विभेदन केवल 0.1 cm है) जबकि दूसरी मापन विधि द्वारा प्राप्त माप कम यथार्थ परंतु अधिक परिशुद्ध है । अत: मापन में त्रुटियों के कारण प्रत्येक माप सन्निकट माप है । साधारणतया मापन में त्रुटियों का वर्गीकरण निम्न प्रकार किया जा सकता है : (i) क्रमबद्ध और (ii) यादृच्छिक त्रुटियां ।

क्रमबद्ध त्रुटियां

क्रमबद्ध त्रुटियां वे त्रुटियां हैं जो किसी भी एक दिशा, धनात्मक या ऋणात्मक की ओर प्रवृत्त होती हैं । इसके कुछ कारण निम्न हैं :

(a) **यंत्रीय त्रुटियां** : ये त्रुटियां मापक यंत्र के सदोष अभिकल्प या उसके त्रुटिपूर्ण अंशांकन या उसमें शून्य त्रुटि आदि के कारण उत्पन्न होती हैं । उदाहरणार्थ, हो सकता है कि किसी तापमापी का अंशांकन त्रुटिपूर्ण हो (जिसके कारण यह STP पर जल के क्वथनांक 100°C को 104°C दिखा सकता है); किसी वर्नियर केलीपर्स में वर्नियर पैमाने की शून्य रेखा, मुख्य पैमाने की शून्य रेखा की सीध में नहीं हो अथवा किसी साधारण मीटर पैमाने का एक सिरा घिसा हुआ हो ।

(b) **प्रायोगिक तकनीक अथवा विधि में अपूर्णता :** उदाहरणार्थ, किसी मानव शरीर का ताप मापने के लिए जब तापमापी को बगल में लगाया जाता है तो यह शरीर के वास्तविक तापमान से कम ताप दिखाता है । प्रयोग की अवधि में कुछ अन्य बाह्य दशाएं (जैसे ताप, आर्द्रता, वायुवेग इत्यादि में परिवर्तन) मापन को क्रमबद्ध रूप से प्रभावित कर सकती हैं ।

(c) **व्यक्तिगत त्रुटियां** : ये त्रुटियां प्रयोग करने वाले व्यक्ति विशेष की अभिनति, उपकरण के उचित विन्यास के अभाव में या प्रेक्षक द्वारा बिना उचित सावधानी बरते प्रेक्षण लिए गए हों, इत्यादि । उदाहरणार्थ, यदि आप अपनी आदत के अनुसार पैमाने पर सुई की स्थिति पढ़ते समय अपने सिर को दाईं ओर कुछ अधिक दूर तक रखते हैं तब आप लंबन के कारण कोई त्रुटि पैदा कर देंगे ।

यादृच्छिक त्रुटियां

ये त्रुटियां अनियमित रूप से होती हैं और इसलिए चिह्न तथा आकार की दृष्टि से ये **यादृच्छिक** होती हैं । ये प्रायोगिक दशाओं में यादृच्छिक और अननुमेय अस्थिरता (उदाहरणार्थ, ताप, वोल्टेज सप्लाई, प्रायोगिक व्यवस्था में यांत्रिक कंपनों के कारण अननुमेय अस्थिरता, इत्यादि), प्रेक्षक द्वारा लिए गए पाठ्यांकों में व्यक्तिगत (अनभिनत) त्रुटियों के कारण, इत्यादि उत्पन्न हो सकती हैं । उदाहरणार्थ, जब एक ही व्यक्ति किसी प्रेक्षण को कई बार दोहराता है तो संभवत: प्रत्येक बार वह उनके विभिन्न मान प्राप्त कर सकता है ।

अल्पतमांक त्रुटियां

अल्पतमांक त्रुटियां वे त्रुटियां हैं जो यंत्र विभेदन के साथ जुड़ी होती हैं । उदाहरणार्थ, किसी वर्नियर केलीपर्स का अल्पतमांक 0.001cm है । अल्पतमांक त्रुटि एक सीमित आमाप तक यादृच्छिक त्रुटियों की श्रेणी से संबंधित है । हालांकि यह त्रुटि क्रमबद्ध और यादृच्छिक दोनों प्रकार की हो सकती है । यदि हम लंबाई मापन हेतु मीटर पैमाने का प्रयोग करते हैं तो मीटर पैमाने पर अंशांकन 1 mm के अंतराल पर हो सकते हैं । मापक यंत्र द्वारा मापे जा सकने वाली न्यूनतम लंबाई को उस मापक यंत्र की **'अल्पतमांक'** कहते हैं । इस यंत्र द्वारा मापित सभी मान केवल अल्पतमांक तक ही परिशुद्ध हो सकते हैं । किसी यंत्र के प्रयोग में त्रुटि प्राय: उस यंत्र के पैमाने के न्यूनतम भाग के आधे के बराबर ली जाती है । अत: उपरोक्त मीटर पैमाने के प्रयोग में त्रुटि ± 0.5 mm या ± 0.05 cm होगी । मान लीजिए कि किसी वस्तु का एक सिरा मीटर पैमाने के शून्यांक के संपाती है तथा इसका दूसरा सिरा 2.1 cm और 2.2 cm के अंशांकनों के मध्य है । मीटर पैमाने से इस वस्तु की माप 2.15 ± 0.05 cm नोट कर सकते हैं जबकि स्लाइड केलिपर्स जिसमें वर्नियर पैमाने के 10 भाग मुख्य पैमाने पर 9 mm के बराबर होते हैं, से यह त्रुटि ± 0.05 mm या ± 0.005 cm हो सकती है । इन त्रुटियों को **यंत्रीय त्रुटियां** कहते हैं ।

प्रायोगिक विधियों को सुधार कर, अच्छे यंत्रों के चुनाव द्वारा और व्यक्तिगत अभिनति को जहां तक संभव हो, दूर करके क्रमबद्ध त्रुटियों को न्यूनतम किया जा सकता है । किसी दिए हुए उपकरण हेतु इन त्रुटियों का निश्चित सीमा तक आकलन करके पाठ्यांक में आवश्यक संशोधन किया जा सकता है । उच्चतर परिशुद्धता के यंत्रों के प्रयोग से, प्रायोगिक तकनीक में सुधार लाने, इत्यादि से अल्पतमांक त्रुटि को कम से कम किया जा सकता है । यादृच्छिक त्रुटियों को न्यूनतम करने के लिए कई बार प्रेक्षण लेकर उन सभी प्रेक्षणों का **समान्तर माध्य** लिया जाता है । ये माध्य मान मापित राशि के सत्य मान के बहुत ही समीप होगा ।

पूर्व विवेचन से आप यह समझ गए होंगे कि मापन की यथार्थता क्रमबद्ध त्रुटियों से संबंधित है और इसकी परिशुद्धता यादृच्छिक त्रुटियों, जिसमें अल्पतमांक त्रुटि भी सम्मिलित है, से संबंधित है ।

2.6.1 निरपेक्ष त्रुटि, सापेक्ष त्रुटि और प्रतिशत त्रुटि

(a) मान लीजिए कि कई मापनों के मान $a_1, a_2, \ldots, a_n$ हैं । इनका समान्तर माध्य, मापन की परिस्थितियों में, राशि का सबसे संभव मान माना जाता है ।

$$a_{mean} = \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)}{n} \quad (2.4)$$

अथवा

$$a_{mean} = \sum_{i=1}^{n} a_i / n \quad (2.5)$$

इसका कारण यह है (जैसी कि पहले व्याख्या की गई है) कि यह मानना उचित है कि व्यक्तिगत मापन से राशि के सत्य मान के जितने अधिआकलन की संभावना है उतने ही अवआकलन की भी संभावना है ।

राशि के मान और व्यक्तिगत मापित मान के बीच के अंतर के परिमाण को मापन 'निरपेक्ष त्रुटि' कहा

जाता है । इसे Δa द्वारा दर्शाया जाता है । (क्योंकि हम किसी राशि का वास्तविक मान नहीं जानते, इसलिए हम समान्तर माध्य को सत्य मान स्वीकार कर लेते हैं) । तब हमारे मापनों में निरपेक्ष त्रुटियां इस प्रकार हैं :

$\Delta a_1 = a_{mean} - a_1$

$\Delta a_2 = a_{mean} - a_2$

... ...

... ...

$\Delta a_n = a_{mean} - a_n$

किन्हीं दशाओं में निरपेक्ष त्रुटियां धनात्मक हो सकती हैं और किन्हीं अन्य दशाओं में ऋणात्मक ।

(b) सभी निरपेक्ष त्रुटियों के समांतर माध्य को राशि a के मान में अंतिम (या माध्य) निरपेक्ष त्रुटि माना जाता है । इसे Δa_{mean} से निरूपित किया जाता है ।

$$\Delta a_{mean} = \frac{|\Delta a_1| + |\Delta a_2| + ... + |\Delta a_n|}{n} \qquad (2.6)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |\Delta a_i| / n \qquad (2.7)$$

यदि हम केवल एक ही मापन लें तो इसका मान a परास $a_{mean} \pm \Delta a_{mean}$ में हो सकता है,

अर्थात् $a = a_{mean} \pm \Delta a_{mean}$

अथवा

$$a_{mean} - \Delta a_{mean} \le a \le a_{mean} + \Delta a_{mean} \qquad (2.8)$$

इसमें यह अन्तर्निहित है कि भौतिक राशि a की कोई माप $(a_{mean} + \Delta a_{mean})$ और $(a_{mean} - \Delta a_{mean})$ के मध्य संभाव्य है ।

(c) निरपेक्ष त्रुटि के स्थान पर प्राय: हम सापेक्ष त्रुटि या प्रतिशत त्रुटि (δa) का भी प्रयोग करते हैं ।

$$\text{प्रतिशत त्रुटि } \delta a = \left(\frac{\Delta a_{mean}}{a_{mean}}\right) \times 100\% \qquad (2.10)$$

आइए, अब हम एक उदाहरण पर विचार करते हैं ।

उदाहरण 2.7 हम किसी साधारण लोलक का आवर्तकाल मापते हैं । उत्तरोत्तर मापनों के पठन हैं 2.63 s, 2.56 s, 2.42 s, 2.71 s और 2.80 s । निरपेक्ष त्रुटि, सापेक्ष त्रुटि या प्रतिशत त्रुटि का परिकलन कीजिए ।

हल लोलक का माध्य आवर्तकाल है

$$T = \frac{(2.63 + 2.56 + 2.42 + 2.71 + 2.80)\,s}{5}$$

$$= \frac{13.12}{5}\,s = 2.624\,s = 2.62\,s$$

(क्योंकि सभी काल 0.01 s के विभेदन तक मापे हुए हैं इसलिए सभी समय दूसरे दशमलव स्थान तक हैं । इस माध्य काल को भी दूसरे दशमलव स्थान तक लिखना उचित है) ।

मापन में निरपेक्ष त्रुटियां हैं :

2.63 s − 2.62 s = 0.01 s

2.56 s − 2.62 s = −0.06 s

2.42 s − 2.62 s = −0.20 s

2.71 s − 2.62 s = 0.09 s

2.80 s − 2.62 s = 0.18 s

यह नोट कीजिए कि निरपेक्ष त्रुटियों के भी वही मात्रक हैं जो मापी जाने वाली राशि के हैं ।

सभी निरपेक्ष त्रुटियों का समांतर माध्य (समांतर माध्य के लिए हम केवल परिमाण लेते हैं)

$$\Delta T_{mean} = \frac{(0.01 + 0.06 + 0.20 + 0.09 + 0.18)}{5}\,s$$

$$= \frac{0.54\,s}{5} = 0.11\,s$$

इसका अर्थ है कि साधारण लोलक का आवर्तकाल (2.62 ± 0.11) s है, अर्थात् यह (2.62 + 0.11) s तथा (2.62 − 0.11) s या 2.73 s तथा 2.51 s के बीच है । क्योंकि सभी निरपेक्ष त्रुटियों का समांतर माध्य 0.11 s है, इसलिए सेकंड के दसवें भाग में पहले ही कोई त्रुटि है । अत: समय अंतराल को सौवें भाग तक व्यक्त करने का कोई अर्थ नहीं है । अत: लिखने का सही तरीका है,

$$T = 2.6 \pm 0.1\,s$$

यह नोट कीजिए कि अंतिम अंक 6 में निश्चितता नहीं है क्योंकि यह 5 तथा 7 के बीच में कुछ भी हो सकता है । हम यह कहकर

इसका संकेत देते हैं कि इस मापन के दो सार्थक अंक हैं। इस प्रकरण में ये दो सार्थक अंक हैं–2 जो विश्वसनीय है, और 6 जिसमें कोई त्रुटि संबद्ध है।

सार्थक अंकों के विषय में अधिक विस्तार से आप अनुभाग 2.7 में अध्ययन करेंगे।

इस उदाहरण के लिए, सापेक्ष त्रुटि या प्रतिशत त्रुटि है

$$\delta a = \frac{0.1}{2.6} \times 100 = 4\%$$

◄

2.6.2 त्रुटियों का संयोजन

यदि हम कोई ऐसा प्रयोग करें जिसमें कई मापन लेने पड़ते हैं, तो हमें यह अवश्य ही जानना चाहिए कि सभी मापनों में किस प्रकार त्रुटियां समायोजित होती हैं। उदाहरण के लिए, घनत्व पदार्थ के द्रव्यमान तथा उसके आयतन का अनुपात है। यदि द्रव्यमान तथा आकार के मापन में त्रुटियां हैं तो हमें यह अवश्य जानना चाहिए कि घनत्व में कितनी त्रुटि होगी। इस तरह के अनुमान लगाने के लिए हम निम्नलिखित विधि का उपयोग करते है।

(a) *किसी संकलन अथवा व्यवकलन में त्रुटि*

मान लीजिए कि दो राशियों A तथा B के मापे गए मान क्रमशः $A \pm \Delta A$, $B \pm \Delta B$ हैं, जहां ΔA तथा ΔB उनकी निरपेक्ष त्रुटियां हैं।

हम इन राशियों के जोड़ $Z = A + B$ में त्रुटि ΔZ ज्ञात करना चाहते हैं।

जोड़ करने से,

$$Z \pm \Delta Z = (A \pm \Delta A) + (B \pm \Delta B),$$

Z में अधिकतम संभव त्रुटि

$$\Delta Z = \Delta A + \Delta B$$

तथा इन राशियों के अंतर $Z = A - B$ के लिए

$$Z \pm \Delta Z = (A \pm \Delta A) - (B \pm \Delta B)$$
$$= (A - B) \pm \Delta A \pm \Delta B$$

या

$$\pm \Delta Z = \pm \Delta A \pm \Delta B$$

त्रुटि ΔZ का अधिकतम मान फिर से $\Delta A + \Delta B$ ही है।

अतः यह नियम है : ***जब दो राशियों को जोड़ा या घटाया जाता है तो अंतिम परिणाम में निरपेक्ष त्रुटि, राशियों में निरपेक्ष त्रुटियों का जोड़ होता है।***

► *उदाहरण 2.8* दो प्रतिरोध $R_1 = (100 \pm 3)$ ओम तथा $R_2 = (200 \pm 4)$ ओम को श्रेणीक्रम में जोड़ा गया है। श्रेणीक्रम संयोजन में तुल्य प्रतिरोध ज्ञात कीजिए।

हल तुल्य प्रतिरोध $R = R_1 + R_2 =$

(100 ± 3) ओम $+ (200 \pm 4)$ ओम $= (300 \pm 7)$ ओम

◄

(b) *गुणनफल या भागफल की त्रुटि*

मान लीजिए $Z = AB$ और A व B के मापे गए मान $A \pm \Delta A$ तथा $B \pm \Delta B$ हैं। तब

$$Z \pm \Delta Z = (A \pm \Delta A)(B \pm \Delta B)$$
$$= AB \pm B\Delta A \pm A\Delta B \pm \Delta A\Delta B$$

वामावर्ती पक्ष को Z से तथा दक्षिण पक्ष को AB से विभाजित करने पर,

$1 \pm (\Delta Z/Z) = 1 \pm (\Delta A/A) \pm (\Delta B/B) \pm (\Delta A/A)(\Delta B/B)$

क्योंकि ΔA व ΔB के मान बहुत कम हैं अतः हम उनके गुणनफल की उपेक्षा करेंगे।

अतः Z में अधिकतम भिन्नात्मक त्रुटि :

$\Delta Z/Z = (\Delta A/A) + (\Delta B/B)$

आप यह सरलता से सत्यापित कर सकते हैं कि यह समीकरण विभाजन के लिए भी सत्य है। **अतः यह नियम है :** ***जब दो राशियों को गुणा या विभाजित किया जाता है तो परिणाम में भिन्नात्मक त्रुटि, गुणकों में भिन्नात्मक त्रुटियों के योग के बराबर होती है।***

► *उदाहरण 2.9* प्रतिरोधक $R = V/I$ जहां $V = (100 \pm 5)$ V और $I = (10 \pm 0.2)$ A हैं। R में प्रतिशत त्रुटि ज्ञात कीजिए।

हल V में प्रतिशत त्रुटि 5% है और I में 2% है। अतः R के मान में कुल त्रुटि 5% + 2% = 7% होगी। ◄

(c) *मापित राशि की घात के कारण त्रुटि*

मान लीजिए $Z = A^2$

तब $\Delta Z/Z = (\Delta A/A) + (\Delta A/A) = 2(\Delta A/A)$

अतः A^2 में भिन्नात्मक त्रुटि, A में त्रुटि की दो गुनी है।

व्यापक रूप से, यदि $Z = A^p B^q / C^r$

तब $\Delta Z/Z = p\,(\Delta A/A) + q\,(\Delta B/B) + r\,(\Delta C/C)$

अतः यह नियम है : ***किसी भौतिक राशि जिस पर घात चढ़ाई गई हो, में भिन्नात्मक त्रुटि, उस व्यक्तिगत राशि में भिन्नात्मक त्रुटि को घात से गुणा करने पर प्राप्त होती है।***

► *उदाहरण 2.10* Z में भिन्नात्मक त्रुटि ज्ञात कीजिए यदि $Z = A^4 B^{1/3} / CD^{3/2}$

हल Z में भिन्नात्मक त्रुटि है

$$\frac{\Delta Z}{Z} = 4\left(\frac{\Delta A}{A}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta B}{B}\right) + \left(\frac{\Delta C}{C}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{\Delta D}{D}\right)$$

◄

> ▶ *उदाहरण 2.11* किसी साधारण लोलक का आवर्तकाल $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ है जिस में L लगभग 10 cm है और इसकी यथार्थता 1 mm तक है । आवर्तकाल लगभग 0.5 s है । एक घड़ी से जिसका विभेदन 1s है, 100 दोलनों के लिए समय मापा गया है । g का मान ज्ञात करने में कितनी यथार्थता है ?

हल $g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$

$$100\left(\frac{\Delta g}{g}\right) = 100\left(\frac{\Delta L}{L}\right) + 2\times100\left(\frac{\Delta T}{T}\right)$$

L में प्रतिशत त्रुटि $= 100\left(\frac{\Delta L}{L}\right) = 100\times\frac{0.1}{10} = 1\%$

T में प्रतिशत त्रुटि $= 100\left(\frac{\Delta T}{T}\right) = 100\times\frac{1}{50} = 2\%$

g में प्रतिशत त्रुटि $= 100\frac{\Delta g}{g}$

$$= 100\frac{\Delta L}{L} + 2\times100\frac{\Delta T}{T}$$

$$= 1\% + 2\times2\% = 5\%$$ ◀

2.7 सार्थक अंक

जैसा कि ऊपर दिया गया है कि प्रत्येक मापन में त्रुटि निहित है । अत: किसी भी मापन का परिणाम इस प्रकार प्रस्तुत किया जाना चाहिए कि यह मापन की परिशुद्धता को इंगित करता हो । साधारणतया किसी मापन का प्रस्तुत परिणाम वह संख्या है जिसमें किसी संख्या के वे सभी अंक सम्मिलित हैं जो विश्वसनीय हैं तथा अंतिम अंक अनिश्चित है । किसी संख्या में विश्वसनीय अंकों तथा अनिश्चित प्रथम अंक को **सार्थक अंक** कहते हैं ।

यदि हम कहें कि किसी साधारण लोलक का आवर्तकाल 1.62 s है तो इसमें अंक 1 और 6 विश्वसनीय और निश्चित हैं जबकि अंक 2 अनिश्चित है । अत: मापित राशि में तीन सार्थक अंक हैं । मापन के पश्चात् किसी वस्तु की लंबाई 287.5 cm लिखी गई जिसमें चार सार्थक अंक हैं । इस संख्या में अंक 2, 8, 7 निश्चित हैं जबकि अंक 5 अनिश्चित है । अत: राशि के मापन के परिणाम में सार्थक अंकों से अधिक अंक लिखना अनावश्यक एवं भ्रामक होगा क्योंकि यह माप की परिशुद्धता (precision) के विषय में गलत धारणा देगा । इस प्रकार किसी वस्तु की लंबाई, 16.2 cm से तात्पर्य है कि $l = (16.20 \pm 0.05)$ cm, अर्थात् इसकी लंबाई 16.15 cm और 16.25 cm के मध्य होगी ।

किसी भी संख्या में सार्थक अंकों की संख्या निम्न उदाहरणों से समझ सकते हैं । जैसा कि पहले उल्लिखित है कि सार्थक अंक किसी माप की परिशुद्धता की ओर संकेत करते हैं जो मापक यंत्र के अल्पतमांक पर निर्भर करता है । **किसी मापन में विभिन्न मात्रकों के चयन से भी सार्थक अंकों की संख्या अपरिवर्तित रहती है ।** यह महत्त्वपूर्ण टिप्पणी निम्न प्रेक्षणों को अधिक स्पष्ट करती है :

(1) उदाहरणार्थ, लंबाई 2.308 cm में चार सार्थक अंक हैं । परंतु विभिन्न मात्रकों में इस मान को क्रमशः 0.02308 m या 23.08 mm या 23080 μm लिखा जा सकता है ।

इन सभी संख्याओं में सार्थक अंकों की संख्या चार है (अंक 2, 3, 0, 8) । यह स्पष्ट है कि दशमलव बिंदु की स्थिति का सार्थक अंकों की संख्या के निर्धारण में कोई महत्त्व नहीं है । उपरोक्त उदाहरण निम्न नियम सुझाते हैं :

- ***सभी शून्येतर अंक सार्थक अंक हैं ।***
- ***यदि किसी संख्या में दशमलव बिंदु है तो उसका ध्यान रखे बिना किन्हीं दो शून्येतर अंकों के मध्य सभी शून्य सार्थक अंक हैं ।***
- ***यदि कोई संख्या 1 से छोटी है तो दशमलव बिंदु के दाईं ओर के शून्य जो प्रथम शून्येतर अंक के बाईं ओर हैं, सार्थक अंक नहीं होते हैं ।*** (0.002308 में अध: रेखांकित शून्य सार्थक अंक नहीं हैं।)
- ***किसी संख्या में दशमलव बिंदु के बिना अनुगामी शून्य सार्थक अंक नहीं होते हैं ।***

  (अत: 123 m = 12300 cm = 123000 mm में तीन सार्थक अंक हैं । अनुगामी शून्य सार्थक अंक नहीं है । फिर भी आप अगले प्रेक्षण को देख सकते हैं ।)
- ***किसी संख्या में जिसमें दशमलव बिंदु हो, अनुगामी शून्य सार्थक अंक होते हैं ।***

  (जैसे संख्या 3.500 या 0.06900 में चार सार्थक अंक हैं ।)

(2) अनुगामी शून्य सार्थक अंक हैं या नहीं इस विषय में भ्रांति हो सकती है । मान लीजिए किसी वस्तु की लंबाई 4.700 m लिखी गई है । इस प्रेक्षण से स्पष्ट है कि यहां शून्यों का उद्देश्य माप की परिशुद्धता को बतलाता हैं अत: यहां ये शून्य सार्थक अंक हैं । (यदि ये शून्य सार्थक अंक नहीं हैं तो इन शून्यों को स्पष्ट रूप से लिखना अनावश्यक होगा और लिखी गई माप को हम 4.7 m लिख सकते हैं ।) अब यदि हम मात्रकों में परिवर्तन करते हैं तब,

4.700 m = 470.0 cm = 4700 mm = 0.004700 km

क्योंकि अंतिम संख्या में अनुगामी शून्य बिना दशमलव हैं, यहां हम ऊपर दिए गए प्रेक्षण (1) के आधार पर, संख्या में सार्थक

अंकों की संख्या दो बताएंगे जबकि वास्तव में इस संख्या में सार्थक अंकों की संख्या 4 है और मात्रकों में परिवर्तन कर देने मात्र से ही किसी संख्या में सार्थक अंकों की संख्या में परिवर्तन नहीं लाया जा सकता है ।

(3) सार्थक अंकों की संख्या निर्धारण में ऊपर बताई गई संदिग्धता को दूर करने हेतु सर्वोत्तम उपाय है कि प्रत्येक माप को वैज्ञानिक संकेत (10 की घात) में लिखा जाए । इस संकेत पद्धति में प्रत्येक संख्या को $a \times 10^b$ के रूप में व्यक्त किया जाता है जहां a, 1 से 10 के मध्य कोई संख्या है और b, 10 की कोई भी धनात्मक या ऋणात्मक घात है । साधारणतया किसी भी संख्या में दशमलव प्रथम अंक के बाद लिखा जाता है जिससे कि ऊपर वर्णित भ्रांति दूर हो जाती है ।

$$4.700 \text{ m} = 4.700 \times 10^2 \text{ cm} = 4.700 \times 10^3 \text{ mm}$$
$$= 4.700 \times 10^{-3} \text{ km}$$

यहां सार्थक अंकों के निर्धारण में 10 की घात असंगत है । तथापि वैज्ञानिक संकेत में आधार संख्या में आने वाले सभी शून्य सार्थक अंक हैं । अत: ऊपर लिखी गई संख्याओं में से प्रत्येक संख्या में सार्थक अंकों की संख्या चार है ।

इस प्रकार वैज्ञानिक संकेत में आधार संख्या a में अनुगामी शून्यों के विषय में कोई भ्रांति उत्पन्न नहीं होती है वरन् वे सर्वदा सार्थक अंक हैं ।

(4) किसी भी माप के प्रस्तुतीकरण में वैज्ञानिक संकेत विधि आदर्श विधि है । परंतु यदि यह विधि नहीं अपनायी जाती है तो पूर्वगामी उदाहरण में प्रयुक्त नियम को अपनाते हैं । यथा–

- ***यदि दी हुई दशमलवरहित संख्या 1 से बड़ी है तो अनुगामी शून्य सार्थक अंक नहीं हैं ।***
- ***दशमलव युक्त संख्या में अनुगामी शून्य सार्थक अंक हैं।***

(5) अंततः, किसी 1 से छोटी संख्या (जैसे 0.1250) में दशमलव से पूर्व लिखा जाने वाला शून्य कभी भी सार्थक अंक नहीं होता है । तथापि किसी माप में ऐसी संख्या के अंत में आने वाले शून्य सार्थक अंक होते हैं ।

2.7.1 अंकीय संक्रिया में सार्थक अंक निर्धारण हेतु नियम

किसी परिकलन का परिणाम जिसमें राशियों के सन्निकट मापे गए मान सम्मिलित हैं (अर्थात् वे मान जिनमें सार्थक अंकों की संख्या सीमित है) उसे मूल रूप से मापे गए मानों की अनिश्चितता दिखानी चाहिए । यह मूल रूप से मापे गए मानों जिन पर परिणाम आधारित है, से अधिक यथार्थ नहीं हो सकती है । अत: किसी भी परिणाम में सार्थक अंकों की संख्या, मूल आंकड़ों, जिनसे यह प्राप्त किया गया है, से अधिक नहीं होनी चाहिए । यदि किसी वस्तु का मापित द्रव्यमान, माना 4.237 g (चार सार्थक अंक) और इसका मापित आयतन 2.51 cm^3 हो तो मात्र अंकीय विभाजन द्वारा 11 सार्थक अंकों तक इसका घनत्व 1.68804780876 g/cm^3 होगा । यहां घनत्व के इस मान को इतनी परिशुद्धता के साथ लिखना पूर्णतः असंगत होगा क्योंकि माप जिन पर घनत्व का मान आधारित है, उनकी परिशुद्धता काफी कम है । सार्थक अंकों के साथ अंकीय संक्रिया हेतु निम्नलिखित नियम सुनिश्चित करते हैं कि किसी परिकलन का अंतिम परिणाम उस परिशुद्धता से दर्शाया जाता है जो निविष्ट मापित मानों की परिशुद्धता के संगत होता है ।

(1) ***संख्याओं के गुणा अथवा भाग करने से प्राप्त परिणाम में केवल उतने ही सार्थक अंक रखने चाहिए जितने कि सबसे कम सार्थक अंकों वाली मूल संख्या में हैं ।***

अत: उपरोक्त उदाहरण में घनत्व को तीन सार्थक अंकों तक ही लिखा जाना चाहिए

$$\text{घनत्व} = \frac{4.237 \text{ g}}{2.51 \text{ cm}^3} = 1.69 \text{ g/cm}^3$$

इसी प्रकार, यदि प्रकाश की चाल 3.00×10^8 m s^{-1} (तीन सार्थक अंक) और एक प्रकाश वर्ष (1y = 365.25 d) में 3.156×10^7 s (चार सार्थक अंक) हैं तो एक प्रकाश वर्ष में 9.47×10^{15} m (तीन सार्थक अंक) होंगे ।

(2) ***संख्याओं के जोड़ने अथवा घटाने से प्राप्त अंतिम परिणाम में दशमलव के बाद उतने ही सार्थक अंक रखने चाहिए जितने कि जोड़ी या घटाई जाने वाली किसी राशि में दशमलव के बाद कम से कम हों ।***

उदाहरणार्थ, संख्याओं 436.32 g, 227.2 g और 0.301 g का जोड़ 663.821 g है । लेकिन कम से कम परिशुद्ध माप (227.2 g) दशमलव के केवल एक स्थान तक ही यथार्थ है, अत: अंतिम परिणाम को 663.8 g तक पूर्णांकित कर दिया जाना चाहिए ।

इसी प्रकार, लंबाइयों में अंतर को निम्न प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं

$$0.307\text{m} - 0.304 \text{ m} = 0.003 \text{ m} = 3 \times 10^{-3} \text{ m}$$

ध्यान रखें कि हमें नियम (1) जो गुणा और भाग के लिए लागू होता है, उसे संकलन (जोड़) के उदाहरण में प्रयोग करके 664 g नहीं लिखना चाहिए और व्यवकलन (घटा) के उदाहरण में 3.00×10^{-3} m नहीं लिखना चाहिए । ये माप की परिशुद्धता को उचित प्रकार से व्यक्त नहीं करते हैं । जोड़ने और घटाने के लिए, यह नियम दशमलव स्थान के पदों में व्यक्त किया जाता है ।

2.7.2 अनिश्चित अंकों का निकटन

संख्याओं, जिनमें एक से अधिक अनिश्चित अंक होता है, के अभिकलन के परिणाम का निकटन किया जाना चाहिए । संख्याओं

के उचित सार्थक अंकों तक निकटन हेतु नियम अधिकतर दशाओं में स्पष्ट हैं । किसी संख्या 2.746 का तीन सार्थक अंकों तक निकटन करके 2.75 लिखते हैं जबकि संख्या 2.743 को 2.74 लिखा जाएगा । परिपाटी के अनुसार नियम यह है कि ***यदि असार्थक अंक (पूर्वोक्त लिखी गई संख्या में अध: रेखांकित अंक) 5 से अधिक है तो पूर्वगामी अंक में 1 की वृद्धि कर दी जाती है और यदि असार्थक अंक 5 से कम होता है तो पूर्वगामी अंक अपरिवर्तित रखा जाता है ।*** परंतु यदि किसी संख्या जैसे 2.745 में असार्थक अंक 5 है, तो परिपाटी के अनुसार ***यदि पूर्वगामी अंक सम है तो असार्थक अंक को छोड़ दिया जाता है और यदि यह विषम है तो पूर्वगामी अंक में 1 की वृद्धि कर देते हैं ।*** तब संख्या 2.745 का तीन सार्थक अंकों तक निकटन करने पर 2.74 हो जाती है । दूसरी ओर संख्या 2.735 तीन सार्थक अंकों तक निकटन के पश्चात् 2.74 हो जाती है क्योंकि पूर्ववर्ती अंक विषम है ।

किसी भी बहुपदी जटिल परिकलन में, मध्यवर्ती पदों में सार्थक अंकों से एक अधिक पद रखना चाहिए जिसका परिकलन के अंत में उचित सार्थक अंकों तक निकटन कर देना चाहिए । इसी प्रकार प्रकाश की निर्वात में चाल जो कई सार्थक अंकों तक ज्ञात है जैसे 2.99792458×10^8 m/s को लगभग 3×10^8 m/s तक निकटन कर देते हैं जिसे प्राय: अभिकलन में प्रयोग में लाते हैं । अंत में ध्यान रखें कि सूत्रों में जो यथार्थ संख्याएं आती हैं जैसे $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ में 2π जिसमें सार्थक अंकों की संख्या बहुत अधिक (अनंत) होती है । π का मान (3.1415926.......) असीमित सार्थक अंकों तक ज्ञात है लेकिन हम अत्यधिक परिशुद्ध मापित राशि में सार्थक अंकों के आधार पर π का मान 3.142 अथवा 3.14 भी ले सकते हैं ।

2.7.3 अंकीय संक्रियाओं में संख्या की अनिश्चितता निर्धारण हेतु नियम

जैसा कि पहले लिखा गया है, मापित मान में त्रुटि या अनिश्चितता प्राय: मापक यंत्र की अल्पतमांक का आधा लिया जाता है । अंकीय संक्रियाओं में संख्या की अनिश्चितता निर्धारण हेतु नियम निम्नलिखित उदाहरणों से समझे जा सकते हैं :

(1) यदि किसी पतली आयताकार चादर की लंबाई एवं चौड़ाई क्रमश: 16.2 cm और 10.1 cm मापी गई है जिसमें प्रत्येक माप में तीन सार्थक अंक हैं । इसका तात्पर्य है कि सत्य लंबाई और चौड़ाई को क्रमश: निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$$l = 16.20 \pm 0.05 \text{ cm}, \quad b = 10.10 \pm 0.05 \text{ cm}$$
$$= 16.20 \text{ cm} \pm 0.3\%, \quad = 10.10 \text{ cm} \pm 0.5\%$$

दो (या अधिक) प्रायोगिक मानों के गुणनफल की अनिश्चितता निर्धारण हेतु, हम प्राय: प्रायिकता पर आधारित नियम का पालन करते हैं । यदि हम यह मान लें कि अनिश्चितताएं यादृच्छिकत: संयोजित होती हैं तो नियम है :

जब किसी प्रयोग से प्राप्त दो या अधिक संख्याओं को गुणा किया जाता है तो अंतिम परिणाम में, प्रतिशत अनिश्चितता, मूल संख्याओं की प्रतिशत अनिश्चितताओं के वर्गों के योग के वर्गमूल के बराबर होती है ।

वर्गों के वर्गमूल के नियम का पालन करते हुए, लंबाई l और चौड़ाई b के गुणनफल को हम इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$lb = 163.62 \text{cm}^2 \pm \sqrt{(0.3\%)^2 + (0.5\%)^2}$$
$$= 163.62 \text{ cm}^2 \pm 0.6\%$$
$$= 163.62 \pm 1.0 \text{ cm}^2$$

अत: अंतिम परिणाम होगा $lb = 163.6 \pm 1.0$ cm^2

(2) ***यदि किसी प्रायोगिक आंकड़े के समुच्चय में n सार्थक अंकों का उल्लेख है तो आंकड़े के संयोजन से प्राप्त परिणाम भी n सार्थक अंकों तक वैध होगा ।***

तथापि, यदि आंकड़े घटाए जाते हैं तो सार्थक अंकों की संख्या कम हो सकती है । उदाहरणार्थ 12.9 g – 7.06 g दोनों तीन सार्थक अंकों तक विनिर्दिष्ट हैं परंतु इसके अंतर को 5.84 g नहीं लिखा जा सकता है बल्कि केवल 5.8 g, क्योंकि घटाने या जोड़ने में अनिश्चितताएं विभिन्न प्रकार से संयोजित होती हैं (किसी जोड़ी या घटाई जाने वाली संख्या में कम से कम सार्थक अंकों की संख्या की जगह पर उनमें दशमलव के बाद कम से कम सार्थक अंकों वाली संख्या के आधार पर) ।

(3) ***किसी संख्या के मान में भिन्नात्मक त्रुटि जो विनिर्दिष्ट सार्थक अंकों तक दी गई है न केवल n पर वरन् दी गई संख्या पर भी निर्भर करती है ।***

उदाहरणार्थ, 1.02 g के द्रव्यमान के मापन में यथार्थता ±0.005g की है जबकि दूसरी माप 9.89 g भी ± 0.005 g तक यथार्थ है ।

अतः 1.02 g में भिन्नात्मक त्रुटि है :

$= (\pm 0.005/1.02) \times 100\%$
$= \pm 0.5\%$

दूसरी ओर 9.89 g में भिन्नात्मक त्रुटि है

$= (\pm 0.005/9.89) \times 100\%$
$= \pm 0.05\%$

अंत में ध्यान रखें कि **बहुपदी अभिकलन में मध्यवर्ती परिणाम, प्रत्येक मापन में कम से कम परिशुद्ध माप अंकों की संख्या की अपेक्षा एक अतिरिक्त सार्थक अंक तक परिकलित किया जाना चाहिए।** पहले ये आंकड़ों द्वारा समंजित कर लिया जाना चाहिए और तब ही अंकीय संक्रियाओं को पूरा कर सकते हैं अन्यथा निकटन त्रुटि आ सकती है। उदाहरणार्थ, 9.58 के व्युत्क्रम का तीन सार्थक अंकों तक निकटन त्रुटि के पश्चात् परिकलित मान 0.104 है परंतु 0.104 का व्युत्क्रम करने पर तीन सार्थक अंकों तक प्राप्त मान 9.62 है। फिर भी यदि हमने 1/9.58 = 0.1044 लिखा होता और तब व्युत्क्रम को तीन सार्थक अंकों तक लिखने पर हमें मूल मान 9.58 प्राप्त होगा।

उपरोक्त उदाहरण, जटिल बहुपदी परिकलन के मध्यवर्ती पदों में एक अतिरिक्त अंक (कम से कम परिशुद्ध माप में अंकों की संख्या की अपेक्षा) रखने की धारणा को न्यायसंगत ठहराता है जिससे कि संख्याओं की निकटन-प्रक्रिया में अतिरिक्त त्रुटि से बचा जा सके।

▶ ***उदाहरण 2.12*** किसी घन की प्रत्येक भुजा को 7.203 m मापा गया है। उचित सार्थक अंकों तक घन का कुल पृष्ठ क्षेत्रफल तथा आयतन क्या है ?

हल मापी गई लंबाई में सार्थक अंकों की संख्या 4 है। इसलिए परिकलित क्षेत्रफल तथा आयतन के मान का भी 4 सार्थक अंकों तक निकटन कर दिया जाना चाहिए।

घन का पृष्ठ क्षेत्रफल $= 6\,(7.203)^2\ m^2$
$= 311.299254\ m^2$
$= 311.3\ m^2$

घन का आयतन $= (7.203)^3\ m^3$
$= 373.714754\ m^3$
$= 373.7\ m^3$ ◀

▶ ***उदाहरण 2.13*** किसी पदार्थ के 5.74 g का आयतन 1.2 cm^3 है। इसके घनत्व को, सार्थक अंकों को ध्यान में रखते हुए, व्यक्त कीजिए।

हल द्रव्यमान में 3 सार्थक अंक हैं जबकि आयतन में केवल 2 सार्थक अंक हैं। इसलिए घनत्व को केवल 2 सार्थक अंकों तक व्यक्त किया जाना चाहिए।

$$\text{घनत्व} = \frac{5.74}{1.2}\ g\ cm^{-3}$$
$$= 4.8\ g\ cm^{-3}$$ ◀

2.8 भौतिक राशियों की विमाएं

किसी भी भौतिक राशि की प्रकृति बताने हेतु उसकी विमाओं की आवश्यकता पड़ती है। सभी भौतिक राशियों के व्युत्पन्न मात्रकों को सात मूल मात्रकों के पद में व्यक्त किया जा सकता है। हम इन सात भौतिक राशियों को भौतिक जगत की सात विमाएं कहते हैं जिन्हें गुरु कोष्ठक ([ ]) में प्रदर्शित करते हैं। इस प्रकार लंबाई, द्रव्यमान, समय, विद्युत् धारा, ताप, ज्योति तीव्रता और पदार्थ की मात्रा की विमाएं क्रमशः [L], [M], [T], [A], [K], [cd], और [mol] हैं। ***किसी भौतिक राशि की विमाएं उन घातों (या घातांक) को कहते हैं जिन्हें उस राशि के मात्रक को व्यक्त करने के लिए मूल मात्रकों पर चढ़ाते हैं।*** ध्यान दीजिए कि किसी राशि को गुरु कोष्ठक में रखने से तात्पर्य है कि हम उस राशि की **विमाओं** से संबंधित संक्रिया कर रहे हैं।

यांत्रिकी में, सभी भौतिक राशियों को विमाओं [L], [M], एवं [T] के पदों में व्यक्त किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, किसी घनाकार वस्तु का आयतन उसकी लंबाई, चौड़ाई और ऊंचाई के गुणनफल के पद में व्यक्त किया जाता है। अतः आयतन की विमाएं हैं $[L] \times [L] \times [L] = [L]^3 = [L^3]$। चूंकि आयतन, द्रव्यमान और समय पर निर्भर नहीं करता है, अतः यह कहा जा सकता है कि इसकी द्रव्यमान, लंबाई और समय की विमाएं क्रमशः शून्य, तीन एवं शून्य हैं।

इसी प्रकार बल जो द्रव्यमान और त्वरण का गुणनफल है, की विमाएं इस प्रकार प्राप्त की जा सकती हैं :

बल = द्रव्यमान × त्वरण
= द्रव्यमान × दूरी/(समय)^2

∴ बल की विमाएं हैं $[M]\ [L]/[T]^2 = [MLT^{-2}]$

इस प्रकार बल में लंबाई की 1 विमा, द्रव्यमाम की 1 विमा तथा समय की −2 विमाएं हैं। अन्य सभी मूल राशियों की विमाएं शून्य हैं।

ध्यान दें कि इस प्रकार के निरूपण में राशियों के परिमाणों पर विचार नहीं किया जाता। इसमें भौतिक राशि के स्वरूप की

गुणता का समावेश किया जाता है । अतः विमा के पदों में वेग-परिवर्तन, प्रारंभिक वेग, औसत वेग, अंतिम वेग और चाल सभी राशियां तुल्य हैं । क्योंकि सभी राशियां दूरी/समय के पद में व्यक्त की जा सकती हैं; अतः इनकी विमाएं [L]/[T] या [LT^{-1}] हैं ।

2.9 विमीय सूत्र और विमीय समीकरण

किसी दी हुई भौतिक राशि का विमीय सूत्र वह व्यंजक है जो यह दर्शाता है कि किसी भौतिक राशि की विमाओं को कौन-कौन सी तथा कितनी-कितनी मूल राशियां निरूपित कर रही हैं। उदाहरणार्थ, आयतन, चाल या वेग, त्वरण और द्रव्यमान घनत्व के विमीय सूत्र क्रमशः [$M^0 L^3 T^0$] [$M^0 LT^{-1}$] [$M^0 L T^{-2}$] और [$ML^{-3}T^0$] हैं ।

वह समीकरण जो भौतिक राशि को इसके विमीय सूत्र से संबंधित करती है उस भौतिक राशि की विमीय समीकरण कहलाती है। अतः विमाएं समीकरण वे समीकरण हैं जो किसी भौतिक राशि की विमाओं को, मूल राशियों के पद में निरूपित करती हैं । उदाहरणार्थ, आयतन [V] चाल [v] बल [F] और द्रव्यमान घनत्व ρ के विमीय समीकरण निम्न प्रकार से व्यक्त किए जा सकते हैं :

$[V] = [M^0 L^3 T^0]$

$[F] = [MLT^{-2}]$

$[v] = [M^0 LT^{-1}]$

$[\rho] = [ML^{-3} T^0]$

विमीय समीकरण भौतिक राशियों के मध्य संबंधों को निरूपित करने वाली समीकरण से प्राप्त की जा सकती हैं। बहुत सारी और तरह-तरह की भौतिक राशियों के विमीय सूत्र, जो अन्य भौतिक राशियों के मध्य संबंधों को निरूपित करने वाली समीकरणों से व्युत्पन्न किए गए हैं और मूल राशियों के पदों में व्यक्त किए गए हैं, आपके मार्गदर्शन एवं तत्काल संदर्भ के लिए परिशिष्ट 9 में दिए गए हैं ।

2.10 विमीय विश्लेषण और इसके अनुप्रयोग

विमाओं की धारणा का अभिज्ञान जो विमाओं के भौतिक व्यवहार के वर्णन का मार्गदर्शक है, मूल महत्ता का है क्योंकि यह बताता है कि केवल समान विमा वाली भौतिक राशियां ही जोड़ी या घटाई जा सकती हैं । विमीय विश्लेषण का पूर्ण ज्ञान विभिन्न भौतिक राशियों के मध्य निश्चित संबंधों के निगमन में सहायता करता है और विभिन्न गणितीय व्यंजकों की व्युत्पत्ति, यथार्थता, तथा विमीय संगति या समांगता की जांच करने में सहायक है। जब दो या अधिक भौतिक राशियों को गुणा किया जाता है तो उनके मात्रकों को साधारण बीजगणितीय संकेतों की तरह से प्रयोग किया जाना चाहिए जिसमें अंश और हर में समान मात्रकों को निरूपित किया जा सकता है । यही नियम किसी भौतिक राशि की विमाओं के लिए भी सत्य है। इसी प्रकार, किसी गणितीय समीकरण के दोनों ओर संकेतों से निरूपित भौतिक राशियों की विमाएं समान होनी चाहिए ।

2.10.1 समीकरणों की विमीय संगति की जांच

किन्हीं भी भौतिक राशियों के परिणाम केवल तभी जोड़े या घटाए जा सकते हैं यदि उनकी विमाएं समान हों, अर्थात् हम केवल एक ही प्रकार की भौतिक राशियों को जोड़ या घटा सकते हैं। अतः वेग को बल के साथ या विद्युत् धारा को ताप से जोड़ा या घटाया नहीं जा सकता । अतः किसी समीकरण की सत्यता की जांच हेतु उस समीकरण में विमाओं की समांगता का सिद्धांत अत्यन्त लाभदायक है। यदि किसी समीकरण में दोनों पक्षों अर्थात् वामावर्ती पक्ष एवं दक्षिणपक्ष की विमाएं समान नहीं हैं तो समीकरण गलत है । अतः यदि हम किसी वस्तु की लंबाई (या दूरी) के व्यंजक की व्युत्पत्ति करते हैं तो मूल गणितीय संबंध में आने वाले संकेतों को ध्यान में रखे बिना, जब सभी विमाएं सरल की जाती हैं तो सरल करने के पश्चात् प्राप्त विमा, लंबाई की विमा ही होनी चाहिए । इसी प्रकार यदि हम चाल के समीकरण की व्युत्पत्ति करते हैं तो समीकरण के दोनों पक्षों की विमाएं, सरलीकरण के पश्चात्, दूरी/समय या [LT^{-1}] ही होनी चाहिए।

यदि किसी समीकरण की सत्यता में संदेह हो तो विमीय विधि उस समीकरण की संगति की जांच हेतु एक प्रारंभिक परीक्षण है । परंतु विमीय संगति किसी समीकरण की सत्यता की गारंटी नहीं देती । यह विमाहीन राशियों या फलनों की सीमा तक अनिश्चित है। विशेष फलनों के कोणांक जैसे कि त्रिकोणमितीय, लघुगुणकीय और चरघातांकी फलन भी विमाहीन होने चाहिए । इसी प्रकार, शुद्ध संख्या सदृश भौतिक राशियों का अनुपात जैसे कोण, अनुपात (लंबाई/लंबाई), अपवर्तनांक (निर्वात में प्रकाश की चाल/माध्यम में प्रकाश की चाल), इत्यादि विमाहीन हैं ।

आइए, हम निम्न समीकरण की विमीय संगति या समांगता का परीक्षण करें

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

जहां किसी वस्तु या कण द्वारा t समय में चली गई दूरी x है जो $t = 0$ समय पर x_0 स्थिति से प्रारंभिक वेग v_0 से गति की दिशा में एकसमान त्वरण a से चलना प्रारंभ करता है ।

दोनों पक्षों के प्रत्येक पद की विमाएं इस प्रकार हैं

$$[x] = [L]$$
$$[x_0] = [L]$$
$$[v_0 t] = [LT^{-1}]\,[T] = [L]$$
$$\left[\frac{1}{2}at^2\right] = [LT^{-2}]\,[T^2] = [L]$$

क्योंकि इस समीकरण में दक्षिण पक्ष के प्रत्येक पद की विमा लंबाई की विमा है, जो वामावर्ती पक्ष की विमा के समान है अतः विमीय रूप से यह समीकरण सही है ।

यहां यह ध्यान देने योग्य है कि विमीय संगति परीक्षण मात्रकों की संगति परीक्षण के अतिरिक्त कुछ नहीं बताता है । परंतु इसका लाभ यह है कि हम किसी विशेष मात्रक के चयन के लिए बाध्य नहीं हैं और न ही हमें मात्रकों के परस्पर गुणज या अपवर्तक रूपान्तरण की चिन्ता की आवश्यकता है । यहां यह भी ध्यान देने योग्य है कि **यदि कोई समीकरण संगति परीक्षण में खरी नहीं उतरती है तो वह गलत सिद्ध हो जाती है, परंतु यदि वह परीक्षण में खरी उतरती है तो इससे वह सही सिद्ध नहीं हो जाती । अतः कोई विमीय रूप से सही समीकरण आवश्यक रूप से सही समीकरण नहीं होती जबकि विमीय रूप से असंगत समीकरण गलत होती है ।**

उदाहरण 2.14 इस समीकरण पर विचार करते हैं

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

जहां m वस्तु का द्रव्यमान है, v इसका वेग है, g गुरुत्वीय त्वरण है और h ऊंचाई है । यह पता लगाते हैं कि क्या यह समीकरण विमीय रूप से सही है ।

हल वामावर्ती पक्ष की विमाएं हैं

$$[M]\,[LT^{-1}]^2 = [M][L^2T^{-2}] = [ML^2T^{-2}]$$

दक्षिण पक्ष की विमाएं हैं

$$[M]\,[LT^{-2}][L] = [M][L^2T^{-2}] = [ML^2T^{-2}]$$

दोनों पक्षों की विमाएं समान हैं और इसलिए विमीय रूप से समीकरण सही है । ◀

उदाहरण 2.15 ऊर्जा का SI मात्रक J ($kg\,m^2s^{-2}$), चाल v का $m\,s^{-1}$ और त्वरण a का $m\,s^{-2}$ है । नीचे दिए गए गतिज ऊर्जा (K) के सूत्रों में से आप किसको विमीय तर्कों के द्वारा गलत बताएंगे (m वस्तु का द्रव्यमान है) ?

(a) $K = m^2 v^3$
(b) $K = (1/2)\,mv^2$
(c) $K = m\,a$
(d) $K = (3/16)\,mv^2$
(e) $K = (1/2)\,mv^2 + m\,a$

हल हर सही सूत्र या समीकरण के दोनों पक्षों की विमाएं समान होनी चाहिए और फिर केवल उन्हीं राशियों को जोड़ा या घटाया जा सकता है जिनकी भौतिक विमाएं समान होती हैं । दक्षिण पक्ष की राशि की विमाएं (a) के लिए $[M^2L^3T^{-3}]$; (b) तथा (d) के लिए $[ML^2\,T^{-2}]$; (c) के लिए $[MLT^{-2}]$ हैं । समीकरण (e) के दक्षिण पक्ष की राशि की कोई उचित विमाएं नहीं हैं क्योंकि इसमें भिन्न विमाओं की दो राशियों को जोड़ा गया है। क्योंकि K की विमाएं हैं $[ML^2\,T^{-2}]$, इसलिए सूत्र (a), (c) और (e) गलत हैं । यह नोट कीजिए कि विमीय तर्कों से यह पता नहीं लगता कि (b) या (d) में से कौन-सा सूत्र सही है। इसके लिए गतिज ऊर्जा की वास्तविक परिभाषा को देखना पड़ेगा (अध्याय 6 देखें) । गतिज ऊर्जा के लिए सही सूत्र (b) में दिया गया है । ◀

2.10.2 विभिन्न भौतिक राशियों के मध्य संबंध स्थापित करना

कभी-कभी विमीय विधि भौतिक राशियों के मध्य संबंध स्थापित करने के लिए भी प्रयोग की जा सकती है । इसके लिए हमें यह ज्ञात होना चाहिए कि दी हुई भौतिक राशि किन-किन राशियों पर निर्भर करती है । आइए, हम निम्न उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 2.16 किसी सरल लोलक पर विचार कीजिए । सरल लोलक का आवर्तकाल लंबाई तथा गुरुत्वीय त्वरण पर निर्भर करता है । इसके आवर्तकाल का व्यंजक प्राप्त कीजिए ।

हल आवर्तकाल की विमा = [T]

लंबाई की विमा = [L]

गुरुत्वीय त्वरण की विमा = $[LT^{-2}]$

आवर्तकाल को [L] तथा $[LT^{-2}]$ के फलन के रूप में लिखना है तो [L] की घात 0 तथा T की घात 1 प्राप्त करने के लिए साधारण विधि से ही निम्न समीकरण प्राप्त हो जाती है :

$$[T] = \{[L]/[LT^{-2}]\}^{1/2}$$

या सरल लोलक का आवर्तकाल

$$= \left(\frac{\text{लंबाई}}{\text{गुरुत्वीय त्वरण}}\right)^{1/2} = \left(\frac{l}{g}\right)^{1/2}$$

यहां इससे कोई अंतर नहीं पड़ता कि इस सूत्र के दक्षिण पक्ष को किसी संख्या से गुणा किया गया है, क्योंकि यह इसकी विमाओं पर कोई प्रभाव नहीं डालता ।

वास्तव में $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

◀

इस अध्याय के अंत में दिए गए कई प्रश्न विश्लेषण में कुशलता विकसित करने हेतु सहायक होंगे ।

सारांश

1. भौतिक विज्ञान भौतिक राशियों के मापन पर आधारित एक परिमाणात्मक विज्ञान है । ज्ञात भौतिक राशियों में से कुछ; जैसे- लंबाई, द्रव्यमान, समय, विद्युत् धारा, ताप, पदार्थ की मात्रा और ज्योति-तीव्रता, मूल राशियों के रूप में चुनी गई हैं।
2. प्रत्येक मूल राशि किसी मूल मात्रक (जैसे मीटर, किलोग्राम, सेकंड, ऐम्पियर, केल्विन, मोल और कैंडेला) के पद में परिभाषित है । मूल मात्रक स्वेच्छा से चयनित परंतु समुचित रूप से मानकीकृत निर्देश मानक होते हैं ।
3. मूल राशियों से व्युत्पन्न अन्य भौतिक राशियों को मूल मात्रकों के संयोजन के रूप में व्यक्त कर सकते हैं, जिन्हें व्युत्पन्न मात्रक कहते हैं । मूल और व्युत्पन्न दोनों मात्रकों के समुच्चय को, मात्रक प्रणाली कहते हैं ।
4. सात मूल मात्रकों पर आधारित मात्रकों की अंतर्राष्ट्रीय प्रणाली (SI) अंतर्राष्ट्रीय स्तर पर स्वीकृत प्रणाली है । यह प्रणाली संसार में व्यापक रूप से प्रयोग में लाई जाती है ।
5. मूल राशियों और व्युत्पन्न राशियों से प्राप्त सभी भौतिक मापों में SI मात्रकों का प्रयोग किया जाता है । कुछ व्युत्पन्न मात्रकों को SI मात्रकों के अतिरिक्त विशेष नामों (जैसे जूल, न्यूटन, वाट आदि) से भी व्यक्त किया जाता है ।
6. SI मात्रकों के सुपरिभाषित एवं अंतर्राष्ट्रीय स्तर पर स्वीकृत मात्रक प्रतीक हैं, जैसे मीटर के लिए m, किलोग्राम के लिए kg, सेकंड के लिए s, ऐम्पियर के लिए A, न्यूटन के लिए N, इत्यादि ।
7. प्राय: छोटी एवं बड़ी राशियों की भौतिक मापों को वैज्ञानिक संकेत पद्धति में 10 की घातों के रूप में व्यक्त किया जाता है । माप संकेतनों तथा आंकिक अभिकलनों की सरलता हेतु संख्याओं की परिशुद्धता का संकेत करते हुए वैज्ञानिक संकेत एवं पूर्वलग्नों का प्रयोग किया जाता है ।
8. भौतिक राशियों के संकेतन और SI मात्रकों के प्रतीकों, कुछ अन्य मात्रकों, भौतिक राशियों और मापों को उचित रूप से व्यक्त करने हेतु पूर्वलग्न के लिए कुछ सामान्य नियमों और निर्देशों का पालन करना चाहिए ।
9. किसी भी भौतिक राशि के अभिकलन में उसके मात्रक की प्राप्ति हेतु सम्मिलित व्युत्पन्न राशियों के मात्रकों को बीजगणितीय राशियों की भांति समझना चाहिए ।
10. भौतिक राशियों के मापन हेतु प्रत्यक्ष एवं अप्रत्यक्ष विधियों का प्रयोग किया जा सकता है । मापित राशियों में परिणाम को व्यक्त करते समय मापक यंत्रों की यथार्थता (accuracy) और परिशुद्धता (precision) के साथ मापन में त्रुटियों का भी ध्यान रखा जाना चाहिए ।
11. मापित एवं अभिकलित राशियों में केवल उचित सार्थक अंकों को ही रखना चाहिए । किसी भी संख्या में सार्थक अंकों की संख्या निर्धारण, उनसे अंकीय संक्रियाओं को पूरा करने और अनिश्चित अंकों के निकटन हेतु नियमों का पालन करना चाहिए ।
12. मूल राशियों की विमाओं और इन विमाओं का संयोजन भौतिक राशियों की प्रकृति का वर्णन करता है । समीकरणों की विमीय संगति की जांच और भौतिक राशियों में संबंध स्थापित करने हेतु विमीय विश्लेषण का प्रयोग करना चाहिए । कोई विमीय रूप से संगत समीकरण वास्तव में सही हो, आवश्यक नहीं है परंतु विमीय रूप से गलत या असंगत समीकरण गलत ही होगी ।

अभ्यास

2.1 रिक्त स्थान भरिए

(a) किसी 1 cm भुजा वाले घन का आयतन.........m^3 के बराबर है ।

(b) किसी 2 cm अर्धव्यास व 10 cm ऊंचाई वाले सिलिंडर का पृष्ठ क्षेत्रफल.........$(mm)^2$ के बराबर है ।

(c) कोई गाड़ी 18 km/h की गति से चल रही है तो यह 1 s में........m चलती है ।

(d) सीसे का आपेक्षिक घनत्व 11.3 है । इसका घनत्व.......g cm^{-3} या......kg m^{-3} है ।

2.2 रिक्त स्थानों को मात्रकों के उचित परिवर्तन द्वारा भरिए

(a) 1 kg $m^2 s^{-2}$ =........... g $cm^2 s^{-2}$

(b) 1 m =................ ly

(c) 3 m s^{-2} =................ km h^{-2}

(d) $G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm^2 $(kg)^{-2}$ =................ $(cm)^3 s^{-2} g^{-1}$

2.3 ऊष्मा या ऊर्जा का मात्रक कैलोरी है और लगभग 4.2 J के बराबर है, जहां 1 J = 1 kg $m^2 s^{-2}$ । मान लीजिए कि हम मात्रकों की कोई ऐसी प्रणाली इस्तेमाल करते हैं जिससे द्रव्यमान का मात्रक α kg के बराबर है, लंबाई का मात्रक β m के बराबर है, समय का मात्रक γ s के बराबर है । यह प्रदर्शित कीजिए कि नए मात्रकों के आधार पर कैलोरी का परिमाण $4.2\ \alpha^{-1} \beta^{-2} \gamma^2$ है ।

2.4 इस कथन की स्पष्ट व्याख्या कीजिए : तुलना का मानक बताए बिना "किसी विमीय राशि को 'बड़ा' या 'छोटा' कहना अर्थहीन है" । इसे ध्यान में रखते हुए नीचे दिए गए कथनों को जहां कहीं भी जरूरी हो, दूसरे शब्दों में व्यक्त कीजिए :

(a) परमाणु बहुत छोटे पिण्ड होते हैं ।

(b) जैट वायुयान अत्यधिक गति से चलता है ।

(c) बृहस्पति का द्रव्यमान बहुत ही अधिक है ।

(d) इस कमरे के अंदर वायु में अणुओं की संख्या बहुत अधिक है ।

(e) इलेक्ट्रॉन की तुलना में प्रोटॉन बहुत ही भारी होता है ।

(f) ध्वनि की गति प्रकाश की गति की तुलना में बहुत ही कम होती है ।

2.5 लंबाई का कोई नया मात्रक चुना गया है ताकि निर्वात में प्रकाश की चाल का परिमाण 1 हो । नए मानक के आधार पर सूर्य तथा पृथ्वी के बीच की दूरी कितनी होगी यदि प्रकाश इस दूरी को तय करने में 8 min और 20 s लगाए ।

2.6 लंबाई मापनें के लिए निम्नलिखित में से कौन-सा सबसे परिशुद्ध यंत्र है :

(a) एक वर्नियर केलीपर्स जिसके वर्नियर पैमाने पर 20 विभाजन हैं ।

(b) एक स्क्रूगेज जिसका चूड़ी अंतराल 1 mm और वृत्तीय पैमाने पर 100 विभाजन हैं ।

(c) कोई प्रकाशिक यंत्र जो प्रकाश की तरंगदैर्ध्य की सीमा के अंदर लंबाई माप सकता है ।

2.7 कोई छात्र 100 आवर्धन के एक सूक्ष्मदर्शी के द्वारा देखकर मनुष्य के बाल की मोटाई मापता है । वह 20 बार प्रेक्षण करता है और उसे ज्ञात होता है कि सूक्ष्मदर्शी के दृश्य क्षेत्र में बाल की औसत मोटाई 3.5 mm है । बाल की मोटाई का अनुमान क्या है?

2.8 निम्नलिखित के उत्तर दीजिए :

(a) आपको एक धागा और मीटर पैमाना दिया जाता है । आप धागे के व्यास का अनुमान किस प्रकार लगाएंगे ?

(b) एक स्क्रूगेज का चूड़ी अंतराल 1.00 mm है और उसके वृत्तीय पैमाने पर 200 विभाजन हैं । क्या आप यह सोचते हैं कि वृत्तीय पैमाने पर विभाजनों की संख्या स्वेच्छा से बढ़ा देने पर स्क्रूगेज की यथार्थता में वृद्धि करना संभव है ?

(c) वर्नियर केलीपर्स द्वारा पीतल की किसी पतली छड़ का माध्य व्यास मापा जाना है । केवल 5 मापनों के समुच्चय की तुलना में व्यास के 100 मापनों के समुच्चय के द्वारा अधिक विश्वसनीय अनुमान प्राप्त होने की संभावना क्यों है ?

2.9 किसी मकान का फोटोग्राफ 35 mm स्लाइड पर 1.75 cm^2 क्षेत्र घेरता है । स्लाइड को किसी स्क्रीन पर प्रक्षेपित किया जाता है और स्क्रीन पर मकान का क्षेत्रफल 1.55 m^2 है । प्रक्षेपित-स्क्रीन प्रबंध का रेखीय आवर्धन क्या है ?

2.10 निम्नलिखित में सार्थक अंकों की संख्या बताइए :

(a) 0.007 m^2 (b) 2.64×10^{24} kg (c) 0.2370 g cm^{-3}

(d) 6.320 J (e) 6.032 N m^{-2} (f) 0.0006032 m^2

2.11 धातु की किसी आयताकार चादर की लंबाई, चौड़ाई व मोटाई क्रमशः 4.234 m, 1.005 m व 2.01 cm है । उचित सार्थक अंकों तक चादर का क्षेत्रफल व आयतन ज्ञात कीजिए ।

2.12 पंसारी की तुला द्वारा मापे गए डिब्बे का द्रव्यमान 2.3 kg है । सोने के दो टुकड़े जिनका द्रव्यमान 20.15 g व 20.17 g है, डिब्बे में डाल दिए जाते हैं । (a) डिब्बे का कुल द्रव्यमान कितना है, (b) उचित सार्थक अंकों तक टुकड़ों के द्रव्यमानों में कितना अंतर है ?

2.13 कोई भौतिक राशि P, चार प्रेक्षण योग्य राशियों a, b, c तथा d से इस प्रकार संबधित है :

$$P = a^3 b^2 / \left(\sqrt{cd}\right)$$

a, b, c तथा d के मापने में प्रतिशत त्रुटियां क्रमशः 1%, 3%, 4%, तथा 2%, हैं । राशि P में प्रतिशत त्रुटि कितनी है ? यदि उपर्युक्त संबंध का उपयोग करके P का परिकलित मान 3.763 आता है तो आप परिणाम का किस मान तक निकटन करेंगे ?

2.14 किसी पुस्तक में जिसमें छपाई की अनेक त्रुटियां हैं, एक आवर्त गति कर रहे कण के विस्थापन के चार भिन्न सूत्र दिए गए हैं :

(a) $y = a \sin 2\pi t/T$ (b) $y = a \sin vt$

(c) $y = (a/T) \sin t/a$ (d) $y = (a\sqrt{2})(\sin 2\pi t/T + \cos 2\pi t/T)$

(a = कण का अधिकतम विस्थापन, v = कण की चाल, T = गति का आवर्त काल) । विमीय तर्कों के आधार पर गलत सूत्रों को निकाल दीजिए ।

2.15 भौतिकी का एक प्रसिद्ध संबंध किसी कण के 'गतिज द्रव्यमान' m, 'विराम द्रव्यमान (rest mass)' m_0, इसकी चाल v, और प्रकाश की चाल c के बीच है । (यह संबंध सबसे पहले अल्बर्ट आइंस्टाइन के विशेष आपेक्षिकता के सिद्धांत के परिणामस्वरूप उत्पन्न हुआ था ।) कोई छात्र इस संबंध को लगभग सही याद करता है लेकिन स्थिरांक c को लगाना भूल जाता है । वह लिखता है : $m = \dfrac{m_0}{(1-v^2)^{1/2}}$ । अनुमान लगाइए कि c कहां लगेगा ।

2.16 बारिश में कोई व्यक्ति चाल v के साथ तेजी से चला जा रहा है । उसे अपने छाते को टेढ़ा करके ऊर्ध्व के साथ θ कोण बनाना पड़ता है । कोई विद्यार्थी कोण θ व v के बीच निम्नलिखित संबंध व्युत्पन्न करता है :

$\tan \theta = v$;

और वह इस संबंध की सही सीमा पता लगाता है: जैसी कि आशा की जाती है यदि $v \to 0$ तो $\theta \to 0$। (हम यह मान रहे हैं कि कोई तेज हवा नहीं चल रही है और किसी खड़े व्यक्ति के लिए बारिश ऊर्ध्वाधर पड़ रही है) । क्या आप सोचते हैं कि यह संबंध सही हो सकता है? यदि ऐसा नहीं है तो सही संबंध का अनुमान लगाइए ।

2.17 यह दावा किया जाता है कि यदि बिना किसी बाधा के 100 वर्षों तक दो सीज़ियम घड़ियों को चलने दिया जाए तो उनके समयों में केवल 0.02 s का अंतर हो सकता है । मानक सीज़ियम घड़ी द्वारा 1 s के समय अंतराल को मापने में यथार्थता के लिए इसका क्या अभिप्राय है?

2.18 परमाण्विक पैमाने पर लंबाई का सुविधाजनक मात्रक एंगस्ट्रम है और इसे Å : $1 Å = 10^{-10} m$ द्वारा निरूपित किया जाता है । हाइड्रोजन के परमाणु का आकार लगभग 0.5 Å है । हाइड्रोजन के एक मोल परमाणुओं का m^3 में कुल आण्विक आयतन कितना होगा?

2.19 किसी आदर्श गैस का एक मोल (ग्राम अणुक) मानक ताप व दाब पर 22.4 L आयतन (ग्राम अणुक आयतन) घेरता है । हाइड्रोजन के ग्राम अणुक आयतन तथा उसके एक मोल के परमाण्विक आयतन का अनुपात क्या है? (हाइड्रोजन के अणु के आकार को लगभग 1Å मानिए) । यह अनुपात इतना अधिक क्यों है?

2.20 एक सोडियम परमाणु का आकार लगभग 2.5Å मानते हुए उसके माध्य द्रव्यमान घनत्व का अनुमान लगाइए । (सोडियम के परमाण्वीय द्रव्यमान तथा आवोगाद्रो संख्या के ज्ञात मान का प्रयोग कीजिए ।) इसकी क्रिस्टलीय अवस्था में सोडियम के घनत्व 970 kg m^{-3} के साथ तुलना कीजिए । क्या इन दोनों घनत्वों के परिमाण की कोटि समान है? यदि हां, तो क्यों?

2.21 नाभिकीय पैमाने पर लंबाई का सुविधाजनक मात्रक फर्मी है ($1 f = 10^{-15} m$) । नाभिकीय आकार निम्नलिखित आनुभविक संबंध का पालन करते हैं :

$$r = r_0 A^{1/3}$$

जहां r नाभिक की त्रिज्या, A इसकी द्रव्यमान संख्या और r_0 कोई स्थिरांक है जो लगभग 1.2 f के बराबर है । यह प्रदर्शित कीजिए कि इस नियम का अर्थ है कि विभिन्न नाभिकों के लिए नाभिकीय द्रव्यमान घनत्व लगभग स्थिर है । सोडियम नाभिक के द्रव्यमान घनत्व का अनुमान लगाइए । प्रश्न 2.20 में ज्ञात किए गए सोडियम परमाणु के माध्य द्रव्यमान घनत्व के साथ इसकी तुलना कीजिए ।

2.22 इस सामान्य प्रेक्षण की स्पष्टता के साथ व्याख्या कीजिए : यदि आप तेज जा रही किसी रेलगाड़ी की खिड़की से बाहर देखें तो समीप के पेड़, मकान आदि रेलगाड़ी की गति की विपरीत दिशा में तेजी के साथ गति करते प्रतीत होते हैं। लेकिन दूरस्थ वस्तुएं (पहाड़ियां, चंद्रमा, तारे आदि) स्थिर लगते हैं । (वास्तव में, क्योंकि आपको ज्ञात है कि आप चल रहे हैं इसलिए ये दूरस्थ वस्तुएं आपको अपने साथ चलती हुई प्रतीत होती हैं) ।

2.23 समीपी तारों की दूरियां ज्ञात करने के लिए अनुभाग 2.3.1 में दिए गए 'लंबन' के सिद्धांत का प्रयोग किया जाता है । वहां दिखाई गई दूरस्थ वस्तु की भूमिका अब किसी बहुत ही दूरस्थ तारे द्वारा ले ली जाती है । सूर्य के परितः अपनी कक्षा में छः महीनों के अंतराल पर पृथ्वी की अपनी दो स्थानों को मिलानेवाली आधार रेखा AB है अर्थात् आधार रेखा पृथ्वी की कक्षा के लगभग व्यास $\approx 3 \times 10^{11}$m के बराबर है । लेकिन, चूंकि निकटतम तारे भी इतनी दूर हैं कि इतनी लंबी आधार रेखा होने पर भी वे चाप के केवल 1" (सेकंड, चाप का) की कोटि के लंबन प्रदर्शित करते हैं । खगोलीय पैमाने पर लंबाई का सुविधाजनक मात्रक पारसेक है। यह किसी वस्तु की दूरी है जो पृथ्वी से सूर्य तक की दूरी के बराबर आधार रेखा के दो सम्मुख किनारों से चाप के 1" का लंबन प्रदर्शित करती है । मीटरों के पद में एक पारसेक कितना है ?

2.24 हमारे सौर परिवार में समीपतम तारा 4.29 प्रकाश वर्ष दूर है । पारसेक के पद में यह दूरी कितनी है ? यह तारा (एल्फा सेंटौरी नामक) तब कितना लंबन प्रदर्शित करेगा जब इसे सूर्य के गिर्द अपनी कक्षा में पृथ्वी के दो स्थानों से जो छः महीने के अन्तराल पर हैं, देखा जाता है ?

2.25 लेसर (LASER) प्रकाश का अत्यधिक तीव्र, एकवर्णी तथा एकदिश किरण-पुंज का स्रोत है । लेसर के इन गुणों का लंबी दूरियां मापने में उपयोग किया जा सकता है । लेसर को प्रकाश के स्रोत के रूप में उपयोग करते हुए पहले ही चंद्रमा की पृथ्वी से दूरी परिशुद्धता के साथ ज्ञात की जा चुकी है । कोई लेसर प्रकाश किरण-पुंज चंद्रमा के पृष्ठ से परावर्तित होकर 2.56 s में वापस आ जाता है । पृथ्वी के परितः चंद्रमा की कक्षा की त्रिज्या कितनी है ?

2.26 पानी के नीचे वस्तुओं को ढूंढ़ने व उनके स्थान का पता लगाने के लिए सोनार (SONAR) में पराश्रव्य तरंगों का प्रयोग होता है। कोई पनडुब्बी सोनार से सुसज्जित है । इसके द्वारा जनित अन्वेषी तरंग और शत्रु की पनडुब्बी से परावर्तित इसकी प्रतिध्वनि की प्राप्ति के बीच समय विलंब 77.0 s है । शत्रु की पनडुब्बी कितनी दूर है ? (पानी में ध्वनि की चाल = 1450 m s^{-1}) ।

2.27 हमारे विश्व में आधुनिक खगोलविदों द्वारा खोजे गए सर्वाधिक दूरस्थ पिण्ड इतनी दूर हैं कि उनके द्वारा उत्सर्जित प्रकाश को पृथ्वी तक पहुंचने में अरबों वर्ष लगते हैं । इन पिण्डों (जिन्हें क्वासर 'Quasar' कहा जाता है) के कई रहस्मयी लक्षण हैं जिनकी अभी तक संतोषजनक व्याख्या नहीं की जा सकी है । किसी ऐसे क्वासर की km में दूरी ज्ञात कीजिए जिससे उत्सर्जित प्रकाश को हम तक पहुंचने में 300 करोड़ वर्ष लगते हों ।

2.28 आधुनिक काल की आवश्यकता है भौतिक राशियों का परिशुद्ध मापन । उदाहरण के लिए, किसी शत्रु के लड़ाकू जहाज की चाल का पता लगाने के लिए बहुत ही छोटे समय-अंतरालों पर इसकी स्थिति का पता लगाने की कोई यथार्थ विधि होनी चाहिए। केवल तब ही हम किसी विमानभेदी बंदूक से इस पर वार करने की आशा कर सकते हैं । द्वितीय विश्व युद्ध में रेडार की खोज के पीछे वास्तविक प्रयोजन यही था । आधुनिक विज्ञान के उन भिन्न उदाहरणों को सोचिए जिनमें लंबाई, समय, द्रव्यमान आदि के परिशुद्ध मापन की आवश्यकता होती है। अन्य जिस किसी के विषय में आप बता सकते हैं परिशुद्धता की मात्रात्मक धारणा दीजिए ।

2.29 जैसे विज्ञान में परिशुद्ध मापनों की आवश्यकता होती है उसी तरह अल्पविकसित विचारों तथा आम प्रेक्षणों को उपयोग करने वाली राशियों की प्राथमिक धारणा भी महत्त्वपूर्ण है । उन उपायों को सोचिए जिनके द्वारा आप निम्नलिखित का अनुमान लगा सकते हैं : (जहां अनुमान लगाना कठिन है वहां राशि की उपरिसीमा पता लगाने का प्रयास कीजिए) ।

(a) मानसून की अवधि में भारत के ऊपर वर्षीले-बादलों का कुल द्रव्यमान ।

(b) किसी हाथी का द्रव्यमान ।

(c) किसी तूफान की अवधि में वायु की चाल ।

(d) आपके सिर के बालों की संख्या ।

(e) आपकी कक्षा के कमरे में वायु के अणुओं की संख्या ।

2.30 सूर्य ऊष्म प्लैज़्मा (आयनीकृत पदार्थ) है जिसके आंतरिक क्रोड का ताप 10^7 K से अधिक और बाह्य पृष्ठ का ताप लगभग 6000 K है । इतने अधिक ताप पर कोई भी पदार्थ ठोस या तरल रूप में नहीं रह सकता । सूर्य के द्रव्यमान घनत्व के किस परास में होने की आपको आशा है ? क्या यह ठोसों, तरलों या गैसों के घनत्वों के परास में है ?

क्या आपका अनुमान सही है ? इसकी जांच आप निम्नलिखित आंकड़ों के आधार पर कीजिए : सूर्य का द्रव्यमान $= 2.0 \times 10^{30}$ kg; सूर्य की त्रिज्या $= 7.0 \times 10^{8}$ m ।

2.31 जब बृहस्पति ग्रह पृथ्वी से 824.7 मिलियन (दशलक्ष) किलोमीटर दूर होता है तो इसके कोणीय व्यास की माप 35.72" का चाप है । बृहस्पति ग्रह के व्यास का परिकलन कीजिए ।

2.32 सूर्य के चारों ओर बुध ग्रह की कक्षा को वृत्ताकार मानते हुए कोपरनिकस ने वृत्तीय कक्षा की त्रिज्या 0.38 AU परिकलित की । इसकी सहायता से बुध ग्रह के लिए अधिकतम प्रसरकोण का और अधिकतम प्रसरकोण की दशा में इसकी पृथ्वी से दूरी का निर्धारण कीजिए ।

2.33 माना कोई ग्रह सूर्य के चारों ओर पृथ्वी से दो गुनी चाल से परिक्रमण कर रहा है । पृथ्वी की कक्षा की तुलना में इस ग्रह की कक्षा का आकार क्या होगा ?

2.34 बृहस्पति ग्रह के एक उपग्रह Io का कक्षीय आवर्तकाल 1.769 दिन और कक्षीय त्रिज्या 4.22×10^{8} m है । सिद्ध कीजिए कि बृहस्पति ग्रह का द्रव्यमान, सूर्य के द्रव्यमान का एक हज़ारवां भाग है ।

अतिरिक्त अभ्यास

2.35 यह एक सुप्रसिद्ध तथ्य है कि पूर्ण सूर्यग्रहण के दौरान चंद्रमा की चक्रिका सूर्य की चक्रिका को पूरी तरह ढक लेती है । इस तथ्य और उदाहरण 2.1 और 2.2 से एकत्र सूचनाओं के आधार पर चंद्रमा के व्यास (लगभग) का निर्धारण कीजिए ।

2.36 मान लीजिए कि सूर्य का वर्तमान आकार सिकुड़ जाता है जिससे कि इसकी त्रिज्या केवल आधी रह जाती है । उक्त कारण से गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा में हुए परिवर्तन की गणना कीजिए । (वास्तविक संख्या की जूल में गणना कीजिए)

2.37 मान लीजिए कि हमारी आकाशगंगा में 2.5×10^{11} तारे हैं जिनमें प्रत्येक का द्रव्यमान सूर्य के द्रव्यमान के बराबर है । ज्ञात कीजिए कि गांगेय केंद्र से 50,000 ly की दूरी पर कोई तारा इसकी एक परिक्रमा में कितना समय लेगा ? (आकाश गंगा का व्यास 10^{5} ly के बराबर है) ।

2.38 इस शताब्दी के एक महान भौतिकविद् (पी.ए.एम. डिरैक) प्रकृति के मूल स्थिरांकों (नियतांकों) के आंकिक मानों के साथ खेलने में आनंद लेते थे । इससे उन्होंने एक बहुत ही रोचक प्रेक्षण किया । परमाण्वीय भौतिकी के मूल नियतांकों (जैसे इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान, प्रोटॉन का द्रव्यमान तथा गुरुत्वीय नियतांक G) से उन्हें पता लगा कि वे एक ऐसी संख्या पर पहुंच गए हैं जिसकी विमा समय की विमा है । और, यह एक बहुत ही बड़ी संख्या थी और इसका परिमाण विश्व की आयु के वर्तमान अनुमान (~1500 करोड़ वर्ष) के करीब है । इस पुस्तक में दी गई मूल नियतांकों की सारणी में देखिए कि क्या आप भी संख्या (या और कोई संख्या जिसे आप सोच सकते हैं) बना सकते हैं । यदि विश्व की आयु से इसका संपाती होना अर्थपूर्ण है तो मूल नियतांकों की स्थिरता के लिए इससे क्या अंतर्निष्ठ है ?

अध्याय 3

सरल रेखा में गति

3.1 भूमिका

विश्व की प्रत्येक वस्तु प्रत्यक्ष या अप्रत्यक्ष रूप से गतिमान रहती है । हमारा चलना, दौड़ना, साइकिल सवारी आदि दैनिक जीवन में दिखाई देने वाली क्रियाएं गति के कुछ उदाहरण हैं । इतना ही नहीं, निद्रावस्था में भी हमारे फेफड़ों में वायु का प्रवेश एवं निष्कासन तथा हमारी धमनियों एवं शिराओं में रुधिर का संचरण होता रहता है । हम पेड़ों से गिरते हुए पत्तों को तथा बाँध से बहते हुए पानी को देखते हैं । मोटरगाड़ी और वायुयान यात्रियों को एक स्थान से दूसरे स्थान को ले जाते हैं । पृथ्वी 24 घंटे में एक बार अपनी अक्ष के परितः घूर्णन करती है तथा वर्ष में एक बार सूर्य की परिक्रमा पूरी करती है । सूर्य अपने ग्रहों सहित हमारी आकाशगंगा नामक मंदाकिनी में विचरण करता है, तथा जो स्वयं भी स्थानीय मंदाकिनियों के समूह में गति करती है ।

इस प्रकार समय के सापेक्ष वस्तु की स्थिति में परिवर्तन को गति कहते हैं। समय के साथ स्थिति कैसे परिवर्तित होती है ? इस अध्याय में हम गति के बारे में पढ़ेंगे । इसके लिए हमें वेग तथा त्वरण की धारणा को समझना होगा । इस अध्याय में हम अपना अध्ययन वस्तु के एक सरल रेखा के अनुदिश गति तक ही सीमित रखेंगे । इस प्रकार की गति को **सरल रेखीय गति** भी कहते हैं । एकसमान त्वरित सरल रेखीय गति के लिए कुछ सरल समीकरण प्राप्त किए जा सकते हैं । अंततः गति की आपेक्षिक प्रकृति को समझने के लिए हम आपेक्षिक गति की धारणा प्रस्तुत करेंगे ।

इस अध्ययन में हम सभी गतिमान वस्तुओं को अतिसूक्ष्म मानकर बिंदु रूप में निरूपित करेंगे । यह सन्निकटन तब तक मान्य होता है जब तक वस्तु का आकार निश्चित समय अंतराल में वस्तु द्वारा चली गई दूरी की अपेक्षा पर्याप्त रूप से कम होता है । वास्तविक जीवन में बहुत-सी स्थितियों में वस्तुओं के आमाप (साइज़) की उपेक्षा की जा सकती है* और बिना अधिक त्रुटि के उन्हें एक बिंदु-वस्तु माना जा सकता है ।

शुद्धगतिकी में, हम वस्तु की गति के कारणों पर ध्यान न देकर केवल उसकी गति का ही अध्ययन करते हैं । इस एवं अगले अध्याय में विभिन्न प्रकार की गतियों का वर्णन किया गया है । इन गतियों के कारणों का अध्ययन हम पांचवें अध्याय में करेंगे ।

3.2 स्थिति, पथ-लंबाई एवं विस्थापन

किसी वस्तु की गति के विवरण हेतु हर क्षण उसकी स्थिति का उल्लेख करना आवश्यक है । चूंकि गति एक सरल रेखा के अनुदिश है, इसलिए हम एक अक्ष

(मान लीजिए x-अक्ष) को इस प्रकार चुन सकते हैं कि वह वस्तु के पथ के संपाती हो । इस प्रकार वस्तु की स्थिति को हम अपनी सुविधानुसार चुने गए किसी मूल बिंदु (मान लीजिए चित्र 3.1 में दर्शाए गए बिंदु O) के सापेक्ष निरूपित करते हैं । बिंदु O के दाईं ओर के निर्देशांक को हम धनात्मक तथा बाईं ओर के स्थिति-निर्देशांक को ऋणात्मक कहेंगे ।

इस पद्धति के अनुसार चित्र 3.1 में बिंदु P और Q के स्थिति-निर्देशांक क्रमशः +360 m और +240 m हैं । इसी प्रकार बिंद R का स्थिति-निर्देशांक −120 m है ।

पथ-लंबाई

कल्पना कीजिए कि कोई कार एक सरल रेखा के अनुदिश गतिमान है । हम x-अक्ष इस प्रकार चुनते हैं कि यह गतिमान कार के पथ के संपाती हो । अक्ष का मूल बिंदु वह है जहां से कार चलना शुरू करती है अर्थात् समय $t = 0$ पर कार $x = O$ पर थी (चित्र 3.1) । मान लीजिए कि भिन्न-भिन्न क्षणों पर कार की स्थिति बिंदुओं P, Q तथा R से व्यक्त होती है । यहां हम गति की दो स्थितियों पर विचार करेंगे । पहली में कार O से P तक जाती है । अतः कार द्वारा चली गई दूरी OP = +360 m है । इस दूरी को कार द्वारा चली गई *पथ-लंबाई* कहते हैं । दूसरी स्थिति में कार पहले O से P तक जाती है और फिर P से Q पर वापस आ जाती है । गति की इस अवधि में कार द्वारा चली गई पथ-लंबाई = OP + PQ = 360 m + (+120 m) = +480 m होगी । क्योंकि पथ-लंबाई में केवल परिमाण होता है दिशा नहीं, अतः यह एक अदिश राशि है (अध्याय 4 देखिए) ।

विस्थापन

यहां यह प्रासंगिक होगा कि हम एक दूसरी उपयोगी भौतिक राशि *विस्थापन* को वस्तु की स्थिति में परिवर्तन के रूप में परिभाषित करें । कल्पना कीजिए कि समय t_1 व t_2 पर वस्तु की स्थिति क्रमशः x_1 व x_2 है । तब समय $\Delta t (= t_2 - t_1)$ में उसका विस्थापन, जिसे हम Δx से व्यक्त करते हैं, अंतिम तथा प्रारंभिक स्थितियों के अंतर द्वारा व्यक्त किया जाता है :

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

यहां हम ग्रीक अक्षर डेल्टा (Δ) का प्रयोग किसी राशि में परिवर्तन को व्यक्त करने के लिए करते हैं ।

यदि $x_2 > x_1$ तो Δx धनात्मक होगा, परंतु यदि $x_2 < x_1$ तो Δx ऋणात्मक होगा । विस्थापन में परिमाण व दिशा दोनों होते हैं, ऐसी राशियों को सदिशों द्वारा निरूपित किया जाता है । आप सदिशों के विषय में अगले अध्याय में पढ़ेंगे । इस अध्याय में हम एक सरल रेखा के अनुदिश सरल गति (जिसे हम **रेखीय गति** कहते हैं) के विषय में ही पढ़ेंगे । एक-विमीय गति में केवल दो ही दिशायें होती हैं (अग्रवर्ती एवं पश्चगामी अथवा अधोगामी एवं ऊर्ध्वगामी) जिनमें वस्तु गति करती है । इन दोनों दिशाओं को हम सुगमता के लिए + और − संकेतों से व्यक्त कर सकते हैं । उदाहरण के लिए यदि कार स्थिति O से P पर पहुंचती है, तो उसका विस्थापन

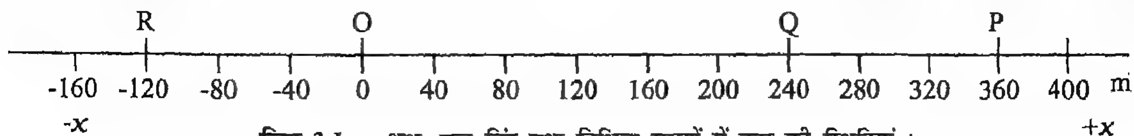
$$\Delta x = x_2 - x_1 = (+360 \text{ m}) - 0 \text{ m} = +360 \text{ m}$$

होगा । इस विस्थापन का परिमाण 360 m है तथा इसकी दिशा x की धनात्मक दिशा में होगी जिसे हम + संकेत से चिह्नित करेंगे । इसी प्रकार कार का P से Q तक का विस्थापन 240 m − 360 m = −120 m होगा । ऋणात्मक चिह्न विस्थापन की दिशा को इंगित करता है । अतएव, वस्तु की एक-विमीय गति के विवरण के लिए सदिश संकेत का उपयोग आवश्यक नहीं होता है ।

विस्थापन का परिमाण गतिमान वस्तु द्वारा चली गई पथ-लंबाई के बराबर हो भी सकता है और नहीं भी हो सकता है । उदाहरण के लिए, यदि कार स्थिति O से चल कर P पर पहुंच जाए, तो पथ-लंबाई = +360 m तथा विस्थापन = +360 m होगा । यहां विस्थापन का परिमाण (360 m) पथ-लंबाई (360 m) के बराबर है । परंतु यदि कार O से चलकर P तक जाए और फिर Q पर वापस आ जाए तो, पथ-लंबाई = (+360 m) + (+120 m) = +480 m होगी परंतु विस्थापन = (+240 m) − (0 m) = +240 m होगा । इस बार विस्थापन का परिमाण (240 m) कार द्वारा चली गई पथ-लंबाई (480 m) के बराबर नहीं (वास्तव में कम) है ।

सामान्यतया किन्हीं दो बिंदुओं के मध्य पथ-लंबाई उन्हीं बिंदुओं के मध्य विस्थापन के परिमाण से अधिक होती है । दोनों अर्थात् पथ-लंबाई एवं विस्थापन परिमाण बराबर तभी होंगे जब गति एक सरल रेखा में हो तथा एक ही दिशा में हो (जैसा कि गतिमान कार का पहला उदाहरण है) । विस्थापन का परिमाण गति की किसी अवधि के लिए शून्य भी हो सकता है जबकि तद्नुरूप पथ-लंबाई **शून्य नहीं** है । उदाहरण के लिए चित्र 3.1 में यदि कार O से चल कर P तक जाए और पुनः O पर वापस आ जाए तो कार की अंतिम स्थिति प्रारंभिक स्थिति के संपाती हो जाती है और विस्थापन शून्य हो जाता है । परंतु कार की इस पूरी यात्रा के लिए कुल पथ-लंबाई OP + PO = +360 m + 360 m = +720 m होगी ।

जैसा कि आप पहले पढ़ चुके हैं किसी भी वस्तु की गति को स्थिति-समय ग्राफ द्वारा व्यक्त किया जा सकता है । इस प्रकार के ग्राफ ऐसे सशक्त साधन होते हैं, जिनके माध्यम से वस्तु के गति के विभिन्न पहलुओं का निरूपण एवं विश्लेषण



चित्र 3.1 x-अक्ष, मूल बिंदु तथा विभिन्न समयों में कार की स्थितियां ।

आसानी से किया जा सकता है । किसी सरल रेखा (जैसे x-अक्ष) के अनुदिश गतिमान वस्तु के लिए समय के साथ केवल x-निर्देशांक ही परिवर्तित होता है । इस प्रकार हमें x - t ग्राफ प्राप्त होता है । हम सर्वप्रथम एक सरल स्थिति पर विचार करेंगे, जिसमें वस्तु उदाहरणार्थ, एक कार $x = 40$ m पर स्थित है । ऐसी वस्तु के लिए स्थिति-समय (x-t) ग्राफ समय-अक्ष के समांतर एक सीधी सरल रेखा होता है जैसा कि चित्र 3.2(a) में दिखाया गया है ।

यदि कोई वस्तु समान समय अंतराल में समान दूरी तय करती है, तो उस वस्तु की गति एकसमान गति कहलाती है । इस प्रकार की गति का **स्थिति-समय** ग्राफ चित्र 3.2(b) में दिखलाया गया है ।

अब हम उस कार की गति पर विचार करेंगे जो मूल बिंदु O से $t = 0$ s पर विरामावस्था से चलना प्रारंभ करती है । इसकी चाल उत्तरोत्तर $t = 10$ s तक बढ़ती जाती है । इसके बाद वह $t = 18$ s तक एकसमान चाल से चलती है। इस समय इसमें ब्रेक लगाया जाता है जिसके परिणामस्वरूप वह $t = 20$ s पर और $x = 296$ m पर रुक जाती है । ऐसी कार का स्थित-समय ग्राफ चित्र 3.3 में दिखाया गया है । हम इस ग्राफ की चर्चा इसी अध्याय में आगे आने वाले कुछ खंडों में पुन: करेंगे ।

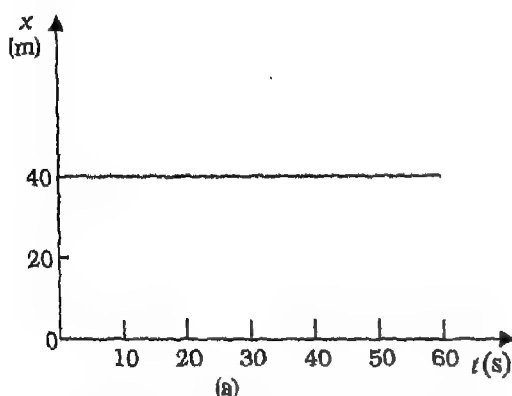
3.3 औसत वेग तथा औसत चाल

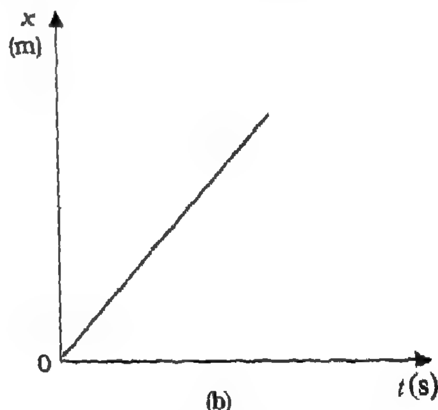
जब कोई वस्तु गतिमान होती है तो समय के साथ-साथ उसकी स्थिति परिवर्तित होती है । प्रश्न उठता है कि समय के साथ कितनी तेजी से वस्तु की स्थिति परिवर्तित होती है, तथा यह परिवर्तन किस दिशा में होता है ? इसके विवरण के लिए हम एक राशि परिभाषित करते हैं जिसे **औसत वेग** कहा जाता है। किसी वस्तु की स्थिति में परिवर्तन अथवा विस्थापन (Δx) को समय अंतराल (Δt) द्वारा विभाजित करने पर औसत वेग प्राप्त होता है । इसे $\bar{v}$ से चिह्नित करते हैं :

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (3.1)$$

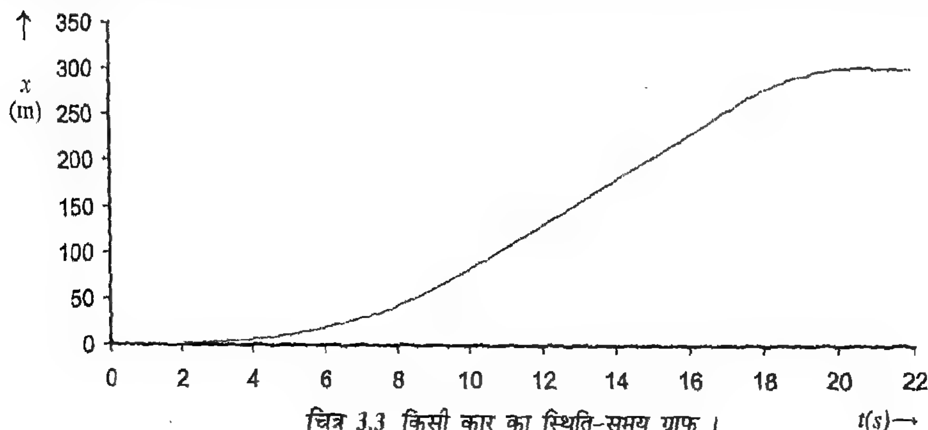
यहां x_1, आरंभिक समय t_1 पर तथा x_2 अंतिम समय t_2 पर, वस्तु की स्थिति को व्यक्त करता है । यहां वेग के प्रतीक (v) के ऊपर लगाई गई 'रेखा' वेग के औसत मान को व्यक्त करती है । किसी राशि के औसत मान को दर्शाने की यह एक मानक पद्धति है ।

वेग का SI मात्रक m/s अथवा m s^{-1} है यद्यपि दैनिक उपयोगों में उसके लिए km/h का भी प्रयोग होता है । विस्थापन की भांति माध्य-वेग भी एक सदिश राशि है । इसमें दिशा एवं



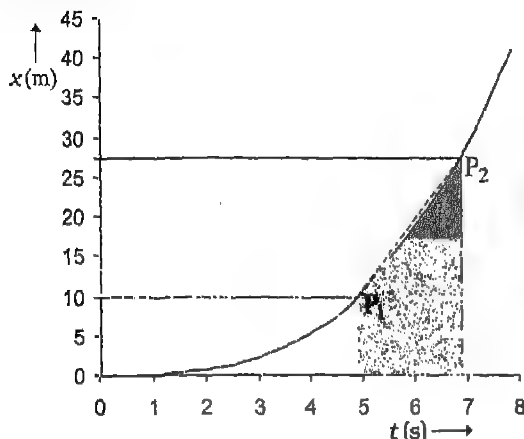


चित्र 3.2 स्थिति-समय ग्राफ, जब (a) वस्तु स्थिर है, तथा (b) जब वस्तु एकसमान गति से चल रही है ।



चित्र 3.3 किसी कार का स्थिति-समय ग्राफ ।

परिमाण दोनों समाहित होते हैं । परंतु जैसा कि हम पीछे स्पष्ट कर चुके हैं, यदि वस्तु एक सरल रेखा में गतिमान हो तो उसके दिशात्मक पक्ष को + या − चिह्नों द्वारा प्रकट कर सकते हैं। इसलिए इस अध्याय में वेग के लिए हम सदिश संकेतन का उपयोग नहीं करेंगे ।



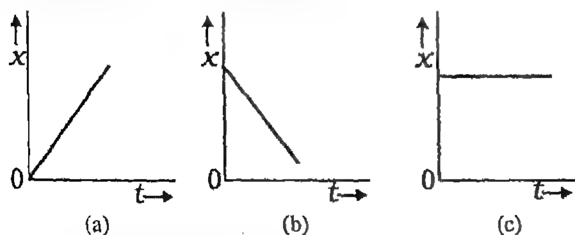
चित्र 3.4 औसत चाल सरल रेखा P_1P_2 की प्रवणता है ।

चित्र 3.3 में दर्शाई गई कार की गति के लिए x-t ग्राफ का $t = 0$ s तथा $t = 8$ s के बीच के भाग को बड़ा करके चित्र 3.4 में दिखाया गया है । जैसा कि आलेख से स्पष्ट है, $t = 5$ s तथा $t = 7$ s के मध्य समय अंतराल में कार का औसत-वेग होगा,

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{(27.4 - 10.0)\ \text{m}}{(7-5)\ \text{s}} = 8.7\ \text{m s}^{-1}$$

यह मान चित्र 3.4 में दर्शाई गई सरल रेखा P_1P_2 की प्रवणता के बराबर होगा । यह सरल रेखा कार की प्रारंभिक स्थिति P_1 को उसकी अंतिम स्थिति P_2 से मिलाती है ।

औसत वेग का ऋणात्मक या धनात्मक होना विस्थापन के चिह्न पर निर्भर करता है । यदि विस्थापन शून्य होगा तो औसत वेग का मान भी शून्य होगा । धनात्मक तथा ऋणात्मक वेग से चलती हुई वस्तु के लिए x-t ग्राफ क्रमशः चित्र 3.5(a) तथा चित्र 3.5(b) में दशाए गए हैं। किसी स्थिर वस्तु के लिए x-t ग्राफ चित्र 3.5(c) में दर्शाया गया है ।



चित्र 3.5 स्थिति-समय ग्राफ उस वस्तु के लिए जो (a) धनात्मक वेग से गतिमान है, (b) ऋणात्मक वेग से गतिमान है, तथा (c) विरामावस्था में है ।

औसत वेग को परिभाषित करने के लिए केवल विस्थापन का ज्ञान ही आवश्यक होता है । हम यह देख चुके हैं कि विस्थापन का परिमाण वास्तविक पथ-लंबाई से भिन्न हो सकता है । वास्तविक पथ पर वस्तु की गति की दर के लिए हम एक दूसरी राशि को प्रयुक्त करते हैं जिसे **औसत चाल** कहते हैं ।

वस्तु की यात्रा की अवधि में चली गई कुल पथ-लंबाई एवं इसमें लगे समय के भागफल को **औसत चाल** कहते हैं।

$$\text{औसत चाल} = \frac{\text{संपूर्ण पथ-लंबाई}}{\text{संपूर्ण समयावधि}} \qquad (3.2)$$

औसत चाल का वही मात्रक (m s^{-1}) होता है जो वेग का होता है । परंतु औसत चाल से यह पता नहीं चल पाता कि वस्तु किस दिशा में गतिमान है। इस दृष्टिकोण से औसत चाल सदैव धनात्मक ही होती है (जबकि औसत वेग धनात्मक या ऋणात्मक कुछ भी हो सकता है) । यदि वस्तु एक सरल रेखा के अनुदिश गतिमान है और केवल **एक ही दिशा** में चलती है तो विस्थापन का परिमाण कुल पथ-लंबाई के बराबर होगा। ऐसी परिस्थितियों में वस्तु की औसत वेग का परिमाण उसकी औसत चाल के बराबर होगा। परंतु यह बात हमेशा सही नहीं होगी । यह आप उदाहरण 3.1 में देखेंगे।

> ▶ ***उदाहरण 3.1*** कोई कार एक सरल रेखा (मान लीजिए चित्र 3.1 में रेखा OP) के अनुदिश गतिमान है । कार O से चलकर 18 s में P तक पहुंचती है, फिर 6 s में स्थिति Q पर वापस आ जाती है । कार के औसत वेग एवं औसत चाल की गणना कीजिए, जब (a) कार O से P तक जाती है, और (b) जब वह O से P तक जा कर पुनः Q पर वापस आ जाती है ।

हल (a)

उपरोक्त उदाहरण के अनुसार,

$$\text{औसत वेग} = \frac{\text{विस्थापन}}{\text{समयावधि}}$$

$$\text{अथवा } \bar{v} = \frac{+360\ \text{m}}{18\ \text{s}} = +20\ \text{m s}^{-1}$$

$$\text{औसत चाल} = \frac{\text{पथ दूरी}}{\text{समयावधि}}$$

$$= \frac{360\ \text{m}}{18\ \text{s}} = 20\ \text{m s}^{-1}$$

अतः इस स्थिति में औसत चाल का मान औसत वेग के परिमाण के बराबर है ।

(b)

$$\text{औसत वेग} = \frac{\text{विस्थापन}}{\text{समयावधि}} = \frac{+240\text{ m}}{(18+6)\text{ s}}$$

$$= +10 \text{ m s}^{-1}$$

$$\text{औसत चाल} = \frac{\text{पथ-लम्बाई}}{\text{समयावधि}} = \frac{OP + PQ}{\Delta t}$$

$$= \frac{(360+120)\text{ m}}{24\text{ s}}$$

$$= 20 \text{ m s}^{-1}$$

अतः इस स्थिति में औसत चाल का मान औसत वेग के परिमाण के बराबर नहीं है। इसका कारण कार की गति के दौरान गति में दिशा परिवर्तन है जिसके फलस्वरूप पथ-लंबाई विस्थापन के परिमाण से अधिक है। इससे स्पष्ट है कि ***वस्तु की चाल सामान्यतया वेग के परिमाण से अधिक होती है।*** ◄

यदि उदाहरण 3.1 में कार स्थिति O से P बिंदु तक जाए तथा उसी समय अंतराल में वह O स्थिति पर वापस आ जाए तो कार की माध्य चाल 20 m s^{-1} होगी, परंतु उसका औसत वेग शून्य होगा!

3.4 तात्क्षणिक वेग एवं चाल

जैसा कि हम पढ़ चुके हैं कि औसत वेग से हमें यह ज्ञात होता है कि कोई वस्तु किसी दिए गए समय अंतराल में किस गति से चल रही है, किन्तु इससे यह पता नहीं चल पाता कि इस समय अंतराल के भिन्न-भिन्न क्षणों पर वह किस गति से चल रही है। अतः किसी क्षण t पर वेग के लिए हम ***तात्क्षणिक वेग*** या केवल वेग v को परिभाषित करते हैं।

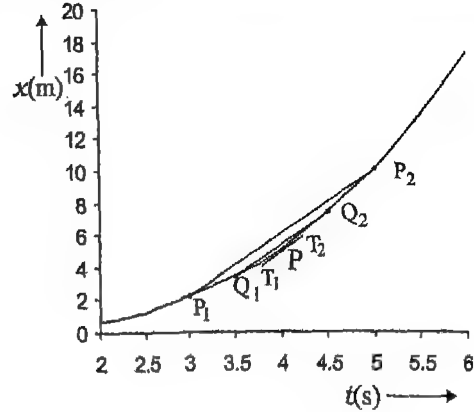
गतिमान वस्तु का तात्क्षणिक वेग उसके औसत वेग के बराबर होगा यदि उसके दो समयों (t तथा $t+\Delta t$) के बीच का अंतराल (Δt) अनन्तः सूक्ष्म हो। गणितीय विधि से हम इस कथन को निम्न प्रकार से व्यक्त करते हैं–

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (3.3a)$$

$$= \frac{dx}{dt} \quad (3.3b)$$

यहां प्रतीक $\lim_{\Delta t \to 0}$ का तात्पर्य उसके दाईं ओर स्थित राशि (जैसे $\frac{\Delta x}{\Delta t}$) का वह मान है जो Δt के मान को शून्य की ओर ($\Delta t \to 0$) प्रवृत्त करने पर प्राप्त होगा। कलन गणित की भाषा में समीकरण (3.3a) में दाईं ओर की राशि $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ x का t के सापेक्ष अवकलन गुणांक है। (परिशिष्ट A6 देखिए)। यह गुणांक उस क्षण पर वस्तु की स्थिति परिवर्तन की दर होती है।

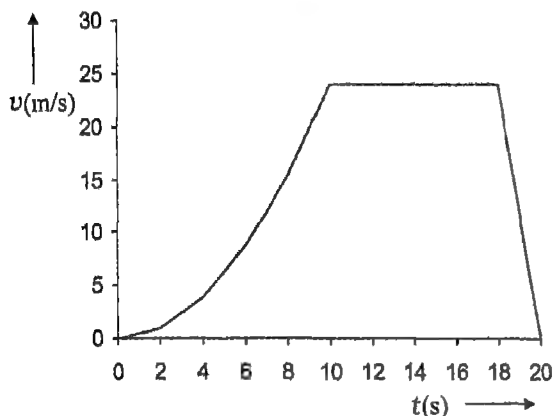
किसी क्षण पर वस्तु का वेग निकालने के लिए हम समीकरण (3.3a) का उपयोग कर सकते हैं। इसके लिए **ग्राफिक** या **गणितीय विधि** को प्रयोग में लाते हैं। मान लीजिए कि हम चित्र (3.3) में निरूपित गतिमान कार का वेग $t = 4$ s (बिंदु P) पर निकालना चाहते हैं। गणना की आसानी के लिए इस चित्र को चित्र 3.6 में अलग पैमाना लेकर पुनः खींचा गया है। पहले हम $t = 4$ s को केंद्र में रखकर Δt को 2 s लें। औसत वेग की परिभाषा के अनुसार सरल रेखा P_1P_2 (चित्र 3.6) की प्रवणता 3 s से 5 s अंतराल में वस्तु के औसत वेग को व्यक्त करेगी। अब हम Δt का मान 2 s से घटाकर 1 s कर देते हैं तो P_1P_2 रेखा Q_1Q_2 हो जाती है और इसकी प्रवणता 3.5 s से 4.5 s अंतराल में औसत वेग का मान देगी। अंततः सीमांत मान $\Delta t \to 0$ की परिस्थिति में रेखा P_1P_2 स्थिति-समय वक्र के बिंदु P पर स्पर्श रेखा हो जाती है। इस प्रकार $t = 4$ s क्षण पर कार का वेग उस बिंदु पर खींची गई स्पर्श रेखा की प्रवणता के बराबर होगा। **यद्यपि ग्राफिक विधि से इसे प्रदर्शित करना कुछ कठिन है तथापि यदि इसके लिए हम गणितीय विधि का उपयोग करें तो सीमांत प्रक्रिया आसानी से समझी जा सकती है।**



चित्र 3.6 स्थिति-समय ग्राफ से वेग ज्ञात करना। $t = 4$ s पर वेग उस क्षण पर ग्राफ की स्पर्श रेखा की प्रवणता है।

चित्र 3.6 में खींचे गए ग्राफ के लिए $x = 0.8\, t^3$ है। सारणी 3.1 में $t = 4$ s को केंद्र में रखकर $\Delta t = 2.0$ s, 1.0 s, 0.5 s, 0.1 s तथा 0.01 s के लिए $\Delta x/\Delta t$ के मूल्यों को दर्शाया गया है। दूसरे और तीसरे कॉलम में $t_1 (= t - \Delta t/2)$ तथा $t_2 (= t - \Delta t/2)$ और चौथे एवं पांचवें कॉलम में x के तदनुरूप मानों अर्थात् $x(t_1) = 0.08\, t_1^3$ तथा $x(t_2) = 0.03\, t_2^3$ को दिखलाया गया है। छठे कॉलम में अंतर $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$ को तथा अंतिम कॉलम में Δx व Δt के अनुपात को व्यक्त किया गया है। यह अनुपात प्रथम कॉलम में अंकित Δt के भिन्न-भिन्न मानों के संगत औसत वेग का मान है।

सारणी 3.1 से स्पष्ट है कि जैसे-जैसे Δt का मान 2.0 s से घटाते-घटाते 0.01 s करते हैं तो औसत वेग अंततः सीमांत मान 3.84 ms^{-1} के बराबर हो जाता है जो t=4 s पर कार का वेग है अर्थात् t=4 s पर dx/dt का मान । इस प्रकार चित्र 3.3 में दर्शाई गई गति के हर क्षण के लिए हम कार का वेग निकाल सकते हैं। इस उदाहरण के लिए समय के सापेक्ष वेग में परिवर्तन चित्र 3.7 में दर्शाया गया है ।



चित्र 3.7 चित्र 3.3 में दर्शाई गई वस्तु की गति के तदनुरूप वेग-समय ग्राफ ।

यहां यह बात ध्यान देने योग्य है कि वस्तु का तात्क्षणिक वेग निकालने के लिए ग्राफिक विधि सदैव सुविधाजनक नहीं होती है । इस विधि (ग्राफिक विधि) में हम गतिमान वस्तु के स्थिति-समय ग्राफ को सावधानीपूर्वक खींचते हैं तथा Δt को उत्तरोत्तर कम करते हुए वस्तु के औसत वेग ($\bar{v}$) की गणना करते जाते हैं । भिन्न-भिन्न क्षणों पर वस्तु का वेग निकालना तब बहुत आसान हो जाता है जब विभिन्न समयों पर हमारे पास वस्तु की स्थिति के पर्याप्त आंकड़े उपलब्ध हों अथवा वस्तु की स्थिति का समय के फलन के रूप में हमारे पास यथार्थ व्यंजक उपलब्ध हो । ऐसी स्थिति में उपलब्ध आंकड़ों का उपयोग करते हुए समय अंतराल Δt को क्रमशः सूक्ष्म करते हुए $\Delta x/\Delta t$ का मान निकालते जाएंगे और अंततः सारणी 3.1 में दर्शाई गई विधि के अनुसार $\Delta x/\Delta t$ का सीमांत मान प्राप्त कर लेंगे । अन्यथा किसी दिए गए व्यंजक के लिए अवकल गणित का प्रयोग करके गतिमान वस्तु के भिन्न-भिन्न क्षणों के लिए dx/dt की गणना कर लेंगे जैसा कि उदाहरण 3.2 में बताया गया है ।

► ***उदाहरण 3.2*** x-अक्ष के अनुदिश किसी गतिमान वस्तु की स्थिति निम्नलिखित सूत्र से व्यक्त की जाती है : $x=a+bt^2$ । यहां a = 8.5 m, b = 2.5 ms^{-2} तथा समय t को सेकंड में व्यक्त किया गया है । t=0 s तथा t=2 s क्षणों पर वस्तु का वेग क्या होगा ? t=2 s तथा t=4 s के मध्य के समय अंतराल में वस्तु का औसत वेग क्या होगा ?

हल अवकल गणित की पद्धति के अनुसार वस्तु का वेग

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(a + bt^2\right) = 2bt = 5.0\,t \text{ m s}^{-1}$$

t=0 s क्षण के लिए v=0 m/s, तथा t=2 s समय पर, v=10 m s^{-1}

$$\text{औसत वेग } \bar{v} = \frac{x(t_2)-x(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{x(4)-x(2)}{4-2}$$

$$= \frac{(a+16b)-(a+4b)}{2} = 6b$$

$$= 6\times 2.5 = 15.0 \text{ m s}^{-1}$$ ◄

चित्र 3.7 से यह स्पष्ट है कि t=10 s से 18 s के मध्य वेग स्थिर रहता है । t=18 s से t=20 s के मध्य यह एकसमान रूप से घटता जाता है जबकि t=0 s से t=10 s के बीच यह बढ़ता जाता है । ***ध्यान दीजिए कि एकसमान गति में हर समय (तात्क्षणिक) वेग का वही मान होता है जो औसत वेग का होता है ।***

तात्क्षणिक चाल या केवल *चाल* गतिमान वस्तु के वेग का परिमाण है । उदाहरण के तौर पर वेग + 24.0 m s^{-1} तथा −24.0 m s^{-1} दोनों में प्रत्येक का परिमाण 24.0 m s^{-1} होगा । यहां यह तथ्य ध्यान में रखना है कि जहां किसी सीमित समय अंतराल में वस्तु की औसत चाल उसके औसत वेग के परिमाण के या

सारणी 3.1 t = 4 s के लिए $\Delta x/\Delta t$ का सीमांत मान

Δt (s)	t_1 (s)	t_2 (s)	$x(t_1)$ (m)	$x(t_2)$ (m)	Δx (m)	$\Delta x/\Delta t$ (m s^{-1})
2.0	3	5	2.16	10.0	7.84	3.92
1.0	3.5	4.5	3.43	7.29	3.86	3.86
0.5	3.75	4.25	4.21875	6.14125	1.9225	3.845
0.1	3.95	4.05	4.93039	5.31441	0.38402	3.8402
0.01	3.995	4.005	5.100824	5.139224	0.0384	3.8400

तो बराबर होती है या उससे अधिक होती है वही किसी क्षण पर वस्तु का तात्क्षणिक चाल उस क्षण पर उसके तात्क्षणिक वेग के परिमाण के बराबर होती है । ऐसा क्यों होता है ?

3.5 त्वरण

सामान्यत: वस्तु की गति की अवधि में उसके वेग में परिवर्तन होता रहता है । वेग में हो रहे इस परिवर्तन को कैसे व्यक्त करें। वेग में हो रहे इस परिवर्तन को **समय के सापेक्ष** व्यक्त करना चाहिए या **दूरी के सापेक्ष** ? यह समस्या गैलीलियो के समय भी थी । गैलीलियो ने पहले सोचा कि वेग में हो रहे परिवर्तन की इस दर को दूरी के सापेक्ष व्यक्त किया जा सकता है परंतु जब उन्होंने मुक्त रूप से गिरती हुई तथा नत समतल पर गतिमान वस्तुओं की गति का विधिवत् अध्ययन किया तो उन्होंने पाया कि समय के सापेक्ष वेग परिवर्तन की दर का मान मुक्त रूप से गिरती हुई वस्तुओं के लिए, स्थिर रहता है जबकि दूरी के सापेक्ष वस्तु का वेग परिवर्तन स्थिर नहीं रहता वरन् जैसे-जैसे गिरती हुई वस्तु की दूरी बढ़ती जाती है वैसे-वैसे यह मान घटता जाता है। इस अध्ययन ने त्वरण की वर्तमान धारणा को जन्म दिया जिसके अनुसार त्वरण को हम समय के सापेक्ष वेग परिवर्तन के रूप में परिभाषित करते हैं ।

जब किसी वस्तु का वेग समय के सापेक्ष बदलता है तो हम कहते हैं कि उसमें त्वरण हो रहा है । वेग में परिवर्तन तथा तत्संबंधित समय अंतराल के अनुपात को हम औसत त्वरण कहते हैं । इसे $\bar{a}$ से प्रदर्शित करते हैं :

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad (3.4)$$

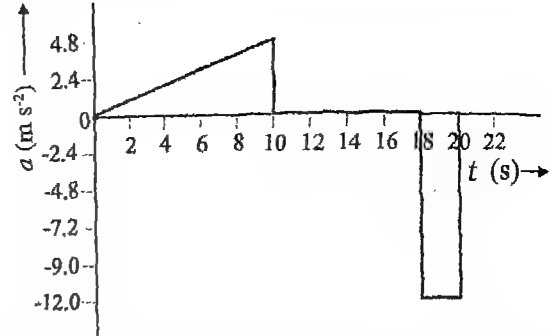
यहां t_1, t_2 क्षणों पर वस्तु का वेग क्रमश: v_1 तथा v_2 है । यह एकांक समय में वेग में औसत परिवर्तन होता है । त्वरण का SI मात्रक $m\,s^{-2}$ है ।

वेग-समय (v-t) ग्राफ से हम वस्तु का औसत त्वरण निकाल सकते हैं । यह इस प्रकार के ग्राफ में उस सरल रेखा की प्रवणता के बराबर होता है जो बिंदु (v_2, t_2) को बिंदु (v_1, t_1) से जोड़ती है । नीचे के उदाहरण में चित्र 3.7 में दर्शाई गई गति के भिन्न-भिन्न समय अंतरालों में हमने वस्तु का औसत त्वरण निकाला है :

0 s – 10 s $\quad \bar{a} = \dfrac{(24-0)\ \text{m}}{(10-0)\ \text{s}} = 2.4\ \text{m s}^{-2}$

10 s – 18 s $\quad \bar{a} = \dfrac{(24-24)\ \text{m}}{(18-10)\ \text{s}} = 0\ \text{m s}^{-2}$

18 s – 20 s $\quad \bar{a} = \dfrac{(0-24)\ \text{m s}^{-1}}{(20-18)\ \text{s}} = -12\ \text{m s}^{-2}$



चित्र 3.8 चित्र 3.3 में दर्शाई गति के संगत समय के फलन के रूप में वस्तु का त्वरण ।

तात्क्षणिक त्वरण : जिस प्रकार हमने पूर्व में तात्क्षणिक वेग की व्याख्या की है, उसी प्रकार हम तात्क्षणिक त्वरण को भी परिभाषित करते हैं । वस्तु के तात्क्षणिक त्वरण को a से चिह्नित करते हैं, अर्थात्

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \qquad (3.5)$$

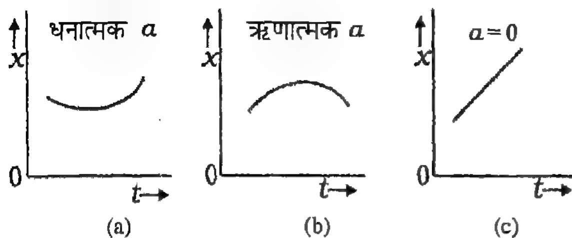
v–t ग्राफ में किसी क्षण वस्तु का त्वरण उस क्षण वक्र पर खींची गई स्पर्श रेखा की प्रवणता के बराबर होता है । चित्र 3.7 में दर्शाए गए v–t वक्र में प्रत्येक क्षण के लिए त्वरण प्राप्त कर सकते हैं । परिणामस्वरूप उपलब्ध a–t वक्र चित्र 3.8 में दिखाया गया है । चित्र से स्पष्ट है कि 0 s से 10 s की अवधि में त्वरण असमान है । 10 s–18 s के मध्य यह शून्य है जबकि 18 s तथा 20 s के बीच यह स्थिर है तथा इसका मान $-12\ \text{m s}^{-2}$ है । जब त्वरण एकसमान होता है तो यह स्पष्ट है कि वह उस अवधि में औसत त्वरण के बराबर होता है ।

चूंकि वेग एक सदिश राशि है जिसमें दिशा एवं परिमाण दोनों होते हैं अतएव वेग परिवर्तन में इनमें से कोई एक अथवा दोनों निहित हो सकते हैं । अत: या तो चाल (परिमाण) में परिवर्तन, दिशा में परिवर्तन अथवा इन दोनों में परिवर्तन से त्वरण का उद्भव हो सकता है । वेग के समान ही त्वरण भी धनात्मक, ऋणात्मक अथवा शून्य हो सकता है । इसी प्रकार के त्वरण संबंधी स्थिति-समय ग्राफों को चित्रों 3.9 (a), 3.9 (b) तथा 3.9 (c) में दर्शाया गया है । चित्रों से स्पष्ट है कि धनात्मक त्वरण के लिए x–t ग्राफ ऊपर की ओर वक्रित है किन्तु ऋणात्मक त्वरण के लिए ग्राफ नीचे की ओर वक्रित है । शून्य त्वरण के लिए x–t ग्राफ एक सरल रेखा है । अभ्यास के लिए चित्र 3.3 में दर्शाई गई गति के उन तीनों भागों को पहचानिए जिनके लिए त्वरण $+a$, $-a$ अथवा शून्य है ।

यद्यपि गतिमान वस्तु का त्वरण समय के साथ-साथ बदल सकता है, परंतु सुविधा के लिए इस अध्याय में गति संबंधी हमारा अध्ययन मात्र स्थिर त्वरण तक ही सीमित रहेगा । ऐसी स्थिति में औसत त्वरण $\bar{a}$ का मान गति की अवधि में स्थिर त्वरण के मान के बराबर होगा ।

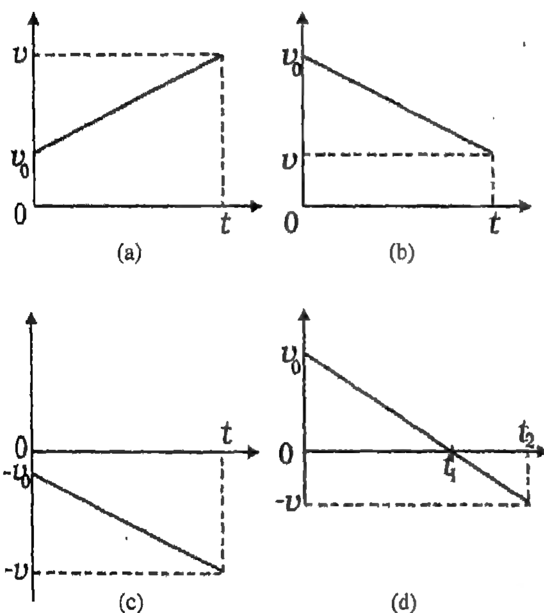
यदि क्षण $t=0$ पर वस्तु का वेग v_0 तथा t क्षण पर उसका वेग v हो, तो त्वरण $a=\overline{a}=\frac{v-v_0}{t-0}$ होगा ।

अतएव, $v=v_0+at$ (3.6)



चित्र 3.9 ऐसी गति के लिए स्थिति-समय ग्राफ जिसके लिए (a) त्वरण धनात्मक है, (b) त्वरण ऋणात्मक है तथा (c) त्वरण शून्य है ।

अब हम यह देखेंगे कि कुछ सरल उदाहरणों में वेग-समय ग्राफ कैसा दिखलाई देता है । चित्र 3.10 में स्थिर त्वरण के लिए चार अलग-अलग स्थितियों में v–t ग्राफ दिखाए गए हैं :



चित्र 3.10 स्थिर त्वरण के साथ गतिमान वस्तु का वेग-समय ग्राफ (a) धनात्मक त्वरण से धनात्मक दिशा में गति, (b) ऋणात्मक त्वरण से धनात्मक दिशा में गति, (c) ऋणात्मक त्वरण से ऋणात्मक दिशा में गति, (d) ऋणात्मक त्वरण के साथ वस्तु की गति जो समय t_1 पर दिशा बदलती है । 0 से t_1 समयावधि में यह धनात्मक x की दिशा में गति करती है जबकि t_1 व t_2 के मध्य वह विपरीत दिशा में गतिमान है ।

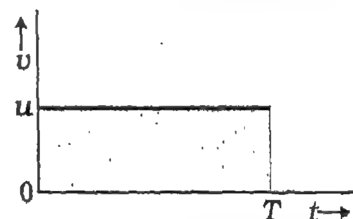
(*a*) कोई वस्तु धनात्मक दिशा में धनात्मक त्वरण से गतिमान है । उदाहरणार्थ, चित्र 3.3 में $t=0$ s से $t=10$ s के बीच की अवधि में कार की गति ।

(*b*) कोई वस्तु धनात्मक दिशा में ऋणात्मक त्वरण से गतिमान है । उदाहरणार्थ, चित्र 3.3 में $t=18$ s से $t=22$ s के बीच की अवधि में कार की गति ।

(*c*) कोई वस्तु ऋणात्मक दिशा में ऋणात्मक त्वरण से गतिमान है । उदाहरणार्थ, चित्र 3.1 में O से x की ऋण दिशा में त्वरित होती कार ।

(*d*) कोई वस्तु पहले t समय तक धनात्मक दिशा में चलती है और फिर ऋणात्मक दिशा में ऋणात्मक त्वरण के साथ गतिमान है । उदाहरण के लिए, चित्र 3.1 में कार का t_1 समय तक O से बिंदु Q तक मंदन के साथ जाना, फिर, मुड़कर उसी ऋणात्मक त्वरण के साथ t_2 समय तक चलते रहना है ।

किसी गतिमान वस्तु के वेग-समय ग्राफ का एक महत्त्वपूर्ण लक्षण है कि ***v–t* ग्राफ के अंतर्गत आने वाला क्षेत्रफल वस्तु का विस्थापन व्यक्त करता है** । इस कथन की सामान्य उपपत्ति के लिए अवकल गणित की आवश्यकता पड़ती है तथापि सुगमता के लिए एक स्थिर वेग u से गतिमान वस्तु पर विचार करके इस कथन की सत्यता प्रमाणित कर सकते हैं। इसका वेग-समय ग्राफ चित्र 3.11 में दिखाया गया है ।



चित्र 3.11 v-t ग्राफ के अंतर्गत आने वाला क्षेत्रफल वस्तु द्वारा निश्चित अंतराल में विस्थापन व्यक्त करता है ।

चित्र में v-t वक्र समय अक्ष के समांतर एक सरल रेखा है । $t=0$ से $t=T$ के मध्य इस रेखा के अंतर्गत आने वाला क्षेत्रफल उस आयत के क्षेत्रफल के बराबर है जिसकी ऊंचाई u तथा आधार T है । अतएव क्षेत्रफल $=u\times T=uT$, जो इस समय में वस्तु के विस्थापन को व्यक्त करता है । कोई क्षेत्रफल दूरी के बराबर कैसे हो सकता है ? सोचिए । दोनों निर्देशांक अक्षों के अनुदिश जो राशियां अंकित की गई हैं, यदि आप उनकी विमाओं पर ध्यान देंगे तो आपको इस प्रश्न का उत्तर मिल जाएगा ।

ध्यान दीजिए कि इस अध्याय में अनेक स्थानों पर खींचे गए x–t, v–t तथा a–t ग्राफों में कुछ बिंदुओं पर तीक्ष्ण मोड़ हैं। इसका आशय यह है कि दिए गए फलनों का इन बिंदुओं पर अवकलन नहीं निकाला जा सकता । परंतु किसी वास्तविक परिस्थिति में सभी ग्राफ निष्कोण वक्र होंगे और

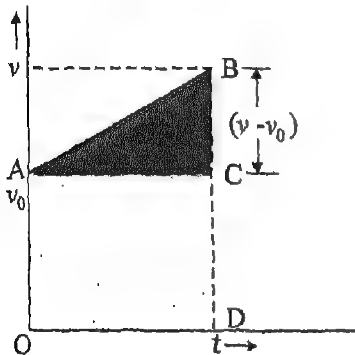
उनके सभी बिंदुओं पर फलनों का अवकलन प्राप्त किया जा सकता है ।

3.6 एकसमान त्वरण से गतिमान वस्तु का शुद्धगतिकी संबंधी समीकरण

अब हम एकसमान त्वरण 'a' से गतिमान वस्तु के लिए कुछ गणितीय समीकरण व्युत्पन्न कर सकते हैं जो पांचों राशियों को किसी प्रकार एक दूसरे से संबंधित करते हैं । ये राशियां हैं विस्थापन (x), लिया गया समय (t), $t=0$ समय पर वस्तु का प्रारंभिक वेग (v_0), समय t बीत जाने पर अंतिम वेग (v), तथा त्वरण (a) । हम पहले ही v_0 और v के मध्य एक समीकरण (3.6) प्राप्त कर चुके हैं जिसमें एकसमान त्वरण a तथा समय t निहित हैं । यह समीकरण है :

$$v = v_0 + at$$

इस समीकरण को चित्र 3.12 में ग्राफ के रूप में निरूपित किया गया है ।



चित्र 3.12 एकसमान त्वरण से गतिमान वस्तु के लिए v-t वक्र के नीचे का क्षेत्रफल ।

इस वक्र के अंतर्गत आने वाला क्षेत्रफल = 0 से t समय के बीच का क्षेत्रफल = त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल + आयत OACD का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}(v-v_0)\,t + v_0 t$$

जैसे कि पहले स्पष्ट किया जा चुका है, v-t ग्राफ के अंतर्गत आने वाला क्षेत्रफल वस्तु का विस्थापन होता है, अत: वस्तु का विस्थापन x होगा:

$$x = \frac{1}{2}(v-v_0)\,t + v_0 t \qquad (3.7)$$

परंतु $v-v_0 = at$

अत: $x = \frac{1}{2}at.t + v_0 t$

अथवा $x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad (3.8)$

समीकरण (3.7) को हम निम्न प्रकार भी लिख सकते हैं

$$x = \frac{v+v_0}{2}t$$

$$= \bar{v}.t \qquad (3.9a)$$

$$\bar{v} = \frac{v+v_0}{2} \quad \textbf{(मात्र स्थिर त्वरण के लिए)} \qquad (3.9b)$$

समीकरण (3.9a) तथा (3.9b) का अभिप्राय है कि वस्तु का विस्थापन x माध्य वेग $\bar{v}$ से होता है जो प्रारंभिक एवं अंतिम वेगों के समांतर माध्य के बराबर होता है ।

समीकरण (3.6) से $t=(v-v_0)/a$ । यह मान समीकरण (3.9a) में रखने पर

$$x = \bar{v}\,t = \frac{v+v_0}{2}.\frac{v-v_0}{a} = \frac{v^2-v_0^2}{2a}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ax \qquad (3.10)$$

यदि हम समीकरण (3.6) से t का मान समीकरण (3.8) में रख दें तो भी उपरोक्त समीकरण को प्राप्त किया जा सकता है । इस प्रकार पांचों राशियों v_0, v, a, t तथा x के बीच संबंध स्थापित करनेवाले हमें तीन महत्त्वपूर्ण समीकरण प्राप्त हुए-

$$v = v_0 + at$$

$$x = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ax \qquad (3.11a)$$

ये सभी एकसमान त्वरित सरल रेखीय गति के शुद्धगतिक समीकरण हैं ।

व्यंजक (3.11a) में जो समीकरण दिए गए हैं, उसकी व्युत्पत्ति के लिए हमने माना है कि क्षण $t=0$ पर वस्तु की स्थिति 0 है (अर्थात् $x=0$) । परंतु यदि हम यह मान लें कि क्षण $t=0$ पर वस्तु की स्थिति शून्य न हो, वरन् अशून्य यानी x_0 हो तो समीकरण (3.11a) और व्यापक समीकरण में रूपांतरित हो जाएगी (यदि हम x के स्थान पर $x-x_0$ लिखें):

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x-x_0) \qquad (3.11b)$$

अब हम उपरोक्त समीकरणों का उपयोग कुछ महत्त्वपूर्ण उदाहरणों में करेंगे ।

> **उदाहरण 3.3** किसी बहुमंजिले भवन की ऊपरी छत से कोई गेंद 20 m s^{-1} के वेग से ऊपर की ओर ऊर्ध्वाधर दिशा में उछाली गई है। जिस बिंदु से गेंद फेंकी गई है धरती से उसकी ऊंचाई 25.0 m है। (a) गेंद कितनी ऊपर जाएगी ?, तथा (b) गेंद धरती से टकराने के पहले कितना समय लेगी? $g = 10 \text{ m s}^{-2}$।

हल (a) y - अक्ष को चित्र 3.13 में दिखाए गए अनुसार ऊर्ध्वाधर दिशा में ऊपर की ओर इस प्रकार चुनते हैं कि अक्ष का शून्य बिंदु धरती पर हो।

अब, $v_0 = 20 \text{ m s}^{-1}$

$a = -10 \text{ m s}^{-2}$

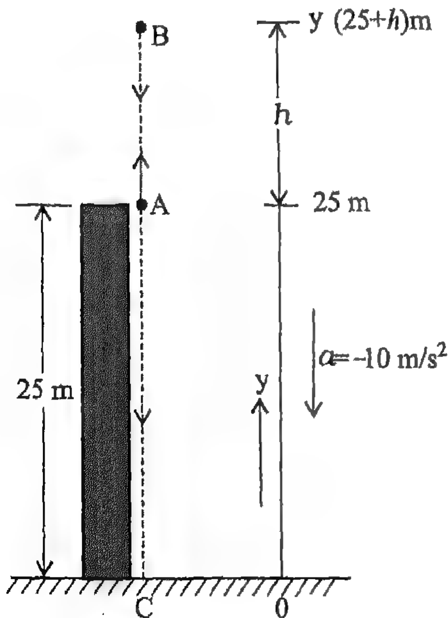
$v = 0 \text{ m s}^{-1}$

यदि फेंके गए बिंदु से गेंद h ऊंचाई तक जाती है तो समीकरण $v^2 = v_0^2 + 2ay$ से हमें निम्नलिखित परिणाम मिलेगा–

$0 = (20)^2 + 2(-10)h$, हल करने पर,

$\therefore h = 20 \text{ m}$

(b) इस खण्ड का उत्तर हम दो प्रकार से प्राप्त कर सकते हैं। **इन दोनों विधियों को ध्यानपूर्वक समझें।**



चित्र 3.13

पहली विधि : इसमें, हम गेंद के मार्ग को दो भागों में विभाजित करते हैं : ऊपर की ओर गति (A से B) तथा नीचे की ओर गति (B से C) तथा संगत समय t_1 व t_2 निकाल लेते हैं। क्योंकि B पर वेग शून्य है, इसलिए :

$v = v_0 + at$

$0 = 20 - 10\, t_1$

या $t_1 = 2 \text{ s}$

इस समय में गेंद बिंदु A से B पर पहुंचती है। B अर्थात् अधिकतम ऊंचाई से गेंद गुरुत्वजनित त्वरण से मुक्त रूप से नीचे की ओर गिरती है। क्योंकि गेंद y की ऋणात्मक दिशा के अनुदिश चलती है, इसलिए निम्नलिखित समीकरण का उपयोग करके हम t_2 का मान निकाल लेते हैं–

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

हमें $y_0 = 45$ m दिया है तथा $y = 0, v_0 = 0, a = -10 \text{ m s}^{-2}$

$\therefore 0 = 45 + (1/2)(-10)\, t_2^2$

अतः $t_2 = 3 \text{ s}$

इसलिए धरती पर टकराने के पहले गेंद द्वारा लिया गया कुल समय $t_1 + t_2 = 2 \text{ s} + 3 \text{ s} = 5 \text{ s}$ होगा।

दूसरी विधि : मूल बिंदु के सापेक्ष गेंद के प्रारंभिक तथा अंतिम स्थितियों के निर्देशांकों को निम्नलिखित समीकरण में उपयोग करके हम गेंद द्वारा लिए गए कुल समय की गणना कर सकते हैं :

$$y = y_0 + v_0\, t + \tfrac{1}{2}a\, t^2$$

$y = 0 \text{ m},\ y_0 = 25 \text{ m}, v_0 = 20 \text{ m s}^{-1}, a = -10 \text{ m s}^{-2}, t = ?$

$0 = 25 + 20\,t + (1/2)(-10)t^2$

$5t^2 - 20t - 25 = 0$

t के लिए यदि इस द्विघाती समीकरण को हल करें, तो

$t = 5 \text{ s}$।

ध्यान दीजिए कि दूसरी विधि पहली से श्रेष्ठ है क्योंकि इसमें हमें गति के पथ की चिंता नहीं करनी है क्योंकि वस्तु स्थिर त्वरण से गतिमान है। ◀

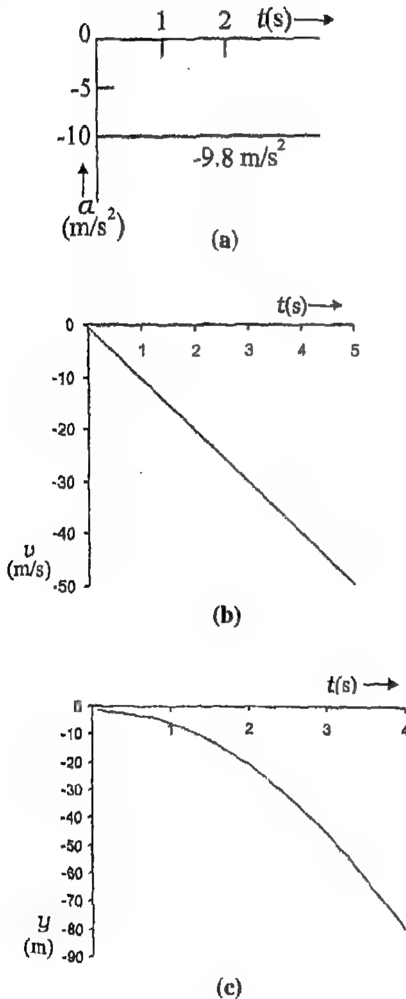
> **उदाहरण 3.4 मुक्त पतन** : स्वतंत्रतापूर्वक नीचे की ओर गिरती हुई वस्तु की गति का वर्णन कीजिए। वायुजनित प्रतिरोध की उपेक्षा की जा सकती है।

हल यदि धरती की सतह से थोड़ी ऊंचाई पर से कोई वस्तु छोड़ दी जाए तो वह पृथ्वी की ओर गुरुत्व बल के कारण त्वरित होगी। इस प्रकार के बल के विषय में हम आठवें अध्याय में विस्तार से पढ़ेंगे। गुरुत्वजनित त्वरण को हम g से व्यक्त करते हैं। यदि वस्तु पर वायु के प्रतिरोध को हम नगण्य मानें तो हम कहेंगे कि वस्तु का पतन **मुक्त रूप** से हो रहा है।

यदि गिरती हुई वस्तु द्वारा चली गई दूरी पृथ्वी की त्रिज्या की तुलना में बहुत कम है, तो हम g के मान को स्थिर अर्थात् $9.8\ m\ s^{-2}$ ले सकते हैं । इस प्रकार मुक्त पतन एकसमान त्वरण वाली गति का एक उदाहरण है ।

हम यह मानेंगे कि वस्तु की गति $-y$ दिशा में है, क्योंकि ऊपर की दिशा को हम धनात्मक मानते हैं । गुरुत्वीय त्वरण की दिशा सदैव नीचे की ओर होती है, इसलिए इसे हम ऋणात्मक दिशा में लेते हैं ।

अतएव, $a = -g = 9.8\ m\ s^{-2}$



चित्र 3.14 मुक्त पतन में वस्तु की गति । (a) समय के अनुरूप वस्तु के त्वरण में परिवर्तन, (b) समय के अनुरूप वस्तु के वेग में परिवर्तन, (c) समय के अनुरूप वस्तु की स्थिति में परिवर्तन ।

वस्तु को $y = 0$ स्थिति में विरामावस्था से गिराते हैं । इसलिए $v_0=0$ और वस्तु के लिए गति संबंधी (3.11a) में दिए गए समीकरण निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त किए जा सकते हैं-

$$v = 0 - g\,t = -9.8\,t\ m\ s^{-1}$$
$$y = 0 - (1/2)g\,t^2 = -4.9\,t^2\ m$$
$$v^2 = 0 - 2gy = -19.6y\ (m\ s^{-1})^2$$

ये समीकरण वस्तु के वेग, और उसके द्वारा चली गई दूरी को समय के फलन के रूप में तथा दूरी के सापेक्ष उसके वेग में हो रहे परिवर्तन को व्यक्त करते हैं । समय के सापेक्ष त्वरण, वेग तथा दूरी के परिवर्तन को चित्र 3.14(a), (b) तथा (c) में दिखलाया गया है । ◂

▸ ***उदाहरण 3.5* गैलीलियो का विषम अंक संबंधित नियम :** इस नियम के अनुसार "विरामावस्था से गिरती हुई किसी वस्तु द्वारा समान समय अंतरालों में चली गई दूरियां एक दूसरे से उसी अनुपात में होती हैं जिस अनुपात में एक से प्रारंभ होने वाले विषय अंक [अर्थात् 1: 3: 5: 7,......]"। इस कथन को सिद्ध कीजिए ।

हल हम विरामावस्था से गिरती हुई किसी वस्तु के समय अंतराल को बहुत-से समान समय अंतरालों τ में विभक्त कर लेते हैं तथा क्रमशः इन समय अंतरालों में वस्तु द्वारा चली गई दूरी निकालते जाते हैं । इस स्थिति में वस्तु का प्रारंभिक वेग शून्य है, अतः

$$y = -\frac{1}{2}gt^2$$

इस समीकरण की सहायता से हम भिन्न-भिन्न समय अंतरालों $0, \tau, 2\tau, 3\tau, 4\tau,......$ में वस्तु की स्थितियों की गणना कर सकते हैं जिन्हें सारणी 3.2 के दूसरे कॉलम में दिखाया है । यदि प्रथम समय अंतराल τ पर वस्तु का स्थिति निर्देशांक y_0 लें ($y_0 = (-1/2)g\tau^2$) तो आगे के समय अंतरालों के बाद वस्तु की स्थितियों को y_0 के मात्रक में कॉलम तीन में दिए गए तरीके से व्यक्त कर सकते हैं । क्रमिक समय अंतरालों (प्रत्येक τ) में चली गई दूरियों को कॉलम चार में व्यक्त किया गया है । स्पष्ट है कि क्रमशः समय अंतरालों में वस्तु द्वारा चली गई दूरियां 1:3:5:7:9:11...... के सरल अनुपात में हैं जैसा कि अंतिम कॉलम में दिखाया गया है ।

इस नियम को सर्वप्रथम गैलीलियो गैलिली (1564-1642) ने प्रतिपादित किया था जिन्होंने मुक्त रूप से गिरती हुई वस्तु का पहली बार विधिवत् परिमाणात्मक अध्ययन किया था ।

सारिणी 3.2

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0	0	0		
τ	$(-1/2)g\tau^2$	y_o	y_o	1
2τ	$-4(1/2)g\tau^2$	$4y_o$	$3y_o$	3
3τ	$-9(1/2)g\tau^2$	$9y_o$	$5y_o$	5
4τ	$-16(1/2)g\tau^2$	$16y_o$	$7y_o$	7
5τ	$-25(1/2)g\tau^2$	$25y_o$	$9y_o$	9
6τ	$-36(1/2)g\tau^2$	$36y_o$	$11y_o$	11

▶ ***उदाहरण 3.6*** **वाहनों की अवरोधन दूरी :** अवरोधन दूरी से हमारा अभिप्राय उस दूरी से है जो गतिमान वस्तु ब्रेक लगाने के कारण रुकने से पहले चल चुकी होती है। सड़क पर गतिमान वाहनों की सुरक्षा के संबंध में यह एक महत्वपूर्ण कारक है । यह दूरी वाहन के प्रारंभिक वेग (v_o) तथा उसके ब्रेक की क्षमता या ब्रेक लगाए जाने के परिणामस्वरूप वाहन में उत्पन्न मंदन $-a$ पर निर्भर करती है। किसी वाहन की अवरोधन दूरी के लिए v_o तथा a के पदों में व्यंजक निकालिए।

हल मान लीजिए कि वाहन रुकने के पूर्व d_s दूरी चल चुका है । गति संबंधी समीकरण $v^2 = v_0^2 + 2ax$ में यदि अंतिम वेग $v = 0$ तो अवरोधन दूरी

$$d_s = \frac{v_0^2}{2a}$$

होगी । अतः अवरोधन दूरी वाहन के प्रारंभिक वेग के वर्ग के समानुपाती होती है । यदि प्रारंभिक वेग को दूना कर दिया जाए तो उसी मंदन के लिए अवरोधन दूरी चार गुनी हो जाएगी ।

कार के किसी विशिष्ट मॉडल के लिए विभिन्न वेगों 11, 15, 20 तथा 25 m s^{-1} के संगत अवरोधन दूरियां क्रमशः 10 m, 20 m, 34 m तथा 50 m पाई गई हैं जो उपरोक्त समीकरण से प्राप्त मानों के लगभग संगत हैं ।

कुछ क्षेत्रों, जैसे किसी विद्यालय के निकट वाहनों की चाल की सीमा के निर्धारण में अवरोधन दूरी का ज्ञान एक महत्त्वपूर्ण कारक होता है । ◀

▶ ***उदाहरण 3.7*** **प्रतिक्रिया काल :** कभी-कभी हमारे सामने ऐसी परिस्थिति पैदा हो जाती है कि हमसे तत्क्षण कार्यवाही की अपेक्षा की जाती है किन्तु अनुक्रिया व्यक्त करने में हमसे कुछ समय लग जाता है । प्रतिक्रिया काल किसी व्यक्ति को कोई घटनाक्रम देखने में, उसके विषय में सोचने में तथा कार्यवाही करने में लगने वाला समय है। उदाहरणस्वरूप, मान लीजिए कि कोई व्यक्ति सड़क पर कार चला रहा है और अचानक रास्ते में एक लड़का सामने आ जाता है तो कार में तेजी से ब्रेक लगाने के पहले व्यक्ति को जो समय लग जाता है, उसे प्रतिक्रिया काल कहेंगे । प्रतिक्रिया काल परिस्थिति की जटिलता एवं व्यक्ति विशेष पर निर्भर करता है ।

आप स्वयं का प्रतिक्रिया काल एक साधारण प्रयोग द्वारा नाप सकते हैं । आप अपने मित्र को एक रूलर दें और उससे कहें कि वह आपके हाथ के अंगूठे और तर्जनी के बीच की खाली जगह से रूलर ऊर्ध्वाधर दिशा में गिरा दे (चित्र 3.15) । ज्योंही रूलर को छोड़ा जाए आप उसे पकड़ लें । इन दोनों घटनाओं (रूलर को छोड़ने तथा आपके द्वारा पकड़ने) के बीच लगे समय t_r तथा रूलर द्वारा चली गई दूरी d को नाप लें । किसी विशेष उदाहरण में d = 21.0 cm है तो प्रतिक्रिया काल की गणना कीजिए ।

हल रूलर मुक्त रूप से गिरता है, अतः $v_0 = 0$, $g = -9.8$ ms^{-2} प्रतिक्रिया काल t_r तथा तय की गई दूरी (d) में संबंध है,

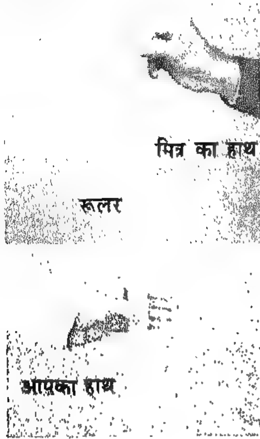
$$d = -\frac{1}{2} g t_r^2 = 4.9 t_r^2 \text{ m}$$

या

$$t_r = \sqrt{\frac{d}{4.9}} \text{ s}$$

यदि $d = 21.0$ cm तो प्रतिक्रिया काल

$$t_r = \sqrt{\frac{0.21}{4.9}}\,s \simeq 0.2\,s$$



चित्र 3.15 प्रतिक्रिया काल का मापन ।

3.7 आपेक्षिक वेग

आपको रेलगाड़ी में यात्रा करने तथा यात्रा के दौरान यह देखने का अवसर मिला होगा कि एक दूसरी रेलगाड़ी जो आपकी ही दिशा में गतिमान है, आपसे आगे निकल जाती है । क्योंकि यह रेलगाड़ी आपसे आगे निकल जाती है इसलिए यह आपकी रेलगाड़ी से अधिक तीव्र गति से चल रही है । परंतु यह आपको उस व्यक्ति की अपेक्षा धीमी चलती दिखाई दे रही होगी, जो धरती पर खड़ा होकर दोनों रेलगाड़ियों को देख रहा है । यदि धरती के सापेक्ष दोनों रेलगाड़ियों का वेग समान है तो आपको ऐसा लगेगा कि दूसरी गाड़ी बिलकुल भी नहीं चल रही है । इन अनुभवों को समझने के लिए अब हम आपेक्षिक वेग की धारणा को प्रस्तुत करते हैं ।

ऐसी दो वस्तुओं A व B पर विचार कीजिए जो एक-विमा (मान लीजिए कि x-अक्ष) के अनुदिश औसत वेगों v_A तथा v_B से गतिमान हैं । (जब तक विशेष रूप से उल्लेखित न हो इस अध्याय में वेगों को धरती के सापेक्ष व्यक्त किया गया है) । यदि $t=0$ क्षण पर वस्तु A व B की स्थितियां क्रमशः $x_A(0)$ तथा $x_B(0)$ हों, तो किसी अन्य क्षण t पर ये स्थितियाँ निम्नवत् होंगी :

$$x_A(t) = x_A(0) + v_A t \qquad (3.12a)$$

$$x_B(t) = x_B(0) + v_B t \qquad (3.12b)$$

खण्ड 3.1 में दी गई परिभाषा के अनुसार वस्तु A तथा वस्तु B के मध्य विस्थापन

$$x_{BA}(t) = x_B(t) - x_A(t)$$

$$= [x_B(0) - x_A(0)] + (v_B - v_A)t \qquad (3.13)$$

होगा । समीकरण (3.13) की हम आसानी से व्याख्या कर सकते हैं । इस समीकरण से यह मालूम पड़ता है कि जब वस्तु A से देखते हैं तो वस्तु B का वेग $v_B - v_A$ होता है क्योंकि A से B तक विस्थापन एकांक समय में $v_B - v_A$ की दर से अनवरत बदलता जाता है । अतः हम यह कहते हैं कि वस्तु B का वेग वस्तु A के सापेक्ष $v_B - v_A$ होता है:

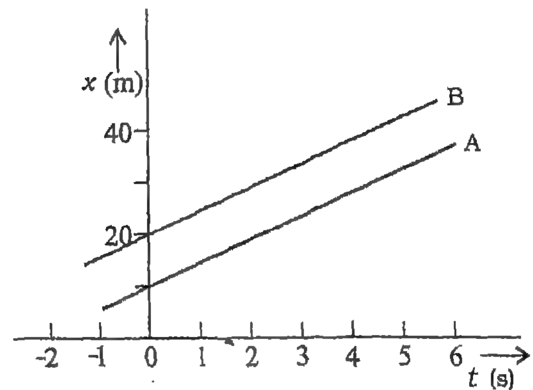
$$v_{BA} = v_B - v_A \qquad (3.14a)$$

इसी प्रकार वस्तु A का वेग वस्तु B के सापेक्ष

$$v_{AB} = v_A - v_B \qquad (3.14b)$$

होगा । इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि,

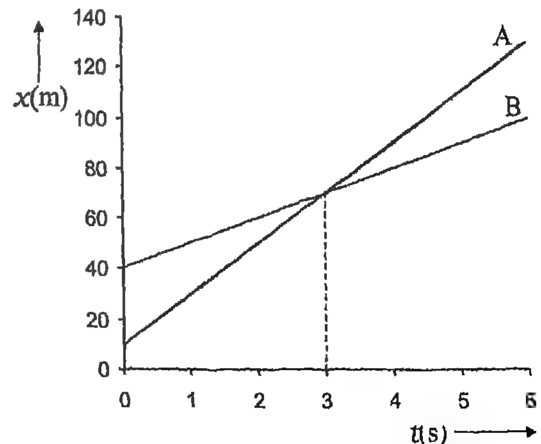
$$v_{BA} = -v_{AB} \qquad (3.14c)$$



चित्र 3.16 समान वेग से गतिमान वस्तुओं A व B के लिए स्थिति-समय ग्राफ ।

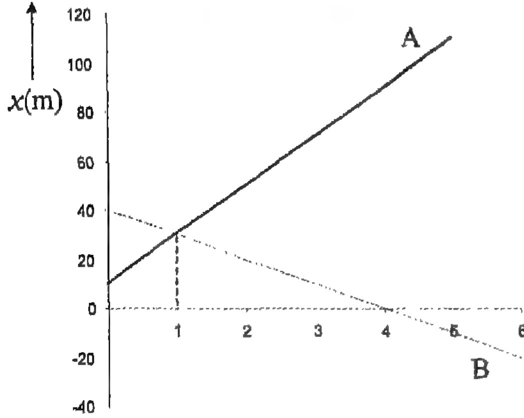
अब हम कुछ विशेष उदाहरणों पर विचार करेंगे :

(a) यदि $v_B = v_A$, $v_B - v_A = 0$, तो समीकरण (3.13) से $x_B(t) - x_A(t) = x_B(0) - x_A(0)$ । इसका आशय यह है कि दोनों वस्तुएं एक दूसरे से सदैव स्थिर दूरी $(x_B(0) - x_A(0))$ पर हैं और उनके स्थिति-समय ग्राफ परस्पर समांतर सरल रेखाएं होती हैं, जैसा चित्र 3.16 से दर्शाया गया है । इस उदाहरण में आपेक्षिक वेग v_{AB} या v_{BA} शून्य है ।



चित्र 3.17 असमान वेगों से गतिमान वस्तुओं के स्थिति-समय ग्राफ जिसमें मिलने का समय दर्शाया गया है ।

(b) यदि $v_A > v_B$; $v_B - v_A$ ऋणात्मक है । एक वस्तु के ग्राफ का ढाल दूसरी वस्तु के ग्राफ के ढाल की अपेक्षा अधिक है । दोनों ग्राफ एक उभयनिष्ठ बिंदु पर मिलते हैं । उदाहरण के तौर पर यदि $v_A = 20\,m\,s^{-1}$ व $x_A(0) = 10\,m$; तथा $v_B = 10\,m\,s^{-1}$ व $x_B(0) = 40\,m$ तो जिस क्षण पर दोनों वस्तु एक दूसरे से मिलती हैं वह $t = 3\,s$ होगा (चित्र 3.17) । इस क्षण वे दोनों वस्तुएं $x_A(t) = x_B(t) = 70\,m$ पर होंगी । इस प्रकार इस क्षण पर वस्तु A वस्तु B से आगे निकल जाएगी । इस उदाहरण में $v_{BA} = 10\,m\,s^{-1} - 20\,m\,s^{-1} = -10\,m\,s^{-1} = -v_{AB}$



चित्र 3.18 परस्पर विपरीत दिशाओं में गतिमान दो वस्तुओं के स्थिति-समय ग्राफ जिसमें दोनों के मिलने का समय दर्शाया गया है ।

(c) मान लीजिए कि v_A व v_B विपरीत चिह्नों के हैं । उदाहरणस्वरूप, उपरोक्त उदाहरण में यदि वस्तु A स्थिति $x_A(0)=10\,m$ से $20\,m\,s^{-1}$ के वेग से तथा वस्तु B स्थिति $x_B(0) = 40\,m$ से $-10\,m\,s^{-1}$ वेग से चलना प्रारंभ करती हैं तो वे $t=1\,s$ (चित्र 3.18) पर मिलती हैं । A के सापेक्ष B का वेग, $v_{BA} = [-10-(20)]\,m\,s^{-1} = -30\,m\,s^{-1} = -v_{AB}$ होगा । इस उदाहरण में, v_{BA} या v_{AB} का परिमाण ($=30\,m\,s^{-1}$) वस्तु A या B के वेग के परिमाण से अधिक है । यदि विचाराधीन वस्तुएं दो रेलगाड़ियां हैं तो उस व्यक्ति के लिए जो किसी एक रेलगाड़ी में बैठा है, दूसरी रेलगाड़ी बहुत तेज चलती हुई प्रतीत होती है ।

ध्यान दीजिए कि समीकरण (3.14) तब भी सही होगी जब v_A और v_B तात्क्षणिक वेगों को व्यक्त करते हैं ।

उदाहरण 3.8 दो समांतर रेल पटरियां उत्तर-दक्षिण दिशा में हैं । एक रेलगाड़ी A उत्तर दिशा में 54 km/h की चाल से गतिमान है तथा दूसरी रेलगाड़ी B दक्षिण दिशा में 90 km/h की चाल से चल रही है ।

(a) A के सापेक्ष B का आपेक्षिक वेग निकालिए,
(b) B के सापेक्ष पृथ्वी का आपेक्षिक वेग निकालिए,
(c) रेलगाड़ी A की छत पर गति की विपरीत दिशा में (रेलगाड़ी A के सापेक्ष $18\,km/h^{-1}$ के वेग से) दौड़ते हुए उस बंदर के वेग की गणना कीजिए जो पृथ्वी पर खड़े व्यक्ति द्वारा देखा जा रहा है ।

हल (a) x-अक्ष की धनात्मक दिशा को दक्षिण से उत्तर की ओर चुनिए । तब,

$$v_A = 54\,km/h^{-1} = 15\,m\,s^{-1}$$
$$v_B = -90\,km/h^{-1} = -25\,m\,s^{-1}$$

A के सापेक्ष B का आपेक्षिक वेग $v_B - v_A = -40\,m\,s^{-1}$ होगा । इसका अभिप्राय यह है कि रेलगाड़ी B रेलगाड़ी A के सापेक्ष उत्तर से दक्षिण दिशा में $40\,m\,s^{-1}$ की गति से चलती प्रतीत होगी ।

(b) B के सापेक्ष पृथ्वी का आपेक्षिक वेग $= 0 - v_B = 25\,m\,s^{-1}$

(c) मान लीजिए कि पृथ्वी के सापेक्ष बंदर का वेग v_M है । इसलिए A के सापेक्ष बंदर का वेग $v_M - v_A = -18\,km\,h^{-1} = -5\,m\,s^{-1}$ । फलस्वरूप, $v_M = (15-5)\,m\,s^{-1} = 10\,m\,s^{-1}$ ◀

सारांश

1. यदि किसी वस्तु की स्थिति समय के साथ बदलती है तो हम कहते है कि वस्तु *गतिमान* है । एक सरल रैखिक गति में वस्तु की स्थिति को सुगमता के दृष्टिकोण से चुने गए किसी मूल बिंदु के सापेक्ष निर्दिष्ट किया जा सकता है । मूल बिंदु के दाईं ओर की स्थितियों को धनात्मक तथा बाईं ओर की स्थितियों को ऋणात्मक कहा जाता है ।
2. किसी वस्तु द्वारा चली गई दूरी की लंबाई को *पथ-लंबाई* के रूप में परिभाषित करते हैं ।
3. वस्तु की स्थिति में परिवर्तन को हम *विस्थापन* कहते हैं और इसे Δx से निरूपित करते हैं;

   $\Delta x = x_2 - x_1$

   x_1 और x_2 वस्तु की क्रमशः प्रारंभिक तथा अंतिम स्थितियां हैं ।

   पथ-लंबाई उन्हीं दो बिंदुओं के बीच विस्थापन के परिणाम के बराबर या उससे अधिक हो सकती है ।
4. जब कोई वस्तु समान समय अंतराल में समान दूरियां तय करती है तो ऐसी गति को *एकसमान गति* कहते हैं । यदि ऐसा नहीं है तो गति *असमान* होती है ।

5. विस्थापन की अवधि के समय अंतराल द्वारा विस्थापन को विभाजित करने पर जो राशि प्राप्त होती है, उसे *औसत वेग* कहते हैं तथा इसे $\bar{v}$ द्वारा चिह्नित करते हैं;

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$x-t$ ग्राफ में किसी दिए गए अंतराल की अवधि में औसत वेग उस सरल रेखा की प्रवणता है जो समय अंतराल की प्रारंभिक एवं अंतिम स्थितियों को जोड़ती है ।

6. वस्तु की यात्रा की अवधि में चली गई कुल पथ-लंबाई एवं इसमें लगे समय अंतराल अनुपात को *औसत चाल* कहते हैं। किसी वस्तु की औसत चाल किसी दिए गए समयान्तर में उसके औसत वेग के परिणाम के बराबर अथवा अधिक होती है।

7. जब समय अंतराल Δt अत्यल्प हो तो वस्तु के औसत वेग के सीमान्त मान को *तात्क्षणिक वेग* या केवल *वेग* कहते हैं :

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

किसी क्षण वस्तु का वेग उस क्षण स्थान समय-ग्राफ की प्रवणता के बराबर होता है ।

8. वस्तु के वेग में परिवर्तन को संगत समय अंतराल से विभाजित करने पर जो राशि प्राप्त होती है, उसे *औसत त्वरण* कहते हैं :

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

9. जब समय अंतराल अत्यल्प $\Delta t \to 0$ हो तो, वस्तु के औसत त्वरण के सीमान्त मान को *तात्क्षणिक त्वरण* या केवल *त्वरण* कहते हैं :

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

किसी क्षण वस्तु का त्वरण उस क्षण वेग-समय ग्राफ की प्रवणता के बराबर होता है । एकसमान गति के लिए त्वरण शून्य होता है तथा x - t ग्राफ समय-अक्ष पर आनत एक सरल रेखा होती है । इसी प्रकार एकसमान गति के लिए v - t ग्राफ समय-अक्ष के समांतर सरल रेखा होती है । एकसमान त्वरण के लिए x - t ग्राफ परवलय होता है जबकि v - t ग्राफ समय-अक्ष के आनत एक सरल रेखा होती है ।

10. किन्हीं दो क्षणों t_1 तथा t_2 के मध्य खींचे गए वेग-समय वक्र के अंतर्गत आने वाला क्षेत्रफल वस्तु के विस्थापन के बराबर होता है ।

11. एकसमान त्वरण से गतिमान वस्तु के लिए कुछ सामान्य समीकरणों का एक समूह होता है जिससे पांच राशियां यथा विस्थापन x, तत्संबंधित समय t, प्रारंभिक वेग v_0, अंतिम वेग v तथा त्वरण a एक दूसरे से संबंधित होते हैं । इन समीकरणों को वस्तु के शुद्धगतिक समीकरणों के नाम से जाना जाता है :

$$v = v_0 + at$$

$$x = v_0 + \frac{1}{2}at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ax$$

इन समीकरणों में क्षण $t = 0$ पर वस्तु की स्थिति $x = 0$ ली गई है । यदि वस्तु $x = x_0$ से चलना प्रारंभ करे तो उपर्युक्त समीकरणों में x के स्थान पर $(x - x_0)$ लिखेंगे ।

भौतिक राशि	प्रतीक	विमाएँ	मात्रक	टिप्पणी
पथ-लंबाई		[L]	m	
विस्थापन	Δx	[L]	m	$= x_2 - x_1$ एक विमा में इसका चिह्न दिशा को इंगित करता है ।
वेग :		$[LT^{-1}]$	$m\ s^{-1}$	
(a) औसत	$\bar{v}$			$= \frac{\Delta x}{\Delta t}$
(b) तात्क्षणिक	v			$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$ एक विमा में इसका चिह्न दिशा को इंगित करता है
चाल		$[LT^{-1}]$	$m\ s^{-1}$	
(a) औसत				$= \frac{\text{पथ-लंबाई}}{\text{समय अंतराल}}$
(b) तात्क्षणिक				$= \frac{dx}{dt}$
त्वरण		$[LT^{-2}]$	$m\ s^{-2}$	
(a) औसत	$\bar{a}$			$= \frac{\Delta v}{\Delta t}$
(b) तात्क्षणिक	a			$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$ एक विमा में इसका चिह्न दिशा को इंगित करता है

विचारणीय विषय

1. सामान्यतया दो बिंदुओं के मध्य किसी वस्तु द्वारा चली गई पथ-लंबाई विस्थापन के परिणाम के बराबर नहीं होती । विस्थापन छोर के बिंदुओं पर निर्भर करता है जबकि पथ-लंबाई (जैसा नाम से पता चलता है) वास्तविक पथ पर निर्भर करती है । एक विमा में दोनों राशियां तभी बराबर होती हैं जब वस्तु गति की अवधि में अपनी दिशा नहीं बदलती है । अन्य सभी उदाहरणों में पथ-लंबाई विस्थापन के परिमाण से अधिक होती है ।

2. उपरोक्त बिंदु 1 के अनुसार किसी दिए गए समय अंतराल के लिए वस्तु की औसत चाल का मान या तो औसत वेग के परिमाण के बराबर होता है या उससे अधिक होता है । दोनों तभी बराबर होंगे जब पथ-लंबाई विस्थापन के परिणाम के बराबर होगी ।

3. मूल बिंदु तथा किसी अक्ष की धनात्मक दिशा का चयन अपनी रुचि का विषय है । आपको सबसे पहले इस चयन का उल्लेख कर देना चाहिए और इसी के बाद राशियों; जैसे- विस्थापन, वेग तथा त्वरण के चिह्नों का निर्धारण करना चाहिए ।

4. यदि किसी वस्तु की चाल बढ़ती जा रही है तो त्वरण वेग की दिशा में होगा परंतु यदि चाल घटती जाती है तो त्वरण वेग की विपरीत दिशा में होगा । यह कथन मूल बिंदु तथा अक्ष के चुनाव पर निर्भर नहीं करता ।
5. त्वरण के चिह्न से हमें यह पता नहीं चलता कि वस्तु की चाल बढ़ रही है या घट रही है । त्वरण का चिह्न (जैसा कि उपरोक्त बिंदु 3 में बतलाया गया है) अक्ष के धनात्मक दिशा के चयन पर निर्भर करता है । उदाहरण के तौर पर यदि ऊपर की ओर ऊर्ध्वाधर दिशा को अक्ष की धनात्मक दिशा माना जाए तो गुरुत्वजनित त्वरण ऋणात्मक होगी । यदि कोई वस्तु गुरुत्व के कारण नीचे की ओर गिर रही है तो भी वस्तु की चाल बढ़ती जाएगी यद्यपि त्वरण का मान ऋणात्मक है । वस्तु ऊपर की दिशा में फेंकी जाए तो उसी ऋणात्मक (गुरुत्वजनित) त्वरण के कारण वस्तु की चाल में कमी आती जाएगी ।
6. यदि किसी क्षण वस्तु का वेग शून्य है तो यह आवश्यक नहीं है कि उस क्षण उसका त्वरण भी शून्य हो । कोई वस्तु क्षणिक रूप से विरामावस्था में हो सकती है तथापि उस क्षण उसका त्वरण शून्य नहीं होगा । उदाहरणस्वरूप, यदि किसी वस्तु को ऊपर की ओर फेंका जाए तो शीर्षस्थ बिंदु पर उसका वेग तो शून्य होगा परंतु इस अवसर पर उसका त्वरण गुरुत्वजनित त्वरण ही होगा ।
7. गति संबंधी शुद्धगतिक समीकरणों [समीकरण (3.11)] की विभिन्न राशियाँ बीजगणितीय हैं अर्थात् वे धनात्मक या ऋणात्मक हो सकती हैं । ये समीकरण सभी परिस्थितियों (स्थिर त्वरण वाली एकविमीय गति) के लिए उपयुक्त होते हैं बशर्ते समीकरणों में विभिन्न राशियों के मान उपयुक्त चिह्नों के साथ रखे जाएं ।
8. तात्क्षणिक वेग तथा त्वरण की परिभाषाएं [समीकरण (3.3) तथा समीकरण (3.4)] यथार्थ हैं और सदैव सही हैं जबकि शुद्धगतिक समीकरण [समीकरण (3.11)] उन्हीं गतियों के लिए सही है जिनमें गति की अवधि में त्वरण का परिमाण और दिशा स्थिर रहते हैं ।

अभ्यास

3.1 नीचे दिए गए गति के कौन से उदाहरणों में वस्तु को लगभग बिंदु वस्तु माना जा सकता है :

(a) दो स्टेशनों के बीच बिना किसी झटके के चल रही कोई रेलगाड़ी ।

(b) किसी वृत्तीय पथ पर साइकिल चला रहे किसी व्यक्ति के ऊपर बैठा कोई बंदर ।

(c) जमीन से टकरा कर तेजी से मुड़ने वाली क्रिकेट की कोई फिरकती गेंद ।

(d) किसी मेज के किनारे से फिसल कर गिरा कोई बीकर ।

3.2 दो बच्चे A व B अपने विद्यालय O से लौट कर अपने-अपने घर क्रमशः P तथा Q को जा रहे हैं । उनके स्थिति-समय (x-t) ग्राफ चित्र 3.19 में दिखाए गए हैं । नीचे लिखे कोष्ठकों में सही प्रविष्टियों को चुनिए :

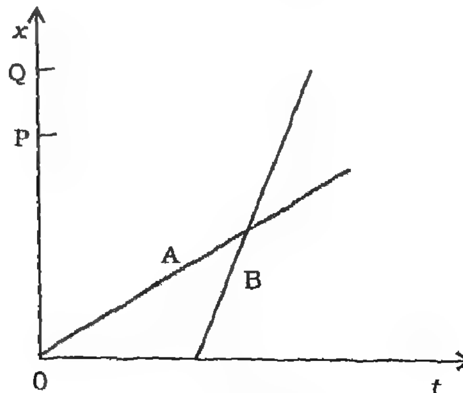
(a) B/A की तुलना में A/B विद्यालय से निकट रहता है ।

(b) B/A की तुलना में A/B विद्यालय से पहले चलता है ।

(c) B/A की तुलना A/B तेज चलता है ।

(d) A और B घर (एक ही/भिन्न) समय पर पहुंचते हैं ।

(e) A/B सड़क पर B/A से (एक बार/दो बार) आगे हो जाते हैं ।



चित्र 3.19

3.3 एक महिला अपने घर से प्रात: 9.00 बजे 2.5 km दूर अपने कार्यालय के लिए सीधी सड़क पर 5 km h^{-1} चाल से चलती है । वहां वह सायं 5.00 बजे तक रहती है और 25 km h^{-1} की चाल से चल रही किसी आटो रिक्शा द्वारा अपने घर लौट आती है । उपयुक्त पैमाना चुनिए तथा उसकी गति का x - t ग्राफ खींचिए ।

3.4 कोई शराबी किसी तंग गली में 5 कदम आगे बढ़ाता है और 3 कदम पीछे आता है, उसके बाद फिर 5 कदम आगे बढ़ाता है और 3 कदम पीछे आता है, और इसी तरह वह चलता रहता है । उसका हर कदम 1m लंबा है और 1s समय लगता है। उसकी गति का x - t ग्राफ खींचिए । ग्राफ से तथा किसी अन्य विधि से यह ज्ञात कीजिए कि वह जहां से चलना प्रारंभ करता है वहां से 13 m दूर किसी गड्ढे में कितने समय पश्चात् गिरता है ।

3.5 कोई जेट वायुयान 500 km h^{-1} की चाल से चल रहा है और यह जेट यान के सापेक्ष 1500 km h^{-1} की चाल से अपने दहन उत्पादों को बाहर निकालता है । जमीन पर खड़े किसी प्रेक्षक के सापेक्ष इन दहन उत्पादों की चाल क्या होगी ?

3.6 सीधे राजमार्ग पर कोई कार 126 km h^{-1} की चाल से चल रही है । इसे 200 m की दूरी पर रोक दिया जाता है । कार के मंदन को एकसमान मानिए और इसका मान निकालिए । कार को रुकने में कितना समय लगा ?

3.7 दो रेलगाड़ियां A व B दो समांतर पटरियों पर 72 km h^{-1} की एकसमान चाल से एक ही दिशा में चल रही हैं । प्रत्येक गाड़ी 400 m लंबी है और गाड़ी A गाड़ी B से आगे है । B का चालक A से आगे निकलना चाहता है तथा 1m s^{-2} से इसे त्वरित करता है । यदि 50 s के बाद B का गार्ड A के चालक से आगे हो जाता है तो दोनों के बीच आरंभिक दूरी कितनी थी ?

3.8 दो-लेन वाली किसी सड़क पर कार A 36 km h^{-1} की चाल से चल रही है । एक दूसरे की विपरीत दिशाओं में चलती दो कारें B व C जिनमें से प्रत्येक की चाल 54 km h^{-1} है, कार A तक पहुंचना चाहती हैं । किसी क्षण जब दूरी AB दूरी AC के बराबर है तथा दोनों 1km है, कार B का चालक यह निर्णय करता है कि कार C के कार A तक पहुंचने के पहले ही वह कार A से आगे निकल जाए । किसी दुर्घटना से बचने के लिए कार B का कितना न्यूनतम त्वरण जरूरी है ?

3.9 दो नगर A व B नियमित बस सेवा द्वारा एक दूसरे से जुड़े हैं और प्रत्येक T मिनट के बाद दोनों तरफ बसें चलती हैं। कोई व्यक्ति साइकिल से 20 km h^{-1} की चाल से A से B की तरफ जा रहा है और यह नोट करता है कि प्रत्येक 18 मिनट के बाद एक बस उसकी गति की दिशा में तथा प्रत्येक 6 मिनट बाद उसके विपरीत दिशा में गुजरती है । बस सेवाकाल T कितना है और बसें सड़क पर किस चाल (स्थिर मानिए) से चलती हैं ?

3.10 कोई खिलाड़ी एक गेंद को ऊपर की ओर आरंभिक चाल 29 m s^{-1} से फेंकता है,

(i) गेंद की ऊपर की ओर गति के दौरान त्वरण की दिशा क्या होगी ?

(ii) इसकी गति के उच्चतम बिंदु पर गेंद के वेग व त्वरण क्या होंगे ?

(iii) गेंद के उच्चतम बिंदु पर स्थान व समय को $x = 0$ व $t = 0$ चुनिए, ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर की दिशा को x- की धनात्मक दिशा मानिए । गेंद की ऊपर की व नीचे की ओर गति के दौरान स्थिति, वेग व त्वरण के चिह्न बताइए ।

(iv) किस ऊंचाई तक गेंद ऊपर जाती है और कितनी देर के बाद गेंद खिलाड़ी के हाथों में आ जाती है ?

[$g = 9.8$ m s^{-2} तथा वायु का प्रतिरोध नगण्य है ।]

3.11 नीचे दिए गए कथनों को ध्यान से पढ़िए और कारण बताते हुए व उदाहरण देते हुए बताइए कि वे सत्य हैं या असत्य, एकविमीय गति में किसी कण की

(a) किसी क्षण चाल शून्य होने पर भी उसका त्वरण अशून्य हो सकता है ।

(b) चाल शून्य होने पर भी उसका वेग अशून्य हो सकता है ।

(c) चाल स्थिर हो तो त्वरण अवश्य ही शून्य होना चाहिए ।

(d) चाल अवश्य ही बढ़ती रहेगी, यदि उसका त्वरण धनात्मक हो ।

3.12 किसी गेंद को 90 m की ऊंचाई से फर्श पर गिराया जाता है । फर्श के साथ प्रत्येक टक्कर में गेंद की चाल 1/10 कम हो जाती है । इसकी गति का $t = 0$ से 12 s के बीच चाल-समय ग्राफ खींचिए ।

3.13 उदाहरण सहित निम्नलिखित के बीच के अंतर को स्पष्ट कीजिए :

(a) किसी समय अंतराल में विस्थापन के परिमाण (जिसे कभी-कभी दूरी भी कहा जाता है) और किसी कण द्वारा उसी अंतराल के दौरान तय किए गए पथ की कुल लंबाई ।

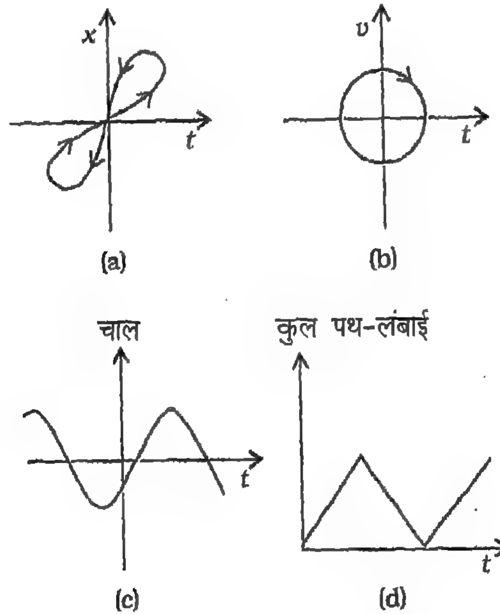
(b) किसी समय अंतराल में औसत वेग के परिमाण और उसी अंतराल में औसत चाल (किसी समय अंतराल में किसी कण की औसत चाल को समय अंतराल द्वारा विभाजित की गई कुल पथ-लंबाई के रूप में परिभाषित किया जाता है) । प्रदर्शित कीजिए कि (a) व (b) दोनों में ही दूसरी राशि पहली से अधिक या उसके बराबर है । समता का चिह्न कब सत्य होता है ? (सरलता के लिए केवल एकविमीय गति पर विचार कीजिए ।)

3.14 कोई व्यक्ति अपने घर से सीधी सड़क पर 5 km h^{-1} की चाल से 2.5 km दूर बाजार तक पैदल चलता है । परंतु बाजार बंद देखकर वह उसी क्षण वापस मुड़ जाता है तथा 7.5 km h^{-1} की चाल से घर लौट आता है ।

(a) व्यक्ति के औसत वेग का परिमाण कितना है ? (b) समय अंतराल (i) 0 - 30 मिनट, (ii) 0 - 50 मिनट, (iii) 0 - 40 मिनट की अवधि में उस व्यक्ति की औसत चाल क्या है ? (नोट : आप इस उदाहरण से समझ सकेंगे कि औसत चाल को औसत-वेग के परिमाण के रूप में परिभाषित करने की अपेक्षा समय द्वारा विभाजित कुल पथ-लंबाई के रूप में परिभाषित करना अधिक अच्छा क्यों है । आप थक कर घर लौटे उस व्यक्ति को यह बताना नहीं चाहेंगे कि उसकी औसत चाल शून्य थी ।)

3.15 हमने 3.13 तथा 3.14 में औसत चाल व औसत वेग के परिमाण के बीच के अंतर को स्पष्ट किया है । यदि हम तात्क्षणिक चाल व वेग के परिमाण पर विचार करते हैं तो इस तरह का अंतर करना आवश्यक नहीं होता । तात्क्षणिक चाल हमेशा तात्क्षणिक वेग के बराबर होती है । क्यों ?

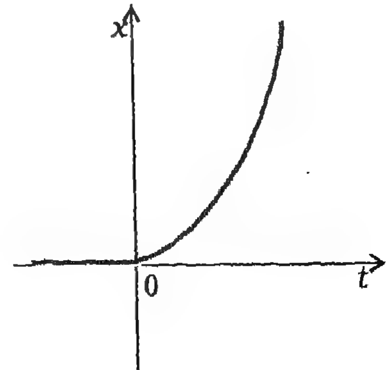
3.16 चित्र 3.20 में (a) से (d) तक के ग्राफों को ध्यान से देखिए और देखकर बताइए कि इनमें से कौन-सा ग्राफ एकविमीय गति को संभवतः नहीं दर्शा सकता ।



चित्र 3.20

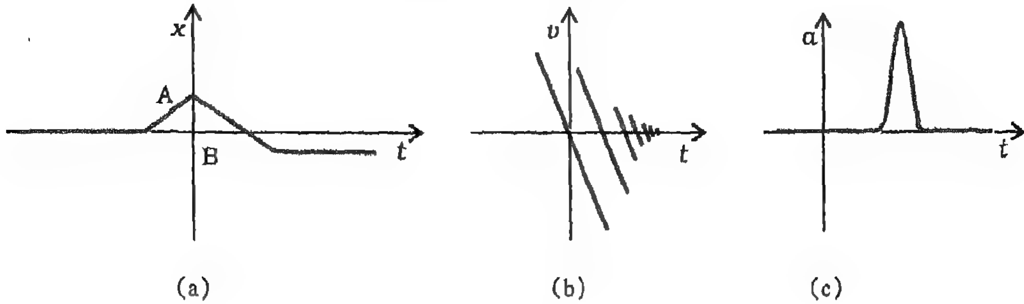
3.17 चित्र 3.21 में किसी कण की एकविमीय गति का x - t ग्राफ दिखाया गया है । ग्राफ से क्या यह कहना ठीक होगा कि यह कण $t<0$ के लिए किसी सरल रेखा में और $t>0$ के लिए किसी परवलीय पथ में गति करता है । यदि नहीं, तो ग्राफ के संगत किसी उचित भौतिक संदर्भ का सुझाव दीजिए ।

3.18 किसी राजमार्ग पर पुलिस की कोई गाड़ी 30 km/h की चाल से चल रही है और यह उसी दिशा में 192 km/h की चाल से जा रही किसी चोर की कार पर गोली चलाती है । यदि गोली की नाल मुखी चाल 150 m s^{-1} है तो चोर की कार को गोली किस चाल के साथ आघात करेगी ? (नोट : उस चाल को ज्ञात कीजिए जो चोर की कार को हानि पहुंचाने में प्रासंगिक हो) ।



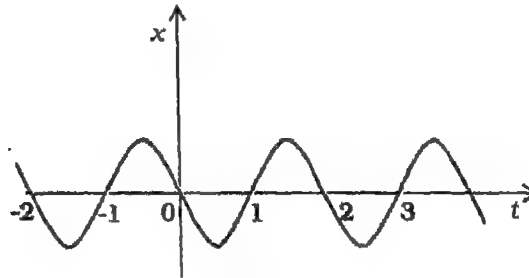
चित्र 3.21

3.19 चित्र 3.22 में दिखाए गए प्रत्येक ग्राफ के लिए किसी उचित भौतिक स्थिति का सुझाव दीजिए :



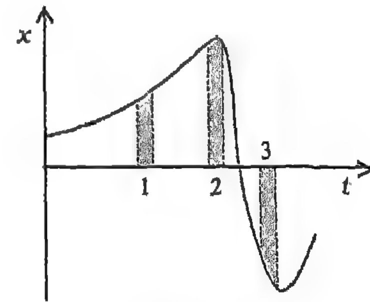
चित्र 3.22

3.20 चित्र 3.23 में किसी कण की एकविमीय सरल आवर्ती गति के लिए x-t ग्राफ दिखाया गया है । (इस गति के बारे में आप अध्याय 14 में पढ़ेंगे) समय $t = 0.3$ s, 1.2 s, –1.2 s पर कण के स्थिति, वेग व त्वरण के चिह्न क्या होंगे ?



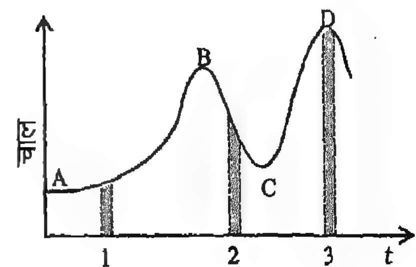
चित्र 3.23

3.21 चित्र 3.24 किसी कण की एकविमीय गति का x-t ग्राफ दर्शाता है । इसमें तीन समान अंतराल दिखाए गए हैं । किस अंतराल में औसत चाल अधिकतम है और किसमें न्यूनतम है ? प्रत्येक अंतराल के लिए औसत वेग का चिह्न बताइए ।



चित्र 3.24

3.22 चित्र 3.25 में किसी नियत (स्थिर) दिशा के अनुदिश चल रहे कण का चाल-समय ग्राफ दिखाया गया है । इसमें तीन समान समय अंतराल दिखाए गए हैं । किस अंतराल में औसत त्वरण का परिमाण अधिकतम होगा ? किस अंतराल में औसत चाल अधिकतम होगी ? धनात्मक दिशा को गति की स्थिर दिशा चुनते हुए तीनों अंतरालों में v तथा a के चिह्न बताइए । A, B, C, व D बिंदुओं पर त्वरण क्या होंगे ?



चित्र 3.25

अतिरिक्त अभ्यास

3.23 कोई तीन पहिये वाला स्कूटर अपनी विरामावस्था से गति प्रारंभ करता है । फिर 10 s तक किसी सीधी सड़क पर $1 m s^{-2}$ के एकसमान त्वरण से चलता है । इसके बाद वह एकसमान वेग से चलता है । स्कूटर द्वारा nवें सेकंड (n = 1, 2, 3.......) में तय की गई दूरी को n के सापेक्ष आलेखित कीजिए । आप क्या आशा करते हैं कि त्वरित गति के दौरान यह ग्राफ कोई सरल रेखा या कोई परवलय होगा ?

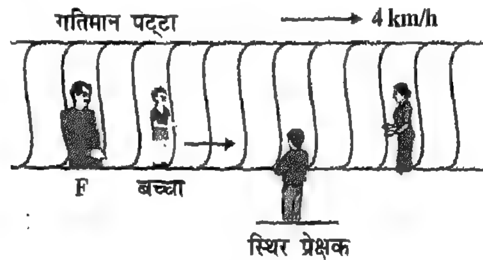
3.24 किसी स्थिर लिफ्ट में (जो ऊपर से खुली है) कोई बालक खड़ा है । वह अपने पूरे जोर से एक गेंद ऊपर की ओर फेंकता है जिसकी प्रारंभिक चाल $49 m s^{-1}$ है । उसके हाथों में गेंद के वापिस आने में कितना समय लगेगा ? यदि लिफ्ट ऊपर की ओर $5 m s^{-1}$ की एकसमान चाल से गति करना प्रारंभ कर दे और वह बालक फिर गेंद को अपने पूरे जोर से फेंकता तो कितनी देर में गेंद उसके हाथों में लौट आएगी ?

3.25 क्षैतिज में गतिमान कोई लंबा पट्टा (चित्र 3.26) 4 km/h की चाल से चल रहा है । एक बालक इस पर (पट्टे के सापेक्ष) 9 km/h की चाल से कभी आगे कभी पीछे अपने माता-पिता के बीच दौड़ रहा है । माता व पिता के बीच 50 m की दूरी है । बाहर किसी स्थिर प्लेटफार्म पर खड़े एक प्रेक्षक के लिए, निम्नलिखित का मान प्राप्त करिए ।

(a) पट्टे की गति की दिशा में दौड़ रहे बालक की चाल,

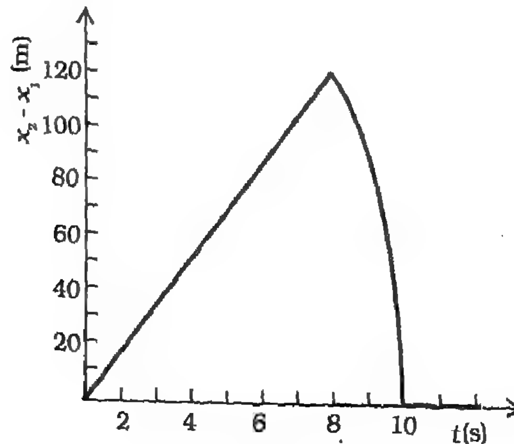
(b) पट्टे की गति की दिशा के विपरीत दौड़ रहे बालक की चाल,

(c) बच्चे द्वारा (a) व (b) में लिया गया समय यदि बालक की गति का प्रेक्षण उसके माता या पिता करे तो कौन-सा उत्तर बदल जाएगा ?



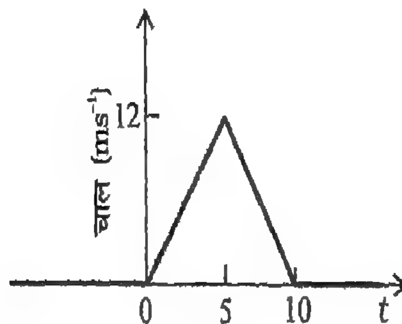
चित्र 3.26

3.26 किसी 200 m ऊंची खड़ी चट्टान के किनारे से दो पत्थरों को एक साथ ऊपर की ओर $15 m s^{-1}$ तथा $30 m s^{-1}$ की प्रारंभिक चाल से फेंका जाता है । इसका सत्यापन कीजिए कि नीचे दिखाया गया ग्राफ (चित्र 3.27) पहले पत्थर के सापेक्ष दूसरे पत्थर की आपेक्षिक स्थिति का समय के साथ परिवर्तन को प्रदर्शित करता है । वायु के प्रतिरोध को नगण्य मानिए और यह मानिए कि जमीन से टकराने के बाद पत्थर ऊपर की ओर उछलते नहीं । मान लिजिए $g = 10 m s^{-2}$ । ग्राफ के रेखीय व वक्रीय भागों के लिए समीकरण लिखिए ।



चित्र 3.27

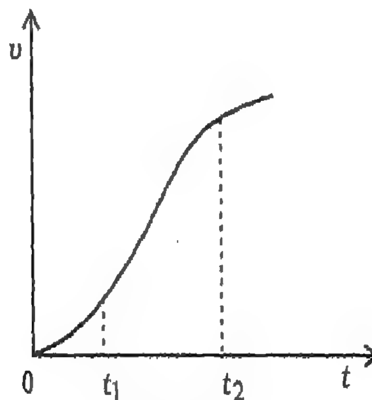
3.27 किसी निश्चित दिशा के अनुदिश चल रहे किसी कण का चाल-समय ग्राफ चित्र 3.28 में दिखाया गया है । कण द्वारा (a) $t = 0$ से $t = 10$ s, (b) $t = 2$ s से 6 s के बीच तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए ।



चित्र 3.28

(a) तथा (b) में दिए गए अंतरालों की अवधि में कण की औसत चाल क्या है ?

3.28 एकविमीय गति में किसी कण का वेग-समय ग्राफ नीचे चित्र 3.29 में दिखाया गया है :



चित्र 3.29

नीचे दिए सूत्रों में t_1 से t_2 तक के समय अंतराल की अवधि में कण की गति का वर्णन करने के लिए कौन-से सूत्र सही हैं :

(i) $x(t_2) = x(t_1) + v(t_1)(t_2 - t_1) + (1/2)\, a(t_2 - t_1)^2$

(ii) $v(t_2) = v(t_1) + a(t_2 - t_1)$

(iii) $v_{average} = (x(t_2) - x(t_1))/(t_2 - t_1)$

(iv) $a_{average} = [v(t_2) - v(t_1)]/(t_2 - t_1)$

(v) $x(t_2) = x(t_1) + v_{average}(t_2 - t_1) + (1/2)\, a_{average}(t_2 - t_1)^2$

(vi) $x(t_2) - x(t_1) = t$- अक्ष तथा दिखाई गई बिंदुकित रेखा के बीच दर्शाए गए वक्र के अंतर्गत आने वाला क्षेत्रफल।

अध्याय 4

समतल में गति

4.1 भूमिका

पिछले अध्याय में हमने स्थिति, विस्थापन, वेग एवं त्वरण की धारणाओं को विकसित किया था, जिनकी किसी वस्तु की सरल रेखीय गति का वर्णन करने के लिए आवश्यकता पड़ती है । क्योंकि एकविमीय गति में मात्र दो ही दिशायें संभव हैं, इसलिए इन राशियों के दिशात्मक पक्ष को + और − चिह्नों से व्यक्त कर सकते हैं । परंतु जब हम वस्तुओं की गति का द्विविमीय (एक समतल) या त्रिविमीय (दिक्स्थान) वर्णन करना चाहते हैं, तब हमें उपर्युक्त भौतिक राशियों का अध्ययन करने के लिए सदिशों की आवश्यकता पड़ती है । अतएव सर्वप्रथम हम सदिशों की भाषा (अर्थात् सदिशों के गुणों एवं उन्हें उपयोग में लाने की विधियां) सीखेंगे । सदिश क्या है ? सदिशों को कैसे जोड़ा, घटाया या गुणा किया जाता है ? सदिशों को किसी वास्तविक संख्या से गुणा करें तो हमें क्या परिणाम मिलेगा ? यह सब हम इसलिए सीखेंगे जिससे किसी समतल में वस्तु के वेग एवं त्वरण को परिभाषित करने के लिए हम सदिशों का उपयोग कर सकें । इसके बाद हम किसी समतल में वस्तु की गति पर परिचर्चा करेंगे । किसी समतल में गति के सरल उदाहरण के रूप में हम एकसमान त्वरित गति का अध्ययन करेंगे तथा एक प्रक्षेप्य की गति के विषय में विस्तार से पढ़ेंगे । वृत्तीय गति से हम भलीभांति परिचित हैं जिसका हमारे दैनिक जीवन में विशेष महत्त्व है । हम एकसमान वृत्तीय गति की विस्तार से परिचर्चा करेंगे ।

हम इस अध्याय में जिन समीकरणों को प्राप्त करेंगे उन्हें आसानी से त्रिविमीय गति के लिए विस्तारित किया जा सकता है ।

4.2 अदिश एवं सदिश

हम भौतिक राशियों को अदिशों एवं सदिशों में वर्गीकृत करते हैं । दोनों में मूल अंतर यह है कि जहां सदिश के साथ **दिशा** को संबंधित करते हैं वहीं अदिश के साथ ऐसा नहीं करते । एक अदिश राशि वह राशि है जिसमें मात्र परिमाण होता है । इसे केवल एक संख्या एवं उचित मात्रक द्वारा पूर्ण रूप से व्यक्त किया जा सकता है । इसके उदाहरण हैं : दो बिंदुओं के बीच की दूरी, किसी वस्तु की संहति (द्रव्यमान), किसी वस्तु का तापक्रम, तथा वह समय जिस पर कोई घटना घटती है । अदिशों के जोड़ में वही नियम लागू होते हैं जो सामान्यतया बीजगणित में । अदिशों को हम ठीक वैसे ही जोड़ सकते हैं, घटा सकते हैं, गुणा या भाग कर सकते हैं जैसा कि हम सामान्य संख्याओं के साथ

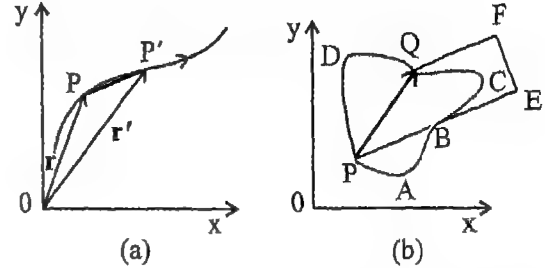
करते हैं* । उदाहरण के लिए, यदि किसी आयत की लंबाई और चौड़ाई क्रमश: 1.0 m तथा 0.5 m है तो उसकी परिमाप चारों भुजाओं के योग, 1.0 m + 0.5 m + 1.0 m + 0.5 m = 3.0 m होगी । हर भुजा की लंबाई एक अदिश है तथा परिमाप भी एक अदिश है । हम एक दूसरे उदाहरण पर विचार करेंगे : यदि किसी एक दिन का अधिकतम एवं न्यूनतम ताप क्रमश: 35.6°C तथा 24.2°C है तो इन दोनों का अंतर 11.4°C होगा । इसी प्रकार यदि एल्युमिनियम के किसी एकसमान ठोस घन की भुजा 10 cm है और उसकी द्रव्यमान (संहति) 2.7 kg है तो उसका आयतन $10^{-3}\,m^3$ (एक अदिश) होगा तथा घनत्व $2.7\times10^3\,kg/m^3$ भी एक अदिश है ।

एक **सदिश** राशि वह राशि है जिसमें परिमाण तथा दिशा दोनों होते हैं तथा वह **योग संबंधी त्रिभुज के नियम** अथवा **समानान्तर चतुर्भुज के योग संबंधी नियम** का पालन करती है । इस प्रकार, एक सदिश को उसके परिमाण की संख्या तथा दिशा द्‌वारा व्यक्त करते हैं । कुछ भौतिक राशियां जिन्हें सदिशों द्‌वारा व्यक्त करते हैं, वे हैं विस्थापन, वेग, त्वरण तथा बल ।

सदिश को व्यक्त करने के लिए इस पुस्तक में हम मोटे अक्षरों का प्रयोग करेंगे । जैसे कि वेग सदिश को व्यक्त करने के लिए **v** चिह्न का प्रयोग करेंगे । परंतु हाथ से लिखते समय क्योंकि मोटे अक्षरों का लिखना थोड़ा मुश्किल होता है, इसलिए एक सदिश को अक्षर के ऊपर तीर लगाकर व्यक्त करते हैं, जैसे $\vec{v}$ । इस प्रकार **v** तथा $\vec{v}$ दोनों ही वेग सदिश को व्यक्त करते हैं । सदिश के परिमाण को प्राय: हम उसका 'परम मान' कहते हैं और उसे $|\mathbf{v}| = v$ द्‌वारा व्यक्त करते हैं । इस प्रकार एक सदिश को हम मोटे अक्षर यथा **A** या **a, p, q, r, ... x, y** से व्यक्त करते हैं जबकि इनके परिमाणों को क्रमश: हम A या $a, p, q, r, ... x, y$ द्‌वारा व्यक्त करते हैं ।

4.2.1 स्थिति एवं विस्थापन सदिश

किसी समतल में गतिमान वस्तु की स्थिति व्यक्त करने के लिए हम सुविधानुसार किसी बिंदु O को मूल बिंदु के रूप में चुनते हैं । कल्पना कीजिए कि दो भिन्न-भिन्न समयों t और t' पर वस्तु की स्थिति क्रमश: P और P′ है (चित्र 4.1a) । हम P को O से एक सरल रेखा से जोड़ देते हैं । इस प्रकार **OP** समय t पर वस्तु की स्थिति सदिश होगी । इस रेखा के आखिरी सिरे पर एक तीर का निशान लगा देते हैं । इसे किसी चिह्न (मान लीजिए) **r** से निरूपित करते हैं, अर्थात् **OP** = **r** । इसी प्रकार बिंदु P′ को एक दूसरे स्थिति सदिश **OP′** यानी **r′** से निरूपित करते हैं । सदिश **r** अथवा **r′** की लंबाई उसके परिमाण को निरूपित करती है तथा सदिश की दिशा वह होगी जिसके अनुदिश P अथवा P′ (बिंदु O से देखने पर) स्थित होंगे । यदि वस्तु P से चलकर P′ पर पहुंच जाती है तो सदिश **PP′** (जिसकी पुच्छ P पर तथा शीर्ष P′ पर है) बिंदु P (समय t) से P′ (समय t') तक गति के संगत **विस्थापन सदिश** कहलाता है ।



चित्र 4.1 *(a) स्थिति तथा विस्थापन सदिश, (b) विस्थापन सदिश* **PQ** *तथा गति के भिन्न-भिन्न मार्ग ।*

यहां यह बात महत्त्वपूर्ण है कि 'विस्थापन सदिश' को एक सरल रेखा से व्यक्त करते हैं जो वस्तु की अंतिम स्थिति को उसकी प्रारम्भिक स्थिति से जोड़ती है तथा यह उस वास्तविक पथ पर निर्भर नहीं करता जो वस्तु द्‌वारा बिंदुओं के मध्य चला जाता है । उदाहरणस्वरूप, जैसा कि चित्र 4.1b में दिखाया गया है, प्रारम्भिक स्थिति P तथा अंतिम स्थिति Q के मध्य विस्थापन सदिश **PQ** यद्‌यपि वही है परंतु दोनों स्थितियों के बीच चली गई दूरियां जैसे PABCQ, PDQ तथा PBEFQ अलग-अलग हैं । इसी प्रकार, ***किन्हीं दो बिंदुओं के मध्य विस्थापन सदिश का परिमाण या तो गतिमान वस्तु की पथ-लंबाई से कम होता है या उसके बराबर होता है ।*** पिछले अध्याय में भी एक सरल रेखा के अनुदिश गतिमान वस्तु के लिए इस तथ्य को भलीभांति समझाया गया था ।

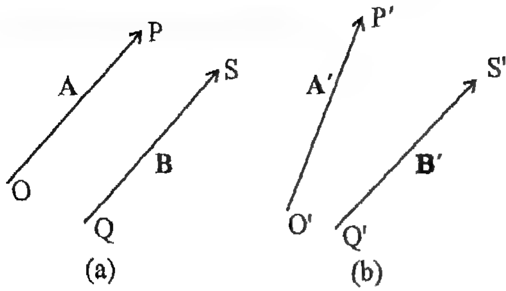
4.2.2 सदिशों की समता

दो सदिशों **A** तथा **B** को केवल तभी बराबर कहा जा सकता है जब उनके परिमाण बराबर हों तथा उनकी दिशा समान हो** ।

चित्र 4.2(a) में दो समान सदिशों **A** तथा **B** को दर्शाया गया है । हम इनकी समानता की परख आसानी से कर सकते हैं । **B** को स्वयं के समांतर खिसकाइये ताकि उसकी पुच्छ Q सदिश **A** की पुच्छ O के संपाती हो जाए । फिर क्योंकि उनके शीर्ष S एवं P भी संपाती हैं अत: दोनों सदिश बराबर कहलाएंगे ।

* *केवल समान मात्रक वाली राशियों का जोड़ व घटाना सार्थक होता है । जबकि आप भिन्न मात्रकों वाले अदिशों का गुणा या भाग कर सकते हैं ।*

** *हमारे अध्ययन में सदिशों की स्थितियां निर्धारित नहीं हैं । इसलिए जब एक सदिश को स्वयं के समांतर विस्थापित करते हैं तो सदिश अपरिवर्तित रहता है । इस प्रकार के सदिशों को हम 'मुक्त सदिश' कहते हैं । हालांकि कुछ भौतिक उपयोगों में सदिश की स्थिति या उसकी क्रिया रेखा महत्त्वपूर्ण होती है । ऐसे सदिशों को हम 'स्थानगत सदिश' कहते हैं (अध्याय 7 में देखिए) ।*



चित्र 4.2 (a) दो समान सदिश **A** *तथा* **B**, *(b) दो सदिश* **A'** *व* **B'** *असमान हैं यद्यपि उनकी लंबाइयां वही हैं ।*

सामान्यतया इस समानता को **A** = **B** के रूप में लिखते हैं । इस बात की ओर ध्यान दीजिए कि चित्र 4.2(b) में यद्यपि सदिशों **A'** तथा **B'** के परिमाण समान हैं फिर भी दोनों सदिश समान नहीं हैं क्योंकि उनकी दिशायें अलग-अलग हैं । यदि हम **B'** को उसके ही समांतर खिसकाएं जिससे उसकी पुच्छ Q', **A'** की पुच्छ O' से संपाती हो जाए तो भी **B'** का शीर्ष S', **A'** के शीर्ष P' का संपाती नहीं होगा ।

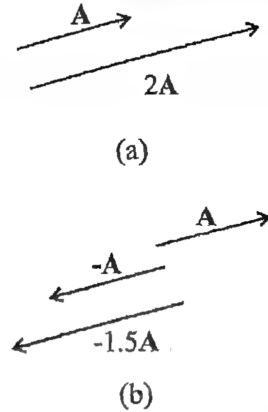
4.3 सदिशों की वास्तविक संख्या से गुणा

यदि एक सदिश **A** को किसी धनात्मक संख्या λ से गुणा करें तो हमें एक सदिश ही मिलता है जिसका परिमाण सदिश **A** के परिमाण का λ गुना हो जाता है तथा जिसकी दिशा भी वही है जो **A** की है । इस गुणनफल को हम λ**A** से लिखते हैं ।

$$|\lambda \mathbf{A}| = \lambda |\mathbf{A}| \text{ यदि } \lambda > 0$$

उदाहरणस्वरूप, यदि **A** को 2 से गुणा किया जाए, तो परिणामी सदिश 2**A** होगा (चित्र 4.3a) जिसकी दिशा **A** की दिशा होगी तथा परिमाण |**A**| का दो गुना होगा । सदिश **A** को यदि एक ऋणात्मक संख्या λ से गुणा करें तो सदिश λ**A** प्राप्त होता है जिसकी दिशा **A** की दिशा के विपरीत है और जिसका परिमाण |**A**| का $-\lambda$ गुना होता है ।

यदि किसी सदिश **A** को ऋणात्मक संख्याओं -1 व -1.5 से गुणा करें तो परिणामी सदिश चित्र 4.3(b) जैसे होंगे ।

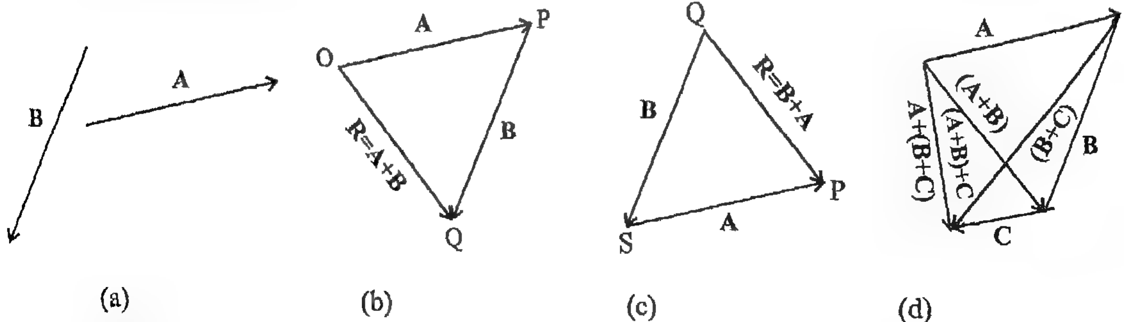


चित्र 4.3 (a) सदिश **A** *तथा उसे धनात्मक संख्या दो से गुणा करने पर प्राप्त परिणामी सदिश, (b) सदिश* **A** *तथा उसे ऋणात्मक संख्याओं -1 तथा -1.5 से गुणा करने पर प्राप्त परिणामी सदिश ।*

भौतिकी में जिस घटक λ द्वारा सदिश **A** को गुणा किया जाता है वह कोई अदिश हो सकता है जिसकी स्वंय की विमाएं होती हैं । अतएव λ**A** की विमाएं λ व **A** की विमाओं के गुणनफल के बराबर होंगी । उदाहरणस्वरूप, यदि हम किसी वेग सदिश को किसी (समय) अंतराल से गुणा करें तो हमें एक विस्थापन सदिश प्राप्त होगा ।

4.4 सदिशों का संकलन व व्यवकलन : ग्राफी विधि

जैसा कि खण्ड 4.2 में बतलाया जा चुका है कि सदिश योग के त्रिभुज नियम या समान्तर चतुर्भुज के योग के नियम का पालन करते हैं । अब हम ग्राफी विधि द्वारा योग के इस नियम को समझाएंगे । हम चित्र (4.4a) में दर्शाए गए किसी समतल में स्थित दो सदिशों **A** तथा **B** पर विचार करते हैं । इन सदिशों को व्यक्त करने वाली रेखा-खण्डों की लंबाइयां सदिशों के परिमाण के समानुपाती हैं । योग **A** + **B** प्राप्त करने के लिए चित्र 4.4(b) के अनुसार हम सदिश **B** इस प्रकार रखते हैं कि उसकी पुच्छ सदिश **A** के शीर्ष पर हो । फिर हम **A** की पुच्छ



चित्र 4.4 (a) सदिश **A** *तथा* **B**, *(b) सदिशों* **A** *व* **B** *का ग्राफी विधि द्वारा जोड़ना, (c) सदिशों* **B** *व* **A** *का ग्राफी विधि द्वारा जोड़ना, (d) सदिशों के जोड़ से संबंधित साहचर्य नियम का प्रदर्शन ।*

को **B** के सिरे से जोड़ देते हैं । यह रेखा OQ परिणामी सदिश **R** को व्यक्त करती है जो सदिशों **A** तथा **B** का योग है । क्योंकि सदिशों के जोड़ने की इस विधि में सदिशों में से किसी एक के शीर्ष को दूसरे की पुच्छ से जोड़ते हैं, इसलिए इस ग्राफी विधि को **शीर्ष व पुच्छ विधि** के नाम से जाना जाता है । दोनों सदिश तथा उनका परिणामी सदिश किसी त्रिभुज की तीन भुजाएं बनाते हैं । इसलिए इस विधि को **सदिश योग के त्रिभुज नियम** भी कहते हैं । यदि हम **B+A** का परिणामी सदिश प्राप्त करें तो भी हमें वही सदिश **R** प्राप्त होता है (चित्र 4.4c)। इस प्रकार सदिशों का योग **'क्रम विनिमेय'** (सदिशों के जोड़ने में यदि उनका क्रम बदल दें तो भी परिणामी सदिश नहीं बदलता) है ।

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \qquad (4.1)$$

सदिशों का योग *साहचर्य नियम* का भी पालन करता है जैसा कि चित्र 4.4d में दर्शाया गया है । सदिशों **A** व **B** को पहले जोड़कर और फिर सदिश **C** को जोड़ने पर जो परिणाम प्राप्त होता है वह वही है जो सदिशों **B** और **C** को पहले जोड़कर फिर **A** को जोड़ने पर मिलता है, अर्थात्

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} = \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) \qquad (4.2)$$

दो समान और विपरीत सदिशों को जोड़ने पर क्या परिणाम मिलता है ? हम दो सदिशों **A** और **–A** (जो **A** के समान किन्तु विपरीत है) जिन्हें चित्र 4.3(b) में दिखलाया है, पर विचार करते हैं । इनका योग **A**+(**–A**) है । क्योंकि दो सदिशों का परिमाण वही है किन्तु दिशा विपरीत है, इसलिए परिणामी सदिश का परिमाण शून्य होगा और इसे **0** से व्यक्त करते हैं ।

$$\mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{0} \qquad |\mathbf{0}| = 0 \qquad (4.3)$$

0 को हम **शून्य सदिश** कहते हैं । क्योंकि शून्य सदिश का परिमाण शून्य होता है, इसलिए इसकी दिशा का निर्धारण नहीं किया जा सकता है । दरअसल जब हम एक सदिश **A** को संख्या शून्य से गुणा करते हैं तो परिणामस्वरूप हमें एक सदिश ही मिलेगा किन्तु उसका परिमाण शून्य होगा । **O** सदिश के मुख्य गुण निम्न हैं :

$$\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}$$
$$\lambda\mathbf{O} = \mathbf{O}$$
$$0\mathbf{A} = \mathbf{O} \qquad (4.4)$$

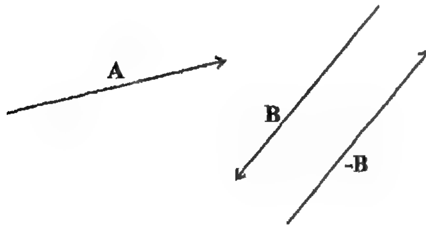
शून्य सदिश का भौतिक अर्थ क्या है ? जैसाकि चित्र 4.1(a) में दिखाया गया है हम किसी समतल में स्थिति एवं विस्थापन सदिशों पर विचार करते हैं । मान लीजिए कि किसी क्षण t पर कोई वस्तु P पर है । वह P' तक जाकर पुनः P पर वापस आ जाती है । इस स्थिति में वस्तु का विस्थापन क्या होगा ? क्योंकि प्रारंभिक एवं अंतिम स्थितियां संपाती हो जाती हैं, इसलिए विस्थापन "शून्य सदिश" होगा ।

सदिशों का व्यवकलन सदिशों के योग के रूप में भी परिभाषित किया जा सकता है । दो सदिशों **A** व **B** के अंतर को हम दो सदिशों **A** व **–B** के योग के रूप में निम्न प्रकार से व्यक्त करते हैं :

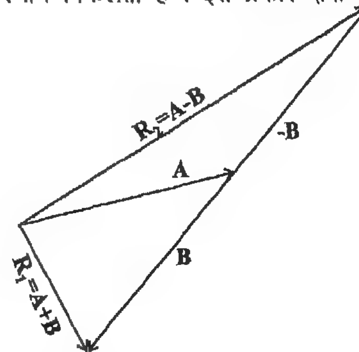
$$\mathbf{A}-\mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \qquad (4.5)$$

इसे चित्र 4.5 में दर्शाया गया है । सदिश **–B** को सदिश **A** में जोड़कर $\mathbf{R}_2 = (\mathbf{A}-\mathbf{B})$ प्राप्त होता है । तुलना के लिए इसी चित्र में सदिश $\mathbf{R}_1 = \mathbf{A}+\mathbf{B}$ को भी दिखाया गया है । समान्तर चतुर्भुज विधि को प्रयुक्त करके भी हम दो सदिशों का योग ज्ञात कर सकते हैं ।

मान लीजिए हमारे पास दो सदिश **A** एवं **B** हैं । इन सदिशों को जोड़ने के लिए उनकी पुच्छ को एक उभयनिष्ठ मूल बिंदु O पर लाते हैं जैसा चित्र 4.6(a) में दिखाया गया है । फिर हम **A** के शीर्ष से **B** के समांतर एक रेखा खींचते हैं और **B** के शीर्ष से **A** के समांतर एक दूसरी रेखा खींचकर समांतर चतुर्भुज OQSP पूरा करते हैं । जिस बिंदु पर यह दोनों रेखाएं एक दूसरे को काटती हैं, उसे मूल बिंदु O से जोड़ देते हैं । परिणामी सदिश **R** की दिशा समान्तर चतुर्भुज के मूल बिंदु O से कटान बिंदु S की ओर खींचे गए विकर्ण OS के अनुदिश होगी (चित्र 4.6b) । चित्र 4.6c में सदिशों **A** व **B** का परिणामी निकालने के लिए त्रिभुज नियम का उपयोग दिखाया गया है । दोनों चित्रों से स्पष्ट है कि दोनों विधियों से एक ही परिणाम निकलता है । इस प्रकार दोनों विधियां समतुल्य हैं ।

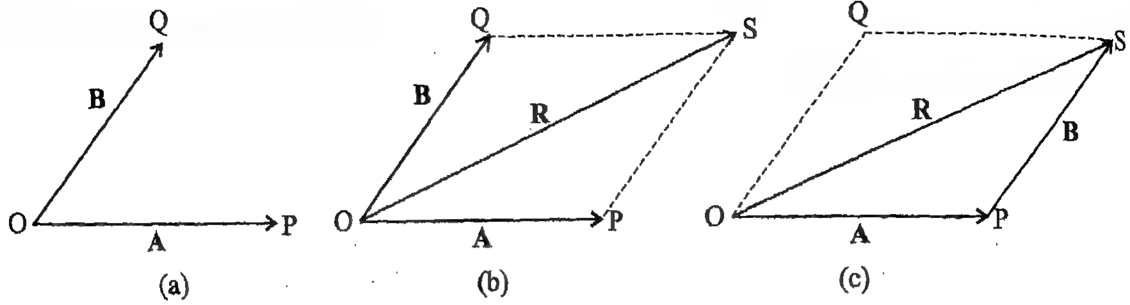


(a)



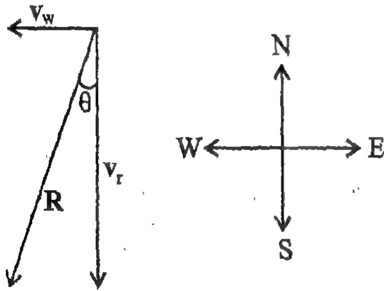
(b)

चित्र 4.5 (a) दो सदिश **A** *व* **B**, **–B** *को भी दिखाया गया है । (b) सदिश* **A** *से सदिश* **B** *का घटाना-परिणाम* $\mathbf{R}_2$ *है । तुलना के लिए सदिशों* **A** *व* **B** *का जोड़* $\mathbf{R}_1$ *भी दिखलाया गया है ।*



चित्र 4.6 (a) एक ही उभयनिष्ठ बिंदु वाले दो सदिश **A** *व* **B**, *(b) समान्तर चतुर्भुज विधि द्वारा* **A+B** *योग प्राप्त करना, (c) दो सदिशों को जोड़ने की समान्तर चतुर्भुज विधि त्रिभुज विधि के समतुल्य है ।*

► *उदाहरण 4.1* **किसी दिन वर्षा 35 m s^{-1} की चाल से ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर हो रही है । कुछ देर बाद हवा 12 m s^{-1} की चाल से पूर्व से पश्चिम दिशा की ओर चलने लगती है । बस स्टाप पर खड़े किसी लड़के को अपना छाता किस दिशा में करना चाहिए ?**



चित्र 4.7

हल वर्षा एवं हवा के वेगों को सदिशों $\mathbf{v}_r$ तथा $\mathbf{v}_w$ से चित्र 4.7 में दर्शाया गया है । इनकी दिशाएं प्रश्न के अनुसार प्रदर्शित की गई हैं । सदिशों के योग के नियम के अनुसार $\mathbf{v}_r$ तथा $\mathbf{v}_w$ का परिणामी **R** चित्र में खींचा गया है । **R** का परिमाण होगा-

$$R = \sqrt{v_r^2 + v_w^2} = \sqrt{35^2 + 12^2}\ \mathrm{m\,s^{-1}} = 37\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

ऊर्ध्वाधर से R की दिशा θ होगी-

$$\tan\theta = \frac{v_w}{v_r} = \frac{12}{35} = 0.343$$

या $\theta = \tan^{-1} 0.343 = 19°$

अतएव लड़के को अपना छाता ऊर्ध्वाधर तल में ऊर्ध्वाधर से 19° का कोण बनाते हुए पूर्व दिशा की ओर रखना चाहिए । ◄

4.5 सदिशों का वियोजन

मान लीजिए कि **a** व **b** किसी समतल में भिन्न दिशाओं वाले दो शून्येतर (शून्य नहीं) सदिश हैं तथा **A** इसी समतल में कोई अन्य सदिश है । तब **A** को दो सदिशों के योग के रूप में वियोजित किया जा सकता है । एक सदिश **a** के किसी वास्तविक संख्या के गुणनफल के रूप में और इसी प्रकार दूसरा सदिश **b** के गुणनफल के रूप में है । ऐसा करने के लिए पहले **A** खींचिए जिसका पुच्छ O तथा शीर्ष P है । फिर O से **a** के समांतर एक सरल रेखा खींचिए तथा P से एक सरल रेखा **b** के समांतर खींचिए । मान लीजिए वे एक दूसरे को Q पर काटती हैं । तब,

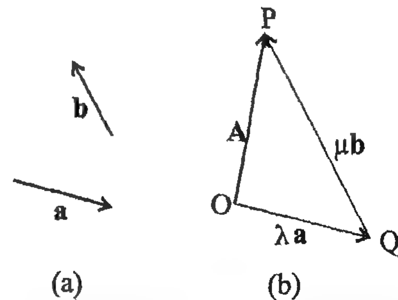
$$\mathbf{A} = \mathbf{OP} = \mathbf{OQ} + \mathbf{QP} \qquad (4.6)$$

परंतु क्योंकि **OQ**, **a** के समांतर है तथा **QP**, **b** के समांतर है इसलिए

$$\mathbf{OQ} = \lambda\mathbf{a},\ \mathbf{QP} = \mu\mathbf{b} \qquad (4.7)$$

जहां λ तथा μ कोई वास्तविक संख्याएं हैं ।

अत: $\mathbf{A} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ (4.8)



चित्र 4.8 दो अरैखिक सदिश **a** *व* **b**, *(b) सदिश* **A** *का* **a** *व* **b** *के पदों में वियोजन ।*

हम कह सकते हैं कि **A** को **a** व **b** के अनुदिश दो सदिश-घटकों क्रमश: $\lambda\mathbf{a}$ तथा $\mu\mathbf{b}$ में वियोजित कर दिया गया है । इस विधि का उपयोग करके हम किसी सदिश को उसी

समतल के दो सदिश–घटकों में वियोजित कर सकते हैं । एकांक परिमाण के सदिशों की सहायता से आयतीय निर्देशांक निकाय के अनुदिश किसी सदिश का वियोजन सुविधाजनक होता है । ऐसे सदिशों को *एकांक सदिश* कहते हैं जिस पर अब हम परिचर्चा करेंगे ।

एकांक सदिश : एकांक सदिश वह सदिश होता है जिसका परिमाण एक हो तथा जो किसी विशेष दिशा के अनुदिश हो । न तो इसकी कोई विमा होती है और न ही कोई मात्रक । मात्र दिशा व्यक्त करने के लिए इसका उपयोग होता है । चित्र 4.9a में प्रदर्शित एक 'आयतीय निर्देशांक निकाय' की x, y तथा z अक्षों के अनुदिश एकांक सदिशों को हम क्रमशः $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ तथा $\hat{\mathbf{k}}$ द्वारा व्यक्त करते हैं । क्योंकि ये सभी एकांक सदिश हैं, इसलिए

$$|\hat{\mathbf{i}}| = |\hat{\mathbf{j}}| = |\hat{\mathbf{k}}| = 1 \qquad (4.9)$$

ये एकांक सदिश एक दूसरे के लंबवत् हैं । दूसरे सदिशों से इनकी अलग पहचान के लिए हमने इस पुस्तक में मोटे टाइप **i, j, k** के ऊपर एक कैप (^) लगा दिया है । क्योंकि इस अध्याय में हम केवल द्विविमीय गति का ही अध्ययन कर रहे हैं अतः हमें केवल दो एकांक सदिशों की आवश्यकता होगी ।

यदि किसी एकांक सदिश $\hat{\mathbf{n}}$ को एक अदिश λ से गुणा करें तो परिणामी एक सदिश $\lambda\hat{\mathbf{n}}$ होगा । सामान्यतया किसी सदिश **A** को निम्न प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं :

$$\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\,\hat{\mathbf{n}} \qquad (4.10)$$

यहां **A** के अनुदिश $\hat{\mathbf{n}}$ एकांक सदिश है ।

हम किसी सदिश **A** को एकांक सदिशों $\hat{\mathbf{i}}$ तथा $\hat{\mathbf{j}}$ के पदों में वियोजित कर सकते हैं । मान लीजिए कि चित्र (4.9b) के अनुसार सदिश **A** समतल x-y में स्थित है । चित्र 4.9(b) के अनुसार **A** के शीर्ष से हम निर्देशांक अक्षों पर लंब खींचते हैं । इससे हमें दो सदिश $\mathbf{A}_1$ व $\mathbf{A}_2$ इस प्रकार प्राप्त हैं कि $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}$ । क्योंकि $\mathbf{A}_1$ एकांक सदिश $\hat{\mathbf{i}}$ के समान्तर है तथा $\mathbf{A}_2$ एकांक सदिश $\hat{\mathbf{j}}$ के समान्तर है, अतः

$$\mathbf{A}_1 = A_x\,\hat{\mathbf{i}}, \; \mathbf{A}_2 = A_y\,\hat{\mathbf{j}} \qquad (4.11)$$

यहां A_x तथा A_y वास्तविक संख्याएं हैं ।

इस प्रकार $\mathbf{A} = A_x\,\hat{\mathbf{i}} + A_y\,\hat{\mathbf{j}}$ (4.12)

इसे चित्र (4.9c) में दर्शाया गया है । राशियों A_x व A_y को हम सदिश **A** के x- व y- घटक कहते हैं । यहां यह बात ध्यान देने योग्य है कि A_x सदिश नहीं है, वरन् $A_x\hat{\mathbf{i}}$ एक सदिश है । इसी प्रकार $A_y\hat{\mathbf{j}}$ एक सदिश है ।

त्रिकोणमिति का उपयोग करके A_x व A_y को **A** के परिमाण तथा उसके द्वारा x–अक्ष के साथ बनने वाले कोण θ के पदों में व्यक्त कर सकते हैं :

$$A_x = A\cos\theta$$
$$A_y = A\sin\theta \qquad (4.13)$$

समीकरण 4.13 से स्पष्ट है कि किसी सदिश का घटक कोण θ पर निर्भर करता है तथा वह धनात्मक, ऋणात्मक या शून्य हो सकता है ।

किसी समतल में एक सदिश **A** को व्यक्त करने के लिए अब हमारे पास दो विधियां हैं :

(i) उसके परिमाण A तथा उसके द्वारा x-अक्ष के साथ बनाए गए कोण θ द्वारा, अथवा

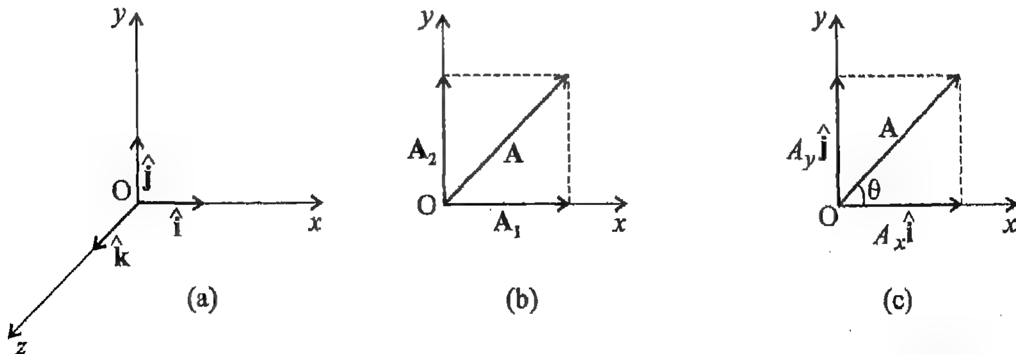
(ii) उसके घटकों A_x तथा A_y द्वारा ।

यदि A तथा θ हमें ज्ञात हैं तो A_x और A_y का मान समीकरण (4.13) से ज्ञात किया जा सकता है । यदि A_x एवं A_y ज्ञात हों तो A तथा θ का मान निम्न प्रकार से ज्ञात किया जा सकता है :

$$A_x^2 + A_y^2 = A^2\cos^2\theta + A^2\sin^2\theta = A^2$$

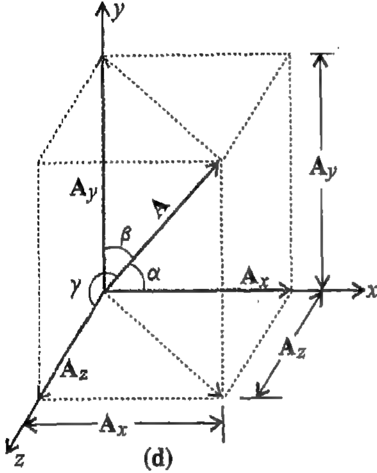
अथवा $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ (4.14)

एवं $\tan\theta = \dfrac{A_y}{A_x}, \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{A_y}{A_x}\right)$ (4.15)



*चित्र 4.9 (a) एकांक सदिश $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ अक्षों x, y, z के अनुदिश है, (b) किसी सदिश **A** को x एवं y अक्षों के अनुदिश घटकों $\mathbf{A}_1$ तथा $\mathbf{A}_2$ में वियोजित किया है, (c) $\mathbf{A}_1$ तथा $\mathbf{A}_2$ को $\hat{\mathbf{i}}$ तथा $\hat{\mathbf{j}}$ के पदों में व्यक्त किया है ।*

अभी तक इस विधि में हमने एक $(x\text{-}y)$ समतल में किसी सदिश को उसके घटकों में वियोजित किया है किन्तु इसी विधि द्वारा किसी सदिश **A** को तीन विमाओं में x, y तथा z अक्षों के अनुदिश तीन घटकों में वियोजित किया जा सकता है। यदि **A** व x-, y-, व z- अक्षों के मध्य कोण क्रमश: α, β तथा γ हो* (चित्र 4.9d) तो



चित्र 4.9(d) सदिश A का x, y एवं z - अक्षों के अनुदिश घटकों में वियोजन ।

$$A_x = A\cos\alpha,\ A_y = A\cos\beta,\ A_z = A\cos\gamma \qquad 4.16(a)$$

सामान्य रूप से,

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}} \qquad (4.16b)$$

सदिश **A** का परिमाण

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \qquad (4.16c)$$

होगा।

एक स्थिति सदिश **r** को निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है :

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$$

यहां x, y तथा z सदिश **r** के अक्षों x-, y-, z- के अनुदिश घटक हैं।

4.6 सदिशों का योग : विश्लेषणात्मक विधि

यद्यपि सदिशों को जोड़ने की ग्राफी विधि हमें सदिशों तथा उनके परिणामी सदिश को स्पष्ट रूप से समझने में सहायक होती है, परन्तु कभी-कभी यह विधि जटिल होती है और इसकी शुद्धता भी सीमित होती है। भिन्न-भिन्न सदिशों को उनके संगत घटकों को मिलाकर जोड़ना अधिक आसान होता है। मान लीजिए कि किसी समतल में दो सदिश **A** तथा **B** हैं जिनके घटक क्रमश: A_x, A_y तथा B_x, B_y हैं तो

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} \qquad (4.18)$$

मान लीजिए कि **R** इनका योग है, तो

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$
$$= (A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}) + (B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}}) \qquad (4.19)$$

क्योंकि सदिश क्रमविनिमेय तथा साहचर्य नियमों का पालन करते हैं, इसलिए समीकरण (4.19) में व्यक्त किए गए सदिशों को निम्न प्रकार से पुन: व्यवस्थित कर सकते हैं :

$$\mathbf{R} = (A_x + B_x)\hat{\mathbf{i}} + (A_y + B_y)\hat{\mathbf{j}} \qquad (4.19a)$$

क्योंकि $\mathbf{R} = R_x\hat{\mathbf{i}} + R_y\hat{\mathbf{j}}$ (4.20)

इसलिए $R_x = A_x + B_x,\ R_y = A_y + B_y$ (4.21)

इस प्रकार परिणामी सदिश **R** का प्रत्येक घटक सदिशों **A** और **B** के संगत घटकों के योग के बराबर होता है।

तीन विमाओं के लिए सदिशों **A** और **B** को हम निम्न प्रकार से व्यक्त करते हैं :

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}$$
$$\mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}$$
$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = R_x\hat{\mathbf{i}} + R_y\hat{\mathbf{j}} + R_z\hat{\mathbf{k}}$$

जहां घटकों R_x, R_y तथा R_z के मान निम्न प्रकार से हैं :

$$R_x = A_x + B_x$$
$$R_y = A_y + B_y$$
$$R_z = A_z + B_z \qquad (4.22)$$

इस विधि को अनेक सदिशों के जोड़ने व घटाने के लिए उपयोग में ला सकते हैं। उदाहरणार्थ, यदि **a**, **b** तथा **c** तीनों सदिश निम्न प्रकार से दिए गए हों :

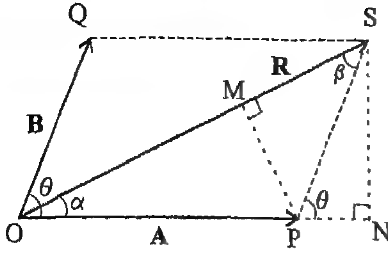
$$\mathbf{a} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}$$
$$\mathbf{b} = b_x\hat{\mathbf{i}} + b_y\hat{\mathbf{j}} + b_z\hat{\mathbf{k}}$$
$$\mathbf{c} = c_x\hat{\mathbf{i}} + c_y\hat{\mathbf{j}} + c_z\hat{\mathbf{k}} \qquad (4.23a)$$

तो सदिश $\mathbf{T} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$ के घटक निम्नलिखित होंगे

$$T_x = a_x + b_x - c_x$$
$$T_y = a_y + b_y - c_y$$
$$T_z = a_z + b_z - c_z \qquad (4.23b)$$

▶ ***उदाहरण 4.2*** चित्र 4.10 में दिखाए गए दो सदिशों **A** तथा **B** के बीच का कोण θ है। इनके परिणामी सदिश का परिमाण तथा दिशा उनके परिमाणों तथा θ के पद में निकालिए।

* इस बात पर ध्यान दीजिए कि α, β, व γ कोण दिक्स्थान में हैं। ये ऐसी दो रेखाओं के बीच के कोण हैं जो एक समतल में नहीं हैं।



चित्र 4.10

हल चित्र 4.10 के अनुसार मान लीजिए कि **OP** तथा **OQ** दो सदिशों **A** तथा **B** को व्यक्त करते हैं, जिनके बीच का कोण θ है । तब सदिश योग के समान्तर चर्तुभुज नियम द्वारा हमें परिणामी सदिश **R** प्राप्त होगा जिसे चित्र में **OS** द्वारा दिखाया गया है । इस प्रकार

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

चित्र में *SN*, *OP* के लंबवत् है तथा *PM*, *OS* के लंबवत् है ।

$$\therefore\ OS^2 = ON^2 + SN^2$$

किन्तु $ON = OP + PN = A + B\cos\theta$

$$SN = B\sin\theta$$

$$OS^2 = (A+B\cos\theta)^2 + (B\sin\theta)^2$$

अथवा $R^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta} \qquad (4.24a)$$

त्रिभुज OSN में,

$$SN = OS\sin\alpha = R\sin\alpha$$

एवं त्रिभुज PSN में,

$$SN = PS\sin\theta = B\sin\theta$$

अतएव $R\sin\alpha = B\sin\theta$

अथवा

$$\frac{R}{\sin\theta} = \frac{B}{\sin\alpha} \qquad (4.24b)$$

इसी प्रकार,

$PM = A\sin\alpha = B\sin\beta$

अथवा

$$\frac{A}{\sin\beta} = \frac{B}{\sin\alpha} \qquad (4.24c)$$

समीकरणों (4.24b) तथा (4.24c) से हमें प्राप्त होता है-

$$\frac{R}{\sin\theta} = \frac{A}{\sin\beta} = \frac{B}{\sin\alpha} \qquad (4.24d)$$

समीकरण (4.24d) के द्वारा हम निम्नांकित सूत्र प्राप्त करते हैं-

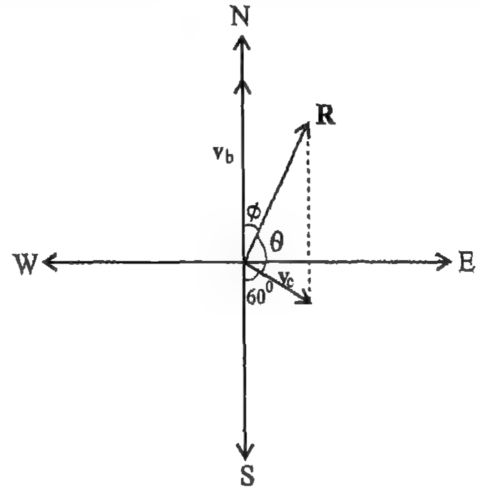
$$\sin\alpha = \frac{B}{R}\sin\theta \qquad (4.24e)$$

यहां *R* का मान समीकरण (4.24a) में दिया गया है ।

समीकरण (4.24a) से परिणामी **R** का परिमाण तथा समीकरण (4.24e) से इसकी दिशा मालूम की जा सकती है । समीकरण (4.24a) को **कोज्या-नियम** तथा समीकरण (4.24d) को **ज्या-नियम** कहते हैं । ◄

▶ ***उदाहरण 4.3*** एक मोटरबोट उत्तर दिशा की ओर 25 km/h के वेग से गतिमान है । इस क्षेत्र में जल-धारा का वेग 10 km/h है । जल-धारा की दिशा दक्षिण से पूर्व की ओर 60° पर है । मोटरबोट का परिणामी वेग निकालिए ।

हल चित्र 4.11 में सदिश v_b मोटरबोट के वेग को तथा v_c जल धारा के वेग को व्यक्त करते हैं । प्रश्न के अनुसार चित्र में इनकी दिशायें दर्शाई गई हैं । सदिश योग के समांतर चतुर्भुज नियम के अनुसार प्राप्त परिणामी **R** की दिशा चित्र में दर्शाई



चित्र 4.11

गई है । कोज्या-नियम का उपयोग करके हम **R** का परिमाण निकाल सकते हैं ।

$$R = \sqrt{v_b^2 + v_c^2 + 2v_b v_c\cos 120^\circ}$$

$$= \sqrt{25^2 + 10^2 + 2\times25\times10\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$\approx 21.8 \text{ km/h}$$

R की दिशा ज्ञात करने के लिए हम 'ज्या-नियम' का उपयोग करते हैं-

$$\frac{R}{\sin\theta} = \frac{v_0}{\sin\phi}$$

अथवा, $\sin\phi = \dfrac{v_0\sin\theta}{R} = \dfrac{10\times\sin120^\circ}{21.8}$

$$= \frac{10\sqrt{3}}{2\times21.8} = 0.397$$

$$\therefore\ \phi = 23.4^\circ$$ ◄

4.7 सदिशों का गुणन : अदिश व सदिश गुणनफल

किसी सदिश को एक दूसरे सदिश से गुणा करने की दो विधियां हैं । एक विधि से अदिश प्राप्त होता है जिसे

अदिश गुणनफल कहते हैं । दूसरी से एक नया सदिश प्राप्त होता है जिसे **सदिश गुणनफल** कहते हैं।

4.7.1 अदिश गुणनफल

किन्हीं दो सदिशों **A** तथा **B** के अदिश या बिंदु-गुणनफल (डॉट गुण्नफल) को हम [**A.B** (**A** डॉट **B**)] के रूप में लिखते हैं और निम्न प्रकार से परिभाषित करते हैं :

$$\mathbf{A.B} = AB\cos\theta \qquad (4.25)$$

यहां θ दो सदिशों **A** तथा **B** के बीच का कोण है। इसे चित्र 4.12 में दिखाया गया है । क्योंकि **A, B** तथा $\cos\theta$ सभी अदिश हैं इसलिए **A** तथा **B** का बिंदु गुणनफल भी अदिश राशि है । **A** व **B** में से प्रत्येक की अपनी-अपनी दिशा है किन्तु उनके अदिश गुणनफल की कोई दिशा नहीं है ।

समीकरण (4.25) से हमें निम्नलिखित परिणाम मिलता है :

$$\mathbf{A.B} = A\,(B\cos\theta) \qquad (4.26a)$$
$$= B\,(A\cos\theta) \qquad (4.26b)$$

ज्यामिति के अनुसार $B\cos\theta$ सदिश **B** का सदिश **A** पर प्रक्षेप है (चित्र 4.12b) । इसी प्रकार $A\cos\theta$ सदिश **A** का सदिश **B** पर प्रक्षेप है । इस प्रकार **A.B** सदिश **A** के परिमाण तथा **A** के अनुदिश **B** के घटक के गुणनफल के बराबर होता है (देखिए समीकरण 4.26a) । दूसरे तरीके से यह **B** के परिमाण तथा **A** का सदिश **B** के अनुदिश घटक के गुणनफल के बराबर है (देखिए समीकरण 4.26b) ।

समीकरण (4.25) से यह संकेत भी मिलता है कि अदिश गुण्नफल क्रम विनिमेय नियम का पालन करता है-

$$\mathbf{A.B} = \mathbf{B.A} \qquad (4.27)$$

अदिश गुणनफल **वितरण-नियम** का भी पालन करते हैं :

$$\mathbf{A.(B + C) = A.B + A.C} \qquad (4.28a)$$

तथा,

$$\mathbf{A.}(\lambda\,\mathbf{B}) = \lambda(\mathbf{A.B}) \qquad (4.28b)$$

यहां λ एक वास्तविक संख्या है ।

समीकरणों (4.28a) तथा (4.28b) की व्युत्पत्ति आपके लिए अभ्यास हेतु छोड़ी जा रही है ।

अब हम एकांक सदिशों $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ तथा $\hat{\mathbf{k}}$ का अदिश गुणनफल निकालेंगे । क्योंकि वे एक दूसरे के लंबवत् हैं, इसलिए

$$\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$$
$$\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = 0 \qquad (4.29)$$

दो सदिशों

$$\mathbf{A} = \mathrm{A_x}\,\hat{\mathbf{i}} + \mathrm{A_y}\,\hat{\mathbf{j}} + \mathrm{A_z}\,\hat{\mathbf{k}}$$
$$\mathbf{B} = \mathrm{B_x}\,\hat{\mathbf{i}} + \mathrm{B_y}\,\hat{\mathbf{j}} + \mathrm{B_z}\,\hat{\mathbf{k}}$$

का अदिश गुणनफल होगा :

$$\mathbf{A.B} = (\mathrm{A_x}\,\hat{\mathbf{i}} + \mathrm{A_y}\,\hat{\mathbf{j}} + \mathrm{A_z}\,\hat{\mathbf{k}}).(\mathrm{B_x}\,\hat{\mathbf{i}} + \mathrm{B_y}\,\hat{\mathbf{j}} + \mathrm{B_z}\,\hat{\mathbf{k}})$$
$$= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \qquad (4.30)$$

अदिश गुणनफल परिभाषा तथा समीकरण (4.30) से हमें निम्न प्राप्त होता है :

(i) $\mathbf{A.A} = A_xA_x + A_yA_y + A_zA_z$

अथवा $A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \qquad (4.31)$

क्योंकि $\mathbf{A.A} = |\mathbf{A}||\mathbf{A}|\cos 0 = A^2$

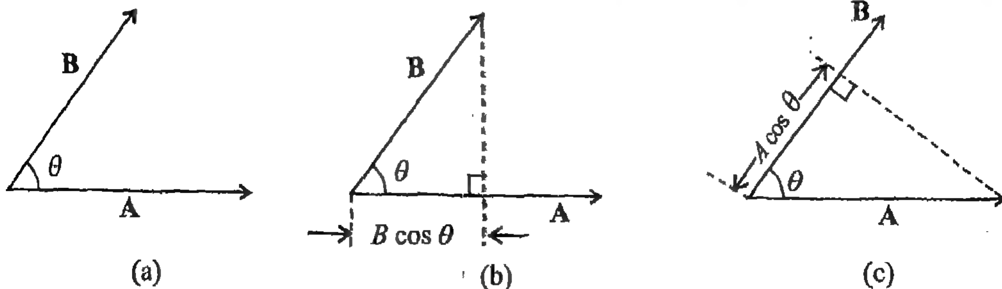
(ii) $\mathbf{A.B} = 0$ यदि **A** व **B** एक दूसरे के लंबवत् हैं ।

4.7.2 सदिश गुणनफल

दो सदिशों **A** व **B** के सदिश गुणनफल या क्रास गुणन को **A × B** (**A** क्रॉस **B**) के रूप में लिखते हैं तथा इसे एक नए सदिश **V** के पद में व्यक्त करते हैं, जिसका परिमाण नीचे दिया गया है :

$$V = AB\sin\theta \qquad (4.32)$$

परिणामी सदिश **V** की दिशा 'दक्षिणहस्त नियम' द्वारा ज्ञात की जाती है । इस नियम के अनुसार **V** सदिशों **A, B** वाले समतल के लंबवत् होता है । मान लीजिए कि कोई रेखा **A** तथा **B** दोनों के लंबवत् है और उनके उभयनिष्ठ मूल बिंदु से गुजरती है । कल्पना करें कि आपने इस रेखा को अपने दाएं हाथ से इस प्रकार पकड़ा है कि आपकी उंगलियां, **A** से **B** की ओर, उनके बीच के छोटे कोण की तरफ से प्रसर्प करती हैं । उंगलियों की ऐसी स्थिति में बहिर्मुखी अंगूठा **V** की दिशा को इंगित करेगा [चित्र (4.13a)] । विकल्प के रूप में आप एक



*चित्र 4.12 (a) दो सदिशों **A** व **B** का अदिश गुणनफल एक अदिश होता है अर्थात् **A.B** = AB cos θ, (b) B cos θ सदिश **B** का सदिश **A** पर प्रक्षेप है, (c) A cos θ सदिश **A** का **B** पर प्रक्षेप है ।*

स्क्रू की कल्पना करें और उसे दक्षिणावर्ती तरीके से सदिश **A** से **B** की ओर दोनों सदिशों के बीच के छोटे कोण की तरफ से घुमाएं । तब स्क्रू के आगे बढ़ने की दिशा **V** की दिशा को इंगित करेगी । चित्र में एक दूसरा सदिश $\mathbf{V'} = \mathbf{B} \times \mathbf{A}$ भी दिखाया गया है जिसकी दिशा **V** की दिशा के विपरीत है (चित्र 4.13b) । स्पष्ट है $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$, यद्यपि इनके परिमाण बराबर हैं । इसका तात्पर्य यह है कि सदिश गुणनफल क्रम विनिमेय नियम का पालन नहीं करता । वास्तव में

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad (4.33)$$

परंतु सदिशों का सदिश गुणनफल निश्चित रूप से वितरण नियम का पालन करता है :

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad (4.34)$$

समीकरण (4.34) की व्युत्पत्ति आपके अभ्यास हेतु छोड़ी जा रही है ।

सदिश गुणनफल के परिमाण की ज्यामितीय व्याख्या हम निम्नलिखित प्रकार से करते हैं :

$$V = AB\sin\theta$$
$$= (A \sin\theta)\, B = A_{\perp}B$$
$$= A\,(B \sin\theta) = AB_{\perp}$$

यहां $A \sin\theta$ सदिश **A** के लंब घटक के परिमाण को व्यक्त करता है अर्थात् $A_{\perp} = A \sin\theta$ तथा इस प्रकार $B_{\perp} = B \sin\theta$ । इन्हें चित्रों (4.13c) तथा (4.13d) में दर्शाया गया है । इस प्रकार सदिशों **A** तथा **B** के सदिश गुणनफल का परिमाण किसी एक सदिश के परिमाण तथा दूसरे सदिश के लंब घटक के परिमाण के गुणनफल के बराबर होता है । अब हम सदिश गुणनफल के कुछ विशेष उदाहरणों पर विचार करेंगे :

(i) यदि दो सदिश **A** तथा **B** या तो समांतर हैं ($\theta = 0°$) या एक दूसरे के विपरीत हैं ($\theta = 180°$) तो $\sin\theta = 0$

$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$, एक शून्य सदिश ।

विशेष रूप से, एक सामान्य सदिश **A** के लिए, हमें $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$ प्राप्त होता है

(ii) मान लीजिए कि दो सदिश एक दूसरे के लंबवत् हैं तो

$\theta = 90°$, $\sin 90 = 1$

अतः,

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = \mathbf{AB}$$

(iii) एकांक सदिशों $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$,के लिए हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होते हैं-

$$\begin{aligned} &\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{i}}=\hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{j}}=\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{k}}=0\\ &\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{j}}=\hat{\mathbf{k}}=-\hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{i}}\\ &\hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{k}}=\hat{\mathbf{i}}=-\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{j}}\\ &\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{i}}=\hat{\mathbf{j}}=-\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (4.35)$$

(iv) यदि दो सदिशों **A** व **B** को निम्न प्रकार से लिखें

$$\mathbf{A}=A_x\hat{\mathbf{i}}+A_y\hat{\mathbf{j}}+A_z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{B}=B_x\hat{\mathbf{i}}+B_y\hat{\mathbf{j}}+B_z\hat{\mathbf{k}}$$

तो उनका सदिश गुणनफल $\mathbf{V} = \mathbf{A}\times\mathbf{B}$ का मान निम्नवत् होगा,

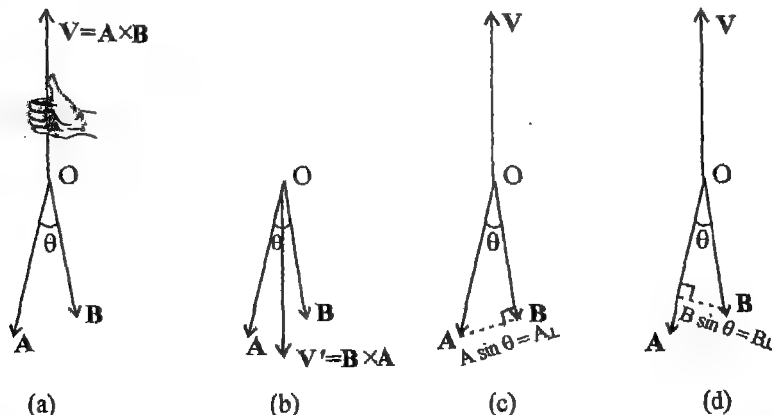
$$\mathbf{V}=(A_x\hat{\mathbf{i}}+A_y\hat{\mathbf{j}}+A_z\hat{\mathbf{k}}) \times (B_x\hat{\mathbf{i}}+B_y\hat{\mathbf{j}}+B_z\hat{\mathbf{k}})$$

समीकरण (4.35) में उल्लेखित $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ के मध्य संबंधों का उपयोग करके हम **V** के उपर्युक्त समीकरण को निम्न प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं :

$$\mathbf{V}=V_x\hat{\mathbf{i}}+V_y\hat{\mathbf{j}}+V_z\hat{\mathbf{k}} \quad (4.36)$$

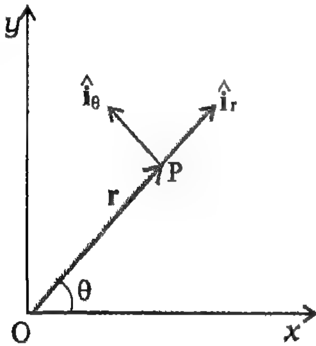
V_x, V_y तथा V_z के मान नीचे दिए गए हैं-

$$\begin{aligned} V_x &= A_yB_z - A_zB_y\\ V_y &= A_zB_x - A_xB_z\\ V_z &= A_xB_y - A_yB_x \end{aligned} \quad (4.37)$$



*चित्र 4.13 (a) सदिश $\mathbf{V} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, **A** व **B** दोनों के समानुपाती होता है तथा इसकी दिशा दक्षिणहस्त नियम से निर्धारित होती है । (b) सदिश $\mathbf{V'} = \mathbf{B} \times \mathbf{A}$ परिमाण में यद्यपि **V** के परिमाण के बराबर है तथापि इसकी दिशा **V** की दिशा के विपरीत है। (c) सदिश गुणनफल का परिमाण या तो $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}| = \mathbf{A}_{\perp}\mathbf{B}$ अथवा $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}| = \mathbf{AB}_{\perp}$ के रूप में व्यक्त करते हैं, जैसा कि (d) में दिखाया गया है ।*

▶ *उदाहरण 4.4 :* किसी समतल x-y में एक बिंदु P स्थित है। इसकी स्थिति निर्देशांक (x, y) अथवा x-अक्ष से कोण θ बनाने वाले एक त्रिज्य सदिश $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$ द्वारा व्यक्त की जा सकती है। सदिश $\mathbf{r}$ के अनुदिश एकांक परिमाण के सदिश $\hat{\mathbf{i}}_r$ तथा $\hat{\mathbf{i}}_r$ के लंबवत् और x-y समतल में स्थित एकांक परिमाण वाले सदिश $\hat{\mathbf{i}}_\theta$ के मान निकालिए।



चित्र 4.14

हल परिभाषा के अनुसार

$$\hat{\mathbf{i}}_r = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\hat{\mathbf{i}}x + \hat{\mathbf{j}}y}{r} = \hat{\mathbf{i}}\left(\frac{x}{r}\right) + \hat{\mathbf{j}}\left(\frac{y}{r}\right)$$

अथवा,

$$\hat{\mathbf{i}}_r = \hat{\mathbf{i}}\cos\theta + \hat{\mathbf{j}}\sin\theta \quad x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

पुनः मान लीजिए कि,

$$\hat{\mathbf{i}}_\theta = \hat{\mathbf{i}}\,\alpha + \hat{\mathbf{j}}\,\beta$$

यहां α, β गुणांक हैं, जिनके मान ज्ञात करने हैं। एकांक अदिश गुणनफल की परिभाषा का उपयोग करने पर

$$\hat{\mathbf{i}}_r.\hat{\mathbf{i}}_\theta = (\hat{\mathbf{i}}\cos\theta + \hat{\mathbf{j}}\sin\theta).(\hat{\mathbf{i}}\alpha + \hat{\mathbf{j}}\beta)$$

अतः, $\alpha = -\beta\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

क्योंकि $\hat{\mathbf{i}}_\theta$ एकांक परिमाण का एक सदिश है, अतः

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1$$

अतएव,

$$\beta = +\cos\theta, \alpha = -\sin\theta$$

इस प्रकार,

$$\hat{\mathbf{i}}_\theta = -\hat{\mathbf{i}}\sin\theta + \hat{\mathbf{j}}\cos\theta$$

हमने यहां $\beta = +\cos\theta$ लिया है न कि दूसरा हल $\beta = -\cos\theta$ क्योंकि हम $\hat{\mathbf{i}}_r$ व $\hat{\mathbf{i}}_\theta$ सदिशों के ऐसे निकाय को परिभाषित करते हैं जिसमें इन सदिशों की दिशायें $\mathbf{r}$ व θ के बढ़ने की दिशाओं के अनुदिश होती हैं। ◀

4.8 किसी समतल में गति

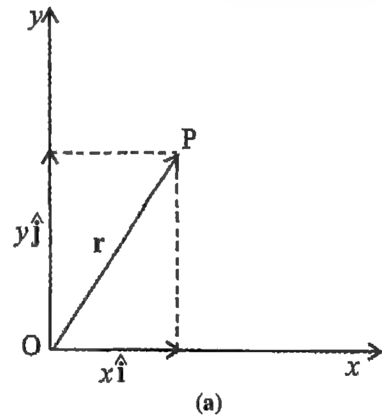
अध्याय 3 में हमने किसी सरल रेखा के अनुदिश गतिमान वस्तु के लिए अनेक शुद्धगतिकी राशियों जैसे स्थिति, विस्थापन, वेग तथा त्वरण आदि को परिभाषित किया है। इन राशियों की दिशा को दर्शाने के लिए हमने + अथवा – चिह्नों का उपयोग किया है। परंतु किसी समतल या त्रिविमीय दिक्स्थान में गतिमान वस्तु के लिए ऐसा संभव नहीं है। दो या तीन विमाओं में इन राशियों को परिभाषित करने के लिए हमें सदिशों की भाषा का उपयोग करना होगा जिसे हम ऊपर पढ़ चुके हैं।

4.8.1 स्थिति सदिश तथा विस्थापन

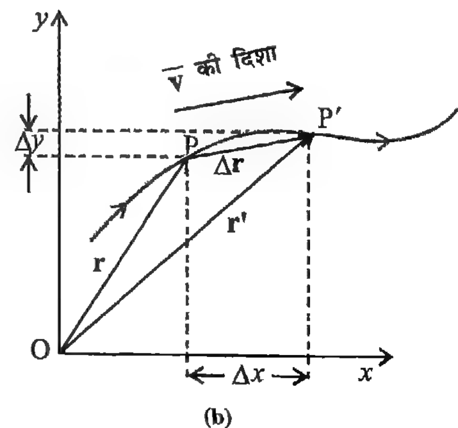
किसी समतल में स्थित कण P का x-y निर्देशतंत्र के मूल बिंदु के सापेक्ष स्थिति सदिश $\mathbf{r}$ [चित्र (4.15)] को निम्नलिखित समीकरण से व्यक्त करते हैं :

$$\mathbf{r} = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}}$$

यहां x तथा y अक्षों x-तथा y- के अनुदिश $\mathbf{r}$ के घटक हैं। इन्हें हम वस्तु के निर्देशांक भी कह सकते हैं।



(a)



(b)

चित्र 4.15 (a) स्थित सदिश $\mathbf{r}$, *(b) विस्थापन* $\Delta\mathbf{r}$ *तथा कण का औसत वेग* $\bar{\mathbf{v}}$

मान लीजिए कि चित्र (4.15b) के अनुसार कोई कण मोटी रेखा से व्यक्त वक्र के अनुदिश चलता है । किसी क्षण t पर इसकी स्थिति P है तथा दूसरे अन्य क्षण t' पर इसकी स्थिति P' है। कण के विस्थापन को हम निम्नलिखित प्रकार से लिखेंगे,

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r} \qquad (4.38)$$

इसकी दिशा P से P' की ओर है ।

समीकरण (4.38) को हम सदिशों के घटक के रूप में निम्नांकित प्रकार से व्यक्त करेंगे,

$$\Delta \mathbf{r} = (\hat{\mathbf{i}}x' + \hat{\mathbf{j}}y') - (\hat{\mathbf{i}}x + \hat{\mathbf{j}}y)$$
$$= \hat{\mathbf{i}}(x' - x) + \hat{\mathbf{j}}(y' - y) \qquad (4.39)$$
$$\therefore \Delta \mathbf{r} = \hat{\mathbf{i}}\Delta x + \hat{\mathbf{j}}\Delta y$$

यहां $\Delta x = x' - x$, $\Delta y = y' - y$

वेग

वस्तु के विस्थापन और तत्संबंधित समय अंतराल के अनुपात को हम औसत वेग ($\bar{\mathbf{v}}$) कहते हैं, अतः

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\hat{\mathbf{i}}\Delta x + \hat{\mathbf{j}}\Delta y}{\Delta t} = \hat{\mathbf{i}}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\Delta y}{\Delta t} \qquad (4.40)$$

अथवा, $\bar{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{i}}\bar{v}_x + \hat{\mathbf{j}}\bar{v}_y$

क्योंकि $\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$, इसलिए चित्र (4.15) के अनुसार औसत वेग की दिशा वही होगी, जो $\Delta \mathbf{r}$ की है ।

गतिमान वस्तु का **वेग** (तात्क्षणिक वेग) अति सूक्ष्म समयान्तराल ($\Delta t \to 0$ की सीमा में)विस्थापन $\Delta \mathbf{r}$ का समय अन्तराल Δt से अनुपात है । इसे हम $\mathbf{v}$ से व्यक्त करेंगे, अतः

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \qquad (4.41)$$

चित्रों 4.16(a) से लेकर 4.16(d) की सहायता से इस सीमान्त प्रक्रम को आसानी से समझा जा सकता है । इन चित्रों में मोटी रेखा उस पथ को दर्शाती है जिस पर कोई वस्तु क्षण t पर बिंदु P से चलना प्रारम्भ करती है । वस्तु की स्थिति $\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3$, समयों के उपरांत क्रमशः P_1, P_2, P_3, से व्यक्त होती है । इन समयों में कण का विस्थापन क्रमशः $\Delta \mathbf{r}_1, \Delta \mathbf{r}_2, \Delta \mathbf{r}_3$, है । चित्रों (a), (b) तथा (c) में क्रमशः घटते हुए Δt के मानों अर्थात् Δt_1, Δt_2, Δt_3, ($\Delta t_1 > \Delta t_2 > \Delta t_3$) के लिए कण के औसत वेग $\bar{\mathbf{v}}$ की दिशा को दिखाया गया है । जैसे ही $\Delta t \to 0$ तो $\Delta r \to 0$ एवं $\Delta \mathbf{r}$ पथ की स्पर्श रेखा के अनुदिश हो जाता है (चित्र 4.16d)। इस प्रकार ***पथ के किसी बिंदु पर वेग उस बिंदु पर खींची गई स्पर्श रेखा द्वारा व्यक्त होता है जिसकी दिशा वस्तु की गति के अनुदिश होती है ।***

सुविधा के लिए $\mathbf{v}$ को हम प्रायः घटक के रूप में निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त करते हैं :

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{\mathbf{j}}\right) \qquad (4.42)$$

$$= \hat{\mathbf{i}}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \hat{\mathbf{j}}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\therefore \mathbf{v} = \hat{\mathbf{i}}\frac{dx}{dt} + \hat{\mathbf{j}}\frac{dy}{dt}$$

$$= \hat{\mathbf{i}}v_x + \hat{\mathbf{j}}v_y$$

यहां $v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$ (4.43a)

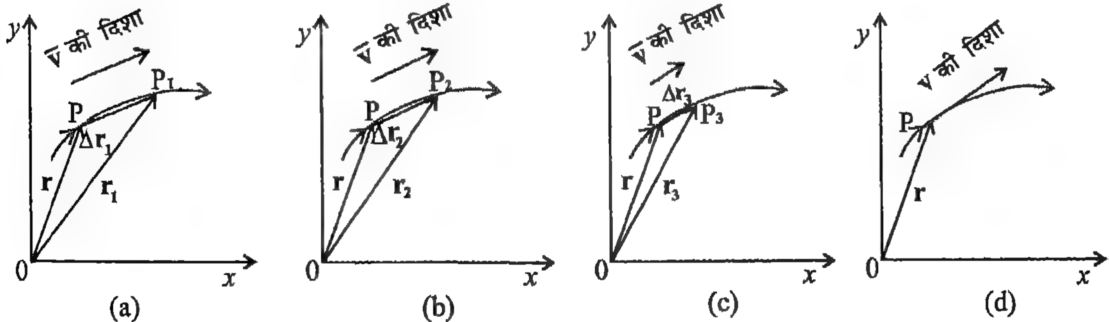
अतः यदि समय के फलन के रूप में हमें निर्देशांक x और y ज्ञात हैं तो हम उपरोक्त समीकरणों का उपयोग v_x और v_y निकालने में कर सकते हैं ।

सदिश $\mathbf{v}$ का परिमाण निम्नलिखित होगा,

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad (4.43b)$$

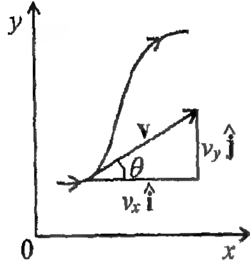
तथा इसकी दिशा कोण θ द्वारा निम्न प्रकार से व्यक्त होगी :

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} \quad \text{अथवा} \quad \theta = \tan^{-1} = \frac{v_y}{v_x} \qquad (4.43c)$$



चित्र 4.16 जैसे ही समय अंतराल Δt शून्य की सीमा को स्पर्श कर लेता है, औसत वेग $\bar{\mathbf{v}}$ वस्तु के वेग $\mathbf{v}$ के बराबर हो जाता है । $\mathbf{v}$ की दिशा पथ की स्पर्श रेखा के समांतर है ।

चित्र 4.17 में किसी वेग सदिश **v** के लिए v_x, v_y तथा कोण θ को दर्शाया गया है ।



चित्र 4.17 वेग v के घटक v_x, v_y तथा कोण θ जो x-अक्ष से बनाता है । चित्र में $v_x = v\cos\theta = v\sin\theta$

त्वरण

x-y समतल में गतिमान वस्तु का **औसत त्वरण** ($\bar{\mathbf{a}}$) उसके वेग में परिवर्तन तथा तत्संबंधित समय अंतराल Δt के अनुपात के बराबर होता है :

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \tag{4.44a}$$

$$= \frac{\Delta(v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}})}{\Delta t}$$

$$= \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{\mathbf{i}} + \frac{v_y}{\Delta t}\hat{\mathbf{j}}$$

अथवा $\bar{\mathbf{a}} = \bar{a}_x\hat{\mathbf{i}} + \bar{a}_y\hat{\mathbf{j}}$ (4.44b)

त्वरण (*तात्क्षणिक त्वरण*) औसत त्वरण के सीमान्त मान के बराबर होता है जब समय अंतराल शून्य के सदृश हो जाता है :

$$\therefore \mathbf{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\hat{\mathbf{i}}\frac{\Delta v_x}{\Delta t} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\Delta v_y}{\Delta t}\right) \tag{4.45a}$$

क्योंकि $\Delta\mathbf{v} = \hat{\mathbf{i}}\Delta v_x + \hat{\mathbf{j}}\Delta v_y$, इसलिए

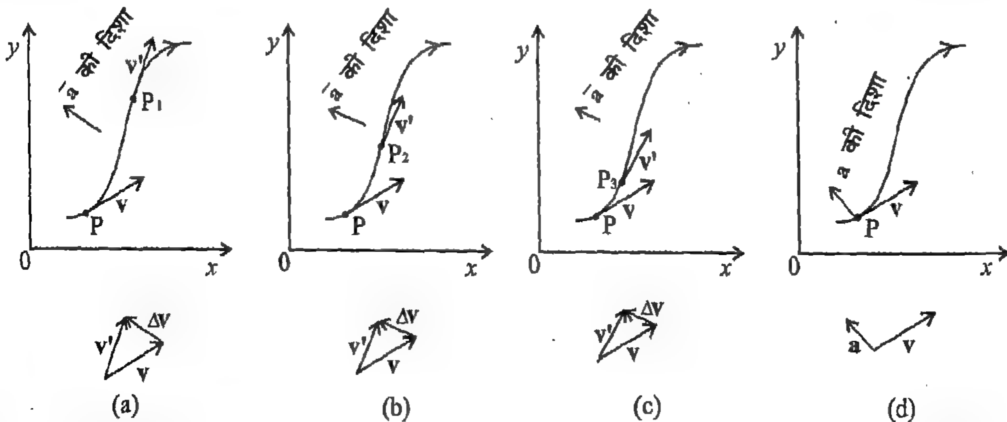
$$\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v_x}{\Delta t} + \hat{\mathbf{j}}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v_y}{\Delta t}$$

$$= \hat{\mathbf{i}}\frac{dv_x}{dt} + \hat{\mathbf{j}}\frac{dv_y}{dt}$$

अथवा $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}}\,a_x + \hat{\mathbf{j}}\,a_y$ (4.45b)

जहां $a_x = \frac{dv_x}{dt}, a_y = \frac{dv_y}{dt}$ (4.45c)*

वेग की भांति यहां भी वस्तु के पथ को प्रदर्शित करने वाले किसी आलेख में त्वरण की परिभाषा के लिए हम ग्राफी विधि से सीमान्त प्रक्रम को समझ सकते हैं । इसे चित्रों (4.18a) से (4.18d) तक में समझाया गया है । किसी क्षण t पर कण की स्थिति बिंदु P द्वारा दर्शाई गई है । $\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3, (\Delta t_1>\Delta t_2>\Delta t_3)$ समय के बाद कण की स्थिति क्रमशः बिंदुओं P_1, P_2, P_3 द्वारा व्यक्त की गई है । चित्रों (4.18) a, b और c में इन सभी बिंदुओं P, P_1, P_2, P_3 पर वेग सदिशों को भी दिखाया गया है । प्रत्येक Δt के लिए सदिश योग के त्रिभुज नियम का उपयोग करके $\Delta\mathbf{v}$ का मान निकालते हैं । परिभाषा के अनुसार औसत त्वरण की दिशा वही है जो $\Delta\mathbf{v}$ की होती है । हम देखते हैं कि जैसे-जैसे Δt का मान घटता जाता है वैसे-वैसे $\Delta\mathbf{v}$ की दिशा भी बदलती जाती है और इसके परिणामस्वरूप त्वरण की भी दिशा बदलती



चित्र 4.18 तीन समय अंतरालों (a) Δt_1, (b) Δt_2, (c) Δt_3, $(\Delta t_1>\Delta t_2>\Delta t_3)$ के लिए औसत त्वरण $\bar{\mathbf{a}}$ (d) $\Delta t\to 0$ सीमा के अंतर्गत औसत त्वरण वस्तु के त्वरण के बराबर होता है ।

* x व y के पदों में a_x तथा a_y को हम निम्न प्रकार से व्यक्त करते हैं :

$$a_x = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad a_y = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d^2y}{dt^2}$$

है। अंततः $\Delta t \to 0$ सीमा में (चित्र 4.18d) औसत त्वरण, तात्क्षणिक त्वरण के बराबर हो जाता है और इसकी दिशा चित्र में दर्शाए अनुसार होती है।

ध्यान दें कि एक विमा में वस्तु का वेग एवं त्वरण सदैव एक सरल रेखा में होते हैं (वे या तो एक ही दिशा में होते हैं अथवा विपरीत दिशा में)। परंतु दो या तीन विमाओं में गति के लिए वेग एवं त्वरण सदिशों के बीच 0° से 180° के बीच कोई भी कोण हो सकता है।

> *उदाहरण 4.5* किसी कण की स्थिति $\mathbf{r} = 3.0\,t\hat{\mathbf{i}} + 2.0\,t^2\hat{\mathbf{j}} + 5.0\hat{\mathbf{k}}$ है।
> जहां t सेकंड में व्यक्त किया गया है। अन्य गुणकों के मात्रक इस प्रकार हैं कि **r** मीटर में व्यक्त हो जाएं।
> (a) कण का $\mathbf{v}(t)$ व $\mathbf{a}(t)$ मालूम कीजिए; (b) $t = 3.0$ s पर $\mathbf{v}(t)$ का परिमाण व दिशा मालूम कीजिए।

हल $$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(3.0\,t\hat{\mathbf{i}} + 2.0\,t^2\hat{\mathbf{j}} + 5.0\hat{\mathbf{k}})$$

$$= 3.0\,\hat{\mathbf{i}} + 4.0\,t\hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 4.0\,\hat{\mathbf{j}}$$

$t = 3.0$ s पर $\mathbf{v} = 3.0\hat{\mathbf{i}} + 12.0\hat{\mathbf{j}}$

इसका परिमाण $v = \sqrt{3^2 + (12)^2} \cong 12.4 \text{ m s}^{-1}$ है, तथा

इसकी दिशा $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{12}{3}\right) \cong 76^0$ ◄

4.9 किसी समतल में एकसमान त्वरण से गति

मान लीजिए कि कोई वस्तु एक समतल x-y में एक समान त्वरण **a** से गति कर रही है अर्थात् **a** का मान नियत है। किसी समय अंतराल में औसत त्वरण इस स्थिर त्वरण के मान $\bar{\mathbf{a}}$ के बराबर होगा $\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}$। अब मान लीजिए किसी क्षण $t = 0$ पर वस्तु का वेग $\mathbf{v}_0$ तथा दूसरे अन्य क्षण t पर उसका वेग **v** है।

तब परिभाषा के अनुसार

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_0}{t - 0} = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_0}{t}$$

अथवा $$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}\,t \qquad (4.46a)$$

उपर्युक्त समीकरण को सदिशों के घटक के रूप में निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त करते हैं-

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$
$$v_y = v_{0y} + a_y t \qquad (4.46b)$$

अब हम देखेंगे कि समय के साथ स्थिति सदिश **r** किस प्रकार बदलता है। यहां एकविमीय गति के लिए बताई गई विधि का उपयोग करेंगे। मान लीजिए कि $t = 0$ तथा $t = t$ क्षणों पर कण के स्थिति के सदिश क्रमशः $\mathbf{r}_0$ तथा **r** हैं तथा इन क्षणों पर कण के वेग $\mathbf{v}_0$ तथा **v** हैं। तब समय अंतराल $t - 0 = t$ में कण का औसत वेग $\frac{\mathbf{v}+\mathbf{v}_0}{2}$ तथा विस्थापन $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ होगा। क्योंकि विस्थापन औसत तथा समय अंतराल का गुणनफल होता है, अर्थात्

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \left(\frac{\mathbf{v} + \mathbf{v}_0}{2}\right)t = \left[\frac{(\mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t) + \mathbf{v}_0}{2}\right]t$$

$$= \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$$

अतएव,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2 \qquad (4.47a)$$

यह बात आसानी से सत्यापित की जा सकती है कि समीकरण (4.47a) का अवकलन $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ समीकरण (4.46a) है तथा साथ ही $t = 0$ क्षण पर $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ की शर्त को भी पूरी करता है। समीकरण (4.47a) को घटकों के रूप में निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं :

$$x = x_0 + v_{ox} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$y = y_0 + v_{oy} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \qquad (4.47b)$$

(4.47b) की एक तात्कालिक व्याख्या यह है कि x व y दिशाओं में गतियां एक दूसरे पर निर्भर नहीं करती हैं। अर्थात्, ***किसी समतल (दो विमा) में गति को दो अलग-अलग समकालिक एकविमीय एकसमान त्वरित गतियों के रूप में समझ सकते हैं जो परस्पर लंबवत् दिशाओं के अनुदिश हों।*** यह महत्त्वपूर्ण परिणाम है जो दो विमाओं में वस्तु की गति के विश्लेषण में उपयोगी होता है। यहां परिणाम त्रिविमीय गति के लिए भी है। बहुत-सी भौतिक स्थितियों में दो लंबवत् दिशाओं का चुनाव सुविधाजनक होता है जैसा कि हम प्रक्षेप्य गति के लिए खण्ड (4.11) में देखेंगे। समीकरण (4.47a) तथा (4.47b) से t को विलुप्त करने तथा सदिशों के अदिश गुणनफल का उपयोग करके हमें निम्नलिखित संबंध मिलता है :

$$v^2 - v_0^2 = 2\mathbf{a}.(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \qquad (4.47c)$$

▶ **उदाहरण 4.6** $t = 0$ क्षण पर कोई कण मूल बिंदु से $5.0\hat{\mathbf{i}}$ m/s के वेग से चलना शुरू करता है । x - y समतल में उस पर एक ऐसा बल लगता है जो उसमें एकसमान त्वरण $(3.0\hat{\mathbf{i}} + 2.0\hat{\mathbf{j}})$ m/s² उत्पन्न करता है । (a) जिस क्षण पर कण का x निर्देशांक 84 m हो उस क्षण उसका निर्देशांक y कितना होगा ? (b) इस क्षण कण की चाल क्या होगी?

हल प्रश्नानुसार कण की स्थिति निम्नांकित समीकरण से व्यक्त होगी,

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{a}\, t^2$$

$$= 5.0\hat{\mathbf{i}}\, t + \frac{1}{2}(3.0\hat{\mathbf{i}} + 20\hat{\mathbf{j}})t^2$$

$$= (5.0t + 1.5t^2)\hat{\mathbf{i}} + 1.0t^2\hat{\mathbf{j}}$$

अतएव, $x(t) = 5.0\, t + 1.5\, t^2$

$y(t) = 1.0\, t^2$

जब $x(t) = 84$ m तब $t = ?$

$\therefore\ 84 = 5.0\, t + 1.5\, t^2$

हल करने पर $t = 6$ s

$t = 6.0$ s पर $y = 1.0(6)^2 = 36.0$ m

(b) कण का वेग $\mathbf{v}(t) = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = (5.0 + 3.0t)\hat{\mathbf{i}} + 2.0t\hat{\mathbf{j}}$

$t = 6$ s के लिए, $\mathbf{v} = 23.0\hat{\mathbf{i}} + 12.0\hat{\mathbf{j}}$

अत: कण की चाल, $|\mathbf{v}| = \sqrt{(23.0)^2 + (12.0)^2} = 25.9\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ ◀

4.10 दो विमाओं में आपेक्षिक वेग

खण्ड 3.7 में किसी सरल रेखा के अनुदिश जिस आपेक्षिक वेग की धारणा से हम परिचित हुए हैं, उसे किसी समतल में या त्रिविमीय गति के लिए आसानी से विस्तारित कर सकते हैं। माना कि दो वस्तुएं A व B वेगों $\mathbf{v}_A$ तथा $\mathbf{v}_B$ से गतिमान हैं (प्रत्येक गति किसी सामान्य निर्देश तंत्र जैसे धरती या पृथ्वी के सापेक्ष है) । अत: **वस्तु *A* का B के सापेक्ष वेग :**

$$\mathbf{v}_{AB} = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B \tag{4.48a}$$

होगा । इसी प्रकार, **वस्तु B का A के सापेक्ष वेग** निम्न होगा :

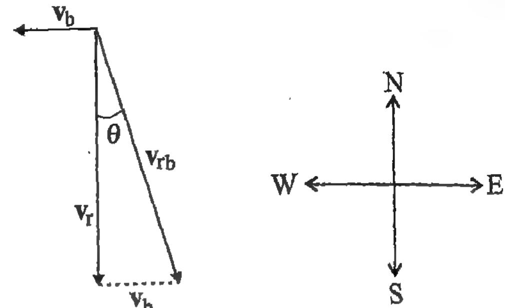
$$\mathbf{v}_{BA} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$$

अतएव, $\mathbf{v}_{AB} = -\mathbf{v}_{BA}$ (4.48b)

तथा $|\mathbf{v}_{AB}| = |\mathbf{v}_{BA}|$ (4.48c)

▶ **उदाहरण 4.7** : ऊर्ध्वाधर दिशा में 35 m s⁻¹ की चाल से वर्षा हो रही है । कोई महिला पूर्व से पश्चिम दिशा में 12 m s⁻¹ की चाल से साइकिल चला रही है । वर्षा से बचने के लिए उसे छाता किस दिशा में लगाना चाहिए ?

हल चित्र 4.19 में $\mathbf{v}$ वर्षा के वेग को तथा $\mathbf{v}_B$ महिला द्वारा चलाई जा रही साइकिल के वेग को व्यक्त करते हैं । ये दोनों वेग धरती के सापेक्ष हैं । क्योंकि महिला साइकिल चला रही है इसलिए



चित्र 4.19

वर्षा के जिस वेग का उसे आभास होगा वह साइकिल के सापेक्ष वर्षा का वेग होगा । अर्थात्

$$\mathbf{v}_{rb} = \mathbf{v}_r - \mathbf{v}_b$$

चित्र 4.19 के अनुसार यह सापेक्ष वेग सदिश ऊर्ध्वाधर से θ कोण बनाएगा जिसका मान

$$\tan\theta = \frac{v_b}{v_r} = \frac{12}{35} = 0.343$$

होगा । अर्थात् $\theta \cong 19^0$

अत: महिला को अपना छाता ऊर्ध्वाधर दिशा से 19⁰ का कोण बनाते हुए पश्चिम की ओर रखना चाहिए ।

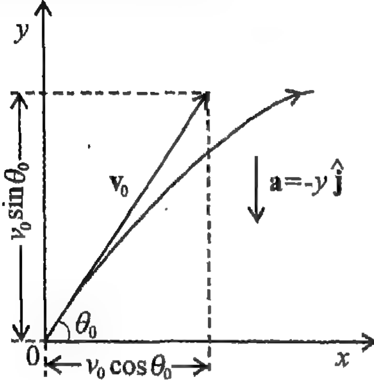
आप इस प्रश्न तथा उदाहरण 4.1 के अंतर पर ध्यान दीजिए । उदाहरण 4.1 में बालक को दो वेगों के परिणामी (सदिश योग) का आभास होता है जबकि इस उदाहरण में महिला को साइकिल के सापेक्ष वर्षा के वेग (दोनों वेगों के सदिश अंतर) का आभास होता है । ◀

4.11 प्रक्षेप्य गति

इससे पहले खण्ड में हमने जो विचार विकसित किए हैं, उदाहरणस्वरूप उनका उपयोग हम प्रक्षेप्य की गति के अध्ययन के लिए करेंगे । जब कोई वस्तु उछालने के बाद उड़ान में हो या प्रक्षेपित की गई हो तो उसे **प्रक्षेप्य** कहते हैं । ऐसा प्रक्षेप्य फुटबॉल, क्रिकेट की बॉल, बेस-बॉल या अन्य कोई भी वस्तु हो सकती है । किसी प्रक्षेप्य की गति को दो अलग-अलग समकालिक गतियों के घटक के परिणाम के रूप में लिया जा सकता है । इनमें से एक घटक बिना किसी त्वरण के क्षैतिज दिशा में होता है तथा दूसरा गुरुत्वीय बल के कारण एकसमान त्वरण से ऊर्ध्वाधर दिशा में होता है ।

सर्वप्रथम गैलीलियो ने अपने लेख ***डायलॉग आन दि ग्रेट वर्ल्ड सिस्टम्स*** (1632) में प्रक्षेप्य गति के क्षैतिज एवं ऊर्ध्वाधर घटकों की स्वतंत्र प्रकृति का उल्लेख किया था ।

इस अध्ययन में हम यह मानेंगे कि प्रक्षेप्य की गति पर वायु का प्रतिरोध कोई प्रभाव नहीं डालता । माना कि प्रक्षेप्य को ऐसी दिशा की ओर $\mathbf{v}_0$ वेग से फेंका गया है जो x- अक्ष से (चित्र 4.20 के अनुसार) θ_0 कोण बनाता है ।



चित्र 4.20 v_0 वेग से θ_0 कोण पर प्रक्षेपित किसी वस्तु की गति ।

फेंकी गई वस्तु को प्रक्षेपित करने के बाद उस पर गुरुत्व के कारण लगने वाले त्वरण की दिशा नीचे की ओर होती है :

$$\mathbf{a} = -g\hat{\mathbf{j}}$$

अर्थात् $a_x = 0$, तथा $a_y = -g$ (4.49)

प्रारंभिक वेग $\mathbf{v}_0$ के घटक निम्न प्रकार होंगे :

$$v_{ox} = v_0 \cos \theta_0$$

$$v_{oy} = v_0 \sin \theta_0 \quad (4.50)$$

यदि चित्र 4.20 के अनुसार वस्तु की प्रारंभिक स्थिति निर्देश तंत्र के मूल बिंदु पर हो, तो

$$x_0 = 0, \; y_0 = 0$$

इस प्रकार समीकरण (4.47b) को निम्न प्रकार से लिखेंगे :

$$x = v_{ox}\, t = (v_0 \cos \theta_0) t$$

तथा, $$y = (v_0 \sin \theta_0)\, t - \frac{1}{2} g\, t^2 \quad (4.51)$$

समीकरण (4.46b) का उपयोग करके किसी समय t के लिए वेग के घटकों को नीचे लिखे गए समीकरणों से व्यक्त करेंगे :

$$v_x = v_{ox} = v_0 \cos \theta_0$$

$$v_y = v_0 \sin \theta_0 - g\, t \quad (4.52)$$

समीकरण (4.51) से हमें किसी क्षण t पर प्रारंभिक वेग $\mathbf{v}_0$ तथा प्रक्षेप्य कोण θ_0 के पदों में प्रक्षेप्य के निर्देशांक x- और y- प्राप्त हो जाएंगे । इस बात पर ध्यान दीजिए कि x व y दिशाओं के परस्पर लंबवत् होने के चुनाव से प्रक्षेप्य गति के विश्लेषण में पर्याप्त सरलता हो गई है । वेग के दो घटकों में से एक x- घटक गति की पूरी अवधि में स्थिर रहता है जबकि दूसरा y- घटक इस प्रकार परिवर्तित होता है मानो प्रक्षेप्य स्वतंत्रतापूर्वक नीचे गिर रहा हो । चित्र 4.21 में विभिन्न क्षणों के लिए इसे आलेखी विधि से दर्शाया गया है । ध्यान दीजिए कि अधिकतम ऊंचाई वाले बिंदु के लिए $v_y = 0$ तथा

$$\theta = \tan^{-1} \frac{v_y}{v_x} = 0$$

प्रक्षेपक के पथ का समीकरण

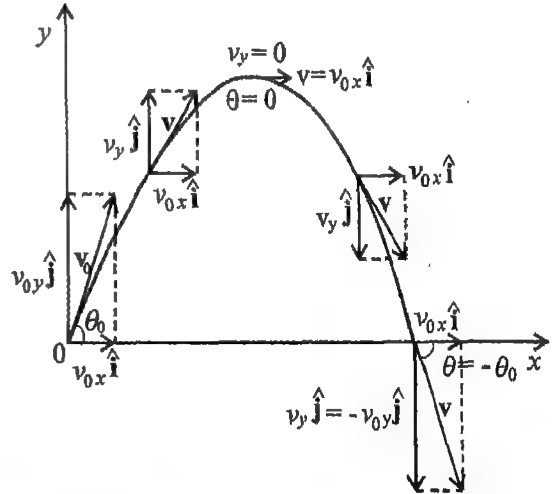
प्रक्षेप्य द्वारा चले गए पथ की आकृति क्या होती है ? इसके लिए हमें पथ का समीकरण निकालना होगा । समीकरण (4.51) में दिए गए x व y व्यंजकों से t को विलुप्त करने से निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है :

$$y = (\tan \theta_0)\, x - \frac{g}{2(v_0 \cos \theta_0)^2}\, x^2 \quad (4.53)$$

यह प्रक्षेप्य के पथ का समीकरण है और इसे चित्र 4.21 में दिखाया गया है । क्योंकि g, θ_0 तथा v_0 अचर हैं, समीकरण (4.53) को निम्न प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं :

$$y = ax + bx^2$$

इसमें a तथा b नियतांक हैं । यह एक परवलय का समीकरण है, अर्थात् प्रक्षेप्य का पथ परवलयिक होता है ।



चित्र 4.21 प्रक्षेप्य का पथ परवलयाकार होता है ।

अधिकतम ऊंचाई का समय

प्रक्षेप्य अधिकतम ऊंचाई तक पहुंचने के लिए कितना समय लेता है ? मान लीजिए कि यह समय t_m है । क्योंकि इस बिंदु पर $v_y = 0$ इसलिए समीकरण (4.52) से हम t_m का मान निकाल सकते हैं :

$$v_y = v_0 \sin \theta_0 - g t_m = 0$$

अथवा $$t_m = \frac{v_0 \sin \theta_0}{g} \quad (4.54a)$$

प्रक्षेप्य की उड़ान की अवधि में लगा कुल समय T_f हम समीकरण (4.51) में $y = 0$ रखकर निकाल लेते हैं। इसलिए,

$$T_f = \frac{2(v_0 \sin\theta_0)}{g} \qquad (4.54b)$$

T_f को प्रक्षेप्य का **उड्डयन काल** कहते हैं। यह ध्यान देने की बात है कि $T_f = 2t_m$। पथ की सममिति से हम ऐसे ही परिणाम की आशा करते हैं।

प्रक्षेप्य की अधिकतम ऊंचाई

समीकरण (4.51) में $t = t_m$ रखकर प्रक्षेप्य द्वारा प्राप्त अधिकतम ऊंचाई h_m की गणना की जा सकती है।

$$y = h_m = (v_0 \sin\theta_0)\left(\frac{v_0 \sin\theta_0}{g}\right) - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0 \sin\theta_0}{g}\right)^2$$

या $$h_m = \frac{(v_0 \sin\theta_0)^2}{2g} \qquad (4.55)$$

प्रक्षेप्य का क्षैतिज परास

प्रारंभिक स्थिति ($x = y = 0$) से चलकर उस स्थिति तक जब $y = 0$ हो प्रक्षेप्य द्वारा चली गई दूरी को **क्षैतिज परास**, R, कहते है। क्षैतिज परास उड्डयन काल t_f में चली गई दूरी है। इसलिए, परास R होगा :

$$R = (v_0 \cos\theta_0)(T_f)$$

$$= (v_0 \cos\theta_0)\left(\frac{2v_0 \sin\theta_0}{g}\right)$$

अथवा $$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g} \qquad (4.56)$$

समीकरण (4.56) से स्पष्ट है कि किसी प्रक्षेप्य के वेग v_0 लिए R अधिकतम तब होगा जब $\theta_0 = 45^0$ क्योंकि $\sin 90^0 = 1$ (जो $\sin 2\theta_0$ का अधिकतम मान है)। इस प्रकार अधिकतम क्षैतिज परास होगा

$$R_m = \frac{v_0^2}{g} \qquad (4.56a)$$

▶ **उदाहरण 4.8 :** गैलीलियो ने अपनी पुस्तक "टू न्यू साइंसेज" में कहा है कि "उन उन्नयनों के लिए जिनके मान 45° से बराबर मात्रा द्वारा अधिक या कम हैं, क्षैतिज परास बराबर होते हैं"। इस कथन को सिद्ध कीजिए।

हल यदि कोई प्रक्षेप्य θ_0 कोण पर प्रारंभिक वेग v_0 से फेंका जाए, तो उसका परास

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g} \text{ होगा।}$$

अब कोणों ($45^0 + \alpha$) तथा ($45^0 - \alpha$) के लिए $2\theta_0$ का मान क्रमशः ($90^0 + 2\alpha$) तथा ($90^0 - 2\alpha$) होगा। $\sin(90^0 + 2\alpha)$ तथा $\sin(90^0 - 2\alpha)$ दोनों का मान समान अर्थात् $\cos 2\alpha$ होता है। अतः उन उन्नयनों के लिए जिनके मान 45° से बराबर मात्रा द्वारा कम या अधिक हैं, क्षैतिज परास बराबर होते हैं। ◀

▶ **उदाहरण 4.9 :** एक पैदल यात्री किसी खड़ी चट्टान के कोने पर खड़ा है। चट्टान जमीन से 490 m ऊंची है। वह एक पत्थर को क्षैतिज दिशा में 15 m s^{-1} की आरंभिक चाल से फेंकता है। वायु के प्रतिरोध को नगण्य मानते हुए यह ज्ञात कीजिए कि पत्थर को जमीन तक पहुंचने में कितना समय लगा तथा जमीन से टकराते समय उसकी चाल कितनी थी? ($g = 9.8$ m s^{-2})।

हल हम खड़ी चट्टान के कोने को x- तथा y- अक्ष का मूल बिंदु तथा पत्थर फेंके जाने के समय को $t = 0$ मानेंगे। x- अक्ष की धनात्मक दिशा आरंभिक वेग के अनुदिश तथा y-अक्ष की धनात्मक दिशा ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर चुनते हैं। जैसा कि हम पहले कह चुके हैं कि गति के x- व y- घटक एक दूसरे पर निर्भर नहीं करते, इसलिए

$$x(t) = x_0 + v_{ox} t$$
$$y(t) = y_0 + v_{oy} t + (1/2)\, g\, t^2$$

यहां $x_0 = y_0 = 0$, $v_{oy} = 0$, $g = -9.8$ m s^{-2}, $v_{ox} = 15$ m s^{-1}

पत्थर उस समय जमीन से टकराता है जब $y(t) = -490$ m

$$\therefore\ -490 \text{ m} = -(1/2)(9.8)t^2$$

अर्थात् $t = 10$ s

वेग घटक $v_x = v_{ox}$ तथा $v_y = v_{oy} - g\,t$ होंगे।

अतः, जब पत्थर जमीन से टकराता है, तब

$$v_{ox} = 15 \text{ m s}^{-1}$$
$$v_{oy} = 0 - 9.8 \times 10 = -98 \text{ m s}^{-1}$$

इसलिए पत्थर की चाल

$= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{15^2 + 98^2} = 99.1\,\text{m s}^{-1}$ होगी। ◀

▶ **उदाहरण 4.10 :** क्षैतिज से ऊपर की ओर 30° का कोण बनाते हुए एक क्रिकेट गेंद 28 m s^{-1} की चाल से फेंकी जाती है। (a) अधिकतम ऊंचाई की गणना कीजिए, (b) उसी स्तर पर वापस पहुंचने में लगे समय की गणना कीजिए, तथा (c) फेंकने वाले बिंदु से उस बिंदु की दूरी जहां गेंद उसी स्तर पर पहुंची है, की गणना कीजिए।

हल (a) अधिकतम ऊंचाई

$$h_m = \frac{(v_0 \sin\theta_0)^2}{2g} = \frac{(28 \sin 30^0)^2}{2(9.8)} \text{ m}$$

$= 10.0$ m होगी।

(b) उसी धरातल पर वापस आने में लगा समय

$$= \frac{2v_0 \sin\theta_0}{g} = \frac{2 \times 28 \times \sin 30^0}{9.8} = 2.9\,\text{s}$$ होगा ।

(c) फेंकने वाले बिंदु से उस बिंदु की दूरी जहां गेंद उसी स्तर पर पहुंचती है :

$$= \frac{v_o^2 \sin 2\theta_0}{2} = \frac{28 \times 28 \times \sin 60^\circ}{9.8} = 69.3\,\text{m}$$ होगी । ◄

4.12 एकसमान वृत्तीय गति

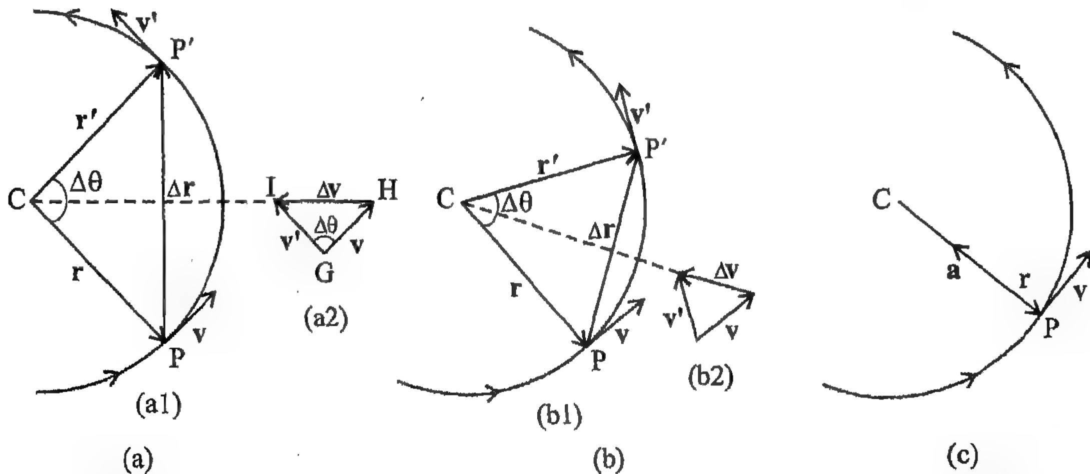
जब कोई वस्तु एकसमान चाल से एक वृत्ताकार पथ पर चलती है, तो वस्तु की गति को **एकसमान वृत्तीय गति** कहते हैं । शब्द "एकसमान" उस चाल के संदर्भ में प्रयुक्त हुआ है जो वस्तु की गति की अवधि में एकसमान (नियत) रहती है । माना कि चित्र 4.22 के अनुसार कोई वस्तु एकसमान चाल v से R त्रिज्या वाले वृत्त के अनुदिश गतिमान है । क्योंकि वस्तु के वेग की दिशा में निरन्तर परिवर्तन हो रहा है, अतः उसमें त्वरण उत्पन्न हो रहा है । हमें त्वरण का परिमाण तथा उसकी दिशा ज्ञात करनी है ।

माना $\mathbf{r}$ व $\mathbf{r}'$ तथा $\mathbf{v}$ व $\mathbf{v}'$ कण की स्थिति तथा गति सदिश हैं जब वह गति के दौरान क्रमशः बिंदुओं P व P' पर है (चित्र 4.22a) । परिभाषा के अनुसार, किसी बिंदु पर कण का वेग उस बिंदु पर स्पर्श रेखा के अनुदिश गति की दिशा में होता है । चित्र 4.22(a1) में वेग सदिशों $\mathbf{v}$ व $\mathbf{v}'$ को दिखाया गया है । चित्र 4.22(a2) में सदिश योग के त्रिभुज नियम का उपयोग करके $\Delta\mathbf{v}$ निकाल लेते हैं । क्योंकि पथ वृत्तीय है, इसलिए चित्र में, ज्यामिति से स्पष्ट है कि $\mathbf{v}, \mathbf{r}$ के तथा $\mathbf{v}', \mathbf{r}'$ के लंबवत् हैं । इसलिए, $\Delta\mathbf{v}, \Delta\mathbf{r}$ के लंबवत् होगा । पुनः क्योंकि औसत त्वरण के अनुदिश $\Delta\mathbf{v}\left(\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}\right)$ है, इसलिए $\bar{\mathbf{a}}$ भी $\Delta\mathbf{r}$ के लंबवत् होगा । अब यदि हम $\Delta\mathbf{v}$ को उस रेखा पर रखें जो $\mathbf{r}$ व $\mathbf{r}'$ के बीच के कोण को द्विभाजित करती है तो हम देखेंगे कि इसकी दिशा वृत्त के केंद्र की ओर होगी । इन्ही राशियों को चित्र 4.22(b) में छोटे समय अंतराल के लिए दिखाया गया है । $\Delta\mathbf{v}$, अतः $\bar{\mathbf{a}}$ की दिशा पुनः केंद्र की ओर होगी । चित्र (4.22c) में $\Delta t \to 0$ है, इसलिए औसत त्वरण, ताक्षणिक त्वरण के बराबर हो जाता है । इसकी दिशा केंद्र की ओर होती है* । इस प्रकार, यह निष्कर्ष निकलता है कि एकसमान वृत्तीय गति के लिए वस्तु के त्वरण की दिशा वृत्त के केंद्र की ओर होती है । अब हम इस त्वरण का परिमाण निकालेंगे ।

परिभाषा के अनुसार, $\mathbf{a}$ का परिमाण निम्नलिखित सूत्र से व्यक्त होता है,

$$|\mathbf{a}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\mathbf{v}|}{\Delta t}$$

मान लीजिए $\mathbf{r}$ व $\mathbf{r}'$ के बीच का कोण $\Delta\theta$ है । क्योंकि वेग सदिश $\mathbf{v}$ व $\mathbf{v}'$ सदैव स्थिति सदिशों के लंबवत् होते हैं, इसलिए उनके बीच का कोण भी $\Delta\theta$ होगा । अतएव स्थिति सदिशों द्वारा निर्मित त्रिभुज ($\Delta CPP'$) तथा वेग सदिशों $\mathbf{v}, \mathbf{v}'$ व $\Delta\mathbf{v}$ द्वारा निर्मित त्रिभुज समरूप हैं (चित्र 4.22a) । इस प्रकार एक त्रिभुज के आधार की लंबाई व किनारे की भुजा की लंबाई का अनुपात



चित्र 4.22 किसी वस्तु की एकसमान वृत्तीय गति के लिए वेग तथा त्वरण । चित्र (a) से (c) तक Δt घटता जाता है (चित्र c में शून्य हो जाता है) । वृत्ताकार पथ के प्रत्येक बिंदु पर त्वरण वृत्त के केंद्र की ओर होता है ।

*$\Delta t \to 0$ सीमा में $\Delta\mathbf{r}, \mathbf{r}$ के लंबवत् हो जाता है । इस सीमा में क्योंकि $\Delta\mathbf{v} \to 0$ होता है, फलस्वरूप यह भी $\mathbf{v}$ के लंबवत् होगा । अतः वृत्तीय पथ के प्रत्येक बिंदु पर त्वरण की दिशा केंद्र की ओर होती है ।

दूसरे त्रिभुज की तदनुरूप लंबाइयों के अनुपात के बराबर होगा, अर्थात्

$$\frac{|\Delta \mathbf{v}|}{v} = \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{R}$$

या $$|\Delta \mathbf{v}| = v\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{R}$$

इसलिए,

$$|\mathbf{a}| = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{|\Delta \mathbf{v}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{v|\Delta \mathbf{r}|}{R\Delta t}$$

$$= \frac{v}{R}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t}$$

यदि Δt छोटा है, तो $\Delta\theta$ भी छोटा होगा । ऐसी स्थिति में चाप PP′ को लगभग $|\Delta \mathbf{r}|$ के बराबर ले सकते हैं ।

अर्थात्, $|\Delta \mathbf{r}| \cong v\,\Delta t$

या $\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} \cong v$ अथवा $\lim_{\Delta t \to 0}\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} = v$

इस प्रकार, अभिकेंद्र त्वरण a_c का मान निम्नलिखित होगा,

$$a_c = \frac{v}{R}v = \frac{v^2}{R} \quad (4.57)$$

इस प्रकार किसी R त्रिज्या वाले वृत्तीय पथ के अनुदिश v चाल से गतिमान वस्तु के त्वरण का परिमाण v^2/R होता है जिसकी **दिशा सदैव वृत्त के केंद्र की ओर होती है** । इसी कारण इस प्रकार के त्वरण को **अभिकेंद्र त्वरण** कहते हैं (यह पद न्यूटन ने सुझाया था) । अभिकेंद्र त्वरण से संबंधित संपूर्ण विश्लेषणात्मक लेख सर्वप्रथम 1673 में एक डच वैज्ञानिक क्रिस्चियान हाइगेन्स (1629-1695) ने प्रकाशित करवाया था, किन्तु संभवतया न्यूटन को भी कुछ वर्षों पूर्व ही इसका ज्ञान हो चुका था । अभिकेंद्र को अंग्रेजी में सेंट्रीपीटल कहते हैं जो एक ग्रीक शब्द है जिसका अभिप्राय केंद्र-अभिमुख (केंद्र की ओर) है । क्योंकि v तथा R दोनों अचर हैं इसलिए अभिकेंद्र त्वरण का परिमाण भी अचर होता है । परंतु दिशा बदलती रहती है और सदैव केंद्र की ओर होती है । इस प्रकार निष्कर्ष निकलता है कि अभिकेंद्र त्वरण एकसमान सदिश नहीं होता है ।

किसी वस्तु के एकसमान वृत्तीय गति के वेग तथा त्वरण को हम एक दूसरे प्रकार से भी समझ सकते हैं । चित्र 4.22 में दिखाए गए अनुसार $\Delta t\,(=t'-t)$ समय अंतराल में जब कण P से P′ पर पहुंच जाता है तो रेखा CP कोण $\Delta\theta$ से घूम जाती है । $\Delta\theta$ को हम कोणीय दूरी कहते हैं । कोणीय वेग ω (ग्रीक अक्षर 'ओमेगा') को हम कोणीय दूरी के समय परिवर्तन की दर के रूप में परिभाषित करते हैं । इस प्रकार,

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (4.58)$$

अब यदि Δt समय में कण द्वारा चली दूरी को Δs से व्यक्त करें (अर्थात् PP′=Δs) तो,

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

किन्तु $\Delta s = R\Delta\theta$, इसलिए $v = R\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = R\omega$

अत: $v = \omega R$ (4.59)

अभिकेंद्र त्वरण को हम कोणीय चाल के रूप में भी व्यक्त कर सकते हैं । अर्थात्,

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R$$

या $a_c = \omega^2 R$ (4.59)

वृत्त का एक चक्कर लगाने में वस्तु को जो समय लगता है उसे हम आवर्तकाल T कहते हैं । एक सेकंड में वस्तु जितने चक्कर लगाता है, उसे हम वस्तु की आवृत्ति ν कहते हैं । परंतु इतने समय में वस्तु द्वारा चली गई दूरी $s = 2\pi R$ होती है, इसलिए

$$v = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi R\nu \quad (4.61)$$

इस प्रकार ω, v तथा a_c को हम आवृत्ति ν के पद में व्यक्त कर सकते हैं, अर्थात्

$\omega = 2\pi\nu$

$v = 2\pi\nu R$

$a_c = 4\pi^2\nu^2 R$ (4.62)

उदाहरण 4.11 : कोई कीड़ा एक वृत्तीय खाँचे में जिसकी त्रिज्या 12cm है, फँस गया है । वह खाँचे के अनुदिश स्थिर चाल से चलता है और 100 सेकंड में 7 चक्कर लगा लेता है । (a) कीड़े की कोणीय चाल व रैखिक चाल कितनी होगी ? (b) क्या त्वरण सदिश एक अचर सदिश है । इसका परिमाण कितना होगा ?

हल यह एकसमान वृत्तीय गति का एक उदाहरण है । यहां R = 12 cm है । कोणीय चाल ω का मान

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi \times 7}{100} = 0.44 \text{ rad s}^{-1}$$

है तथा रैखिक चाल v का मान

$$v = \omega\ R = 0.44 \times 12 \text{ cm} = 5.3 \text{ cm s}^{-1}$$

होगा । वृत्त के हर बिंदु पर वेग v की दिशा उस बिंदु पर स्पर्श रेखा के अनुदिश होगी तथा त्वरण की दिशा वृत्त के केंद्र की ओर होगी । क्योंकि यह दिशा लगातार बदलती रहती है, इसलिए त्वरण एक अचर सदिश नहीं है । परंतु त्वरण का परिमाण अचर है, जिसका मान

$a = \omega^2 R = (0.44 \text{ s}^{-1})^2\,(12 \text{ cm}) = 2.3 \text{ cm s}^{-2}$ होगा । ◄

सारांश

1. *अदिश राशियां* वे राशियां हैं जिनमें केवल परिमाण होता है । दूरी, चाल, संहति (द्रव्यमान) तथा ताप अदिश राशियों के कुछ उदाहरण हैं ।
2. *सदिश राशियां* वे राशियां हैं जिनमें परिमाण तथा दिशा दोनों होते हैं । विस्थापन, वेग तथा त्वरण आदि इस प्रकार की राशि के कुछ उदाहरण हैं । ये राशियां सदिश बीजगणित के विशिष्ट नियमों का पालन करती हैं ।
3. यदि किसी सदिश **A** को किसी वास्तविक संख्या λ से गुणा करें तो हमें एक दूसरा सदिश **B** प्राप्त होता है जिसका परिमाण **A** के परिमाण का λ गुना होता है । नए सदिश की दिशा या तो **A** के अनुदिश होती है या इसके विपरीत । दिशा इस बात पर निर्भर करती है कि λ धनात्मक है या ऋणात्मक ।
4. दो सदिशों **A** व **B** को जोड़ने के लिए या तो *शीर्ष व पुच्छ* की ग्राफी विधि का या *समान्तर चतुर्भुज विधि* का उपयोग करते हैं ।
5. सदिश योग *क्रम-विनिमेय* नियम का पालन करता है–
$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$$
साथ ही यह *साहचर्य के नियम* का भी पालन करता है अर्थात् $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$
6. *शून्य सदिश* एक ऐसा सदिश होता है जिसका परिमाण शून्य होता है । क्योंकि परिमाण शून्य होता है इसलिए इसके साथ दिशा बतलाना आवश्यक नहीं है ।
इसके निम्नलिखित गुण होते हैं :
$$\mathbf{A}+\mathbf{O}=\mathbf{A}$$
$$\lambda\mathbf{O}=\mathbf{O}$$
$$\mathbf{O}\mathbf{A}=\mathbf{O}$$
7. सदिश **B** को **A** से घटाने की क्रिया को हम **A** व **–B** को जोड़ने के रूप में परिभाषित करते हैं–
$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}+(-\mathbf{B})$$
8. किसी सदिश **A** को उसी समतल में स्थित दो सदिशों **a** तथा **b** के अनुदिश दो घटक सदिशों में वियोजित कर सकते हैं :
$$\mathbf{A}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}$$
यहां λ व μ वास्तविक संख्याएं हैं ।
9. किसी सदिश **A** से संबंधित *एकांक सदिश* वह सदिश है जिसका परिमाण एक होता है और जिसकी दिशा सदिश **A** के अनुदिश होती है । एकांक सदिश $\hat{\mathbf{n}}=\dfrac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$
एकांक सदिश $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ इकाई परिमाण वाले वे सदिश हैं जिनकी दिशायें दक्षिणावर्ती निकाय की अक्षों क्रमशः *x*-, *y*- व *z*- के अनुदिश होती हैं ।
10. दो विमा के लिए सदिश **A** को हम निम्न प्रकार से व्यक्त करते हैं–
$$\mathbf{A}=A_x\hat{\mathbf{i}}+A_y\hat{\mathbf{j}}$$
यहां A_x तथा A_y क्रमशः *x*-, *y*-अक्षों के अनुदिश **A** के घटक हैं । यदि सदिश **A**, *x*-अक्ष के साथ θ कोण बनाता है, तो $A_x=A\cos\theta, A_y=A\sin\theta$ तथा
$$A=|\mathbf{A}|=\sqrt{A_x^2+A_y^2},\quad \tan\theta=\frac{A_y}{A_x}$$
11. *विश्लेषणात्मक विधि* से भी सदिशों को आसानी से जोड़ा जा सकता है । यदि *x-y* समतल में दो सदिशों **A** व **B** का योग **R** हो, तो
$$\mathbf{R}=R_x\hat{\mathbf{i}}+R_y\hat{\mathbf{j}} \quad \text{जहां } R_x=A_x+B_x \text{ तथा } R_y=A_y+B_y$$
12. दो सदिशों के *अदिश* अथवा *बिंदु गुणनफल* को हम **A.B** लिखते हैं (इसे **A** डॉट **B** के रूप में पढ़ते हैं) । **A.B** एक अदिश राशि है जिसका मान $\mathbf{A.B}=AB\cos\theta$ होता है । θ सदिशों **A** व **B** के बीच का कोण है । **A.B** का मान चूंकि θ पर निर्भर करता है, इसलिए यह धनात्मक, ऋणात्मक अथवा शून्य हो सकता है । दो सदिशों के अदिश गुणनफल की व्याख्या एक सदिश के परिमाण तथा दूसरे सदिश के पहले घटक के अनुदिश घटक के गुणनफल के रूप में भी कर सकते हैं । एकांक सदिशों $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ व $\hat{\mathbf{k}}$ के लिए हमें निम्नलिखित तथ्य याद रखने चाहिए :
$$\hat{\mathbf{i}}.\hat{\mathbf{i}}=\hat{\mathbf{j}}.\hat{\mathbf{j}}=\hat{\mathbf{k}}.\hat{\mathbf{k}}=1; \qquad \hat{\mathbf{i}}.\hat{\mathbf{j}}=\hat{\mathbf{j}}.\hat{\mathbf{k}}=\hat{\mathbf{k}}.\hat{\mathbf{i}}=0$$
अदिश गुणनफल क्रम-विनिमेय तथा वितरण नियमों का पालन करते हैं ।
13. दो सदिशों **A** व **B** के सदिश गुणनफल या क्रास गुणन को हम $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ के रूप में लिखते हैं (इसे **A** क्रास **B** के रूप में पढ़ते हैं) तथा इस गुणनफल को हम एक नए सदिश **V** के पद में व्यक्त करते हैं जिसका परिमाण $AB\sin\theta$ होता है ।

इसकी दिशा दक्षिणहस्त नियम द्वारा व्यक्त की जाती है । क्रास गुणनफल में क्रम-विनिमेय नियम का पालन नहीं होता है अर्थात्

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

परन्तु यह वितरण नियम का पालन करता है-

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\mathbf{C}$$

यदि $\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}$

तो, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{V} = V_x\hat{\mathbf{i}} + V_y\hat{\mathbf{j}} + V_z\hat{\mathbf{k}}$

जहां

$$V_x = A_y B_z - A_z B_y$$
$$V_y = A_z B_x - A_x B_z$$
$$V_z = A_x B_y - A_y B_x$$

पुनः,

$$\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{k}} = 0$$
$$\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{i}}$$
$$\hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{j}}$$
$$\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{k}}$$

14. समतल में किसी वस्तु की स्थिति सदिश **r** को प्रायः निम्न प्रकार से व्यक्त करते हैं :

$$\mathbf{r} = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$$

स्थिति सदिशों **r** व **r′** के बीच के विस्थापन को निम्न प्रकार से लिखते हैं :

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$$
$$= (x' - x)\hat{\mathbf{i}} + (y' - y)\hat{\mathbf{j}}$$
$$= \Delta x\,\hat{\mathbf{i}} + \Delta y\,\hat{\mathbf{j}}$$

15. यदि कोई वस्तु समय अंतराल Δt में $\Delta\mathbf{r}$ से विस्थापित होती है तो उसका औसत वेग $\overline{\mathbf{v}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$ होगा । किसी क्षण t पर वस्तु का वेग उसके औसत वेग के सीमान्त मान के बराबर होता है जब Δt शून्य के सन्निकट हो जाता है । अर्थात्

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

इसे एकांक सदिशों के रूप में भी व्यक्त करते हैं :

$$\mathbf{v} = v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}} + v_z\hat{\mathbf{k}}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt},\ v_y = \frac{dy}{dt},\ v_z = \frac{dz}{dt}$$

जब किसी निर्देशांक निकाय में कण की स्थिति को दर्शाते हैं, तो **v** की दिशा कण के पथ के वक्र की उस बिंदु पर खींची गई स्पर्श रेखा के अनुदिश होती है ।

16. यदि वस्तु का वेग Δt समय अंतराल में **v** से **v′** में बदल जाता है, तो उसका औसत त्वरण $\overline{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{v}' - \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}$ होगा । जब Δt का सीमान्त मान शून्य हो जाता है तो किसी क्षण t पर वस्तु का त्वरण $\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ होगा।

घटक के पदों में इसे निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है :

$$\mathbf{a} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}$$

यहां,

$$a_x = \frac{dv_x}{dt},\ a_y = \frac{dv_y}{dt},\ a_z = \frac{dv_z}{dt}$$

17. यदि एक वस्तु किसी समतल में एकसमान त्वरण $a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ से गतिमान है तथा क्षण t=0 पर उसका स्थिति सदिश $\mathbf{r}_0$ है, तो किसी अन्य क्षण t पर उसका स्थिति सदिश $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$ होगा तथा उसका वेग $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}\, t$ होगा ।

यहां $\mathbf{v}_0$, $t = 0$ क्षण पर वस्तु के वेग को व्यक्त करता है ।

घटक के रूप में

$$x = x_0 + v_{0x}\, t + \frac{1}{2} a_x\, t^2$$

$$y = y_0 + v_{0y}\, t + \frac{1}{2} a_y\, t^2$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t$$

किसी समतल में एकसमान त्वरण की गति को दो अलग-अलग समकालिक एकविमीय व परस्पर लंबवत् गतियों के अध्यारोपण के रूप में मान सकते हैं ।

18. प्रक्षेपित होने के उपरांत जब कोई वस्तु उड़ान में होती है तो उसे *प्रक्षेप्य* कहते हैं । यदि x–अक्ष से θ_0 कोण पर वस्तु का प्रारंभिक वेग v_0 है तो t क्षण के उपरांत प्रक्षेप्य के स्थिति एवं वेग संबंधी समीकरण निम्नवत् होंगे-

$$x = (v_0 \cos\theta_0)\, t$$

$$y = (v_0 \sin\theta_0)\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$$

$$v_y = v_0 \sin\theta_0 - gt$$

प्रक्षेप्य का पथ परवलयिक होता है जिसका समीकरण

$$y = (\tan\theta_0)x - \frac{g x^2}{2(v_0 \cos\theta_0)^2}$$ होगा ।

प्रेक्षप्य की अधिकतम ऊँचाई $h_m = \frac{(v_0 \sin\theta_0)^2}{2g}$, तथा

इस ऊँचाई तक पहुंचने में लगा समय $t_m = \frac{v_0 \sin\theta_0}{g}$ होगा ।

प्रेक्षेप्य द्वारा अपनी प्रारंभिक स्थिति से उस स्थिति तक, जिसके लिए नीचे उतरते समय $y = 0$ हो, चली गई क्षैतिज दूरी को प्रक्षेप्य का परास R कहते हैं ।

अत: प्रक्षेप्य का परास $R = \frac{v^2{}_0}{g} \sin 2\theta_0$ होगा ।

19. जब कोई वस्तु एकसमान चाल से एक वृत्तीय मार्ग में चलती है तो इसे *एकसमान वृत्तीय गति* कहते हैं । यदि वस्तु की चाल v हो तथा इसकी त्रिज्या R हो, तो अभिकेंद्र त्वरण, $a_c = v^2/R$ होगा तथा इसकी दिशा सदैव वृत्त के केंद्र की ओर होगी । कोणीय चाल ω कोणीय दूरी के समान परिवर्तन की दर होता है । रैखिक वेग $v = \omega R$ होगा तथा त्वरण $a_c = \omega^2 R$ होगा ।

यदि वस्तु का आवर्तकाल T तथा आवृत्ति ν हो, तो ω, v तथा a_c के मान निम्नवत् होंगे ।

$\omega = 2\pi\nu$, $v = 2\pi\nu R$, $a_c = 4\pi^2\nu^2 R$

भौतिक राशि	प्रतीक	विमा	मात्रक	टिप्पणी
स्थिति सदिश	r	[L]	m	सदिश । किसी अन्य चिह्न से भी इसे व्यक्त कर सकते हैं
विस्थापन	Δr	[L]	m	"
वेग		$[LT^{-1}]$	m s^{-1}	
(a) औसत	$\bar{v}$			$= \Delta\mathbf{r}/\Delta t$, सदिश
(b) तात्क्षणिक	v			$= d\mathbf{v}/dt$, सदिश
त्वरण		$[LT^{-2}]$	m s^{-2}	
(a) औसत	$\bar{a}$			$= \Delta\mathbf{v}/\Delta t$, सदिश
(b) तात्क्षणिक	a			$= d\mathbf{v}/dt$, सदिश
प्रक्षेप्य गति				
(a) अधिकतम ऊंचाई में लगा समय	t_m	[T]	s	$= \frac{v_0 \sin\theta_0}{g}$
(b) अधिकतम ऊंचाई	h_m	[L]	m	$= \frac{(v_0 \sin\theta_0)^2}{2g}$
(c) क्षैतिज परास	R	[L]	m	$= \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$
वृत्तीय गति				
(a) कोणीय चाल	ω	$[T^{-1}]$	rad/s	$= \Delta\theta/\Delta t = v/R$
(b) अभिकेंद्र त्वरण	a_c	$[LT^{-2}]$	m s^{-2}	$= v^2/R$

विचारणीय विषय

1. किसी वस्तु द्वारा दो बिंदुओं के बीच की पथ-लंबाई सामान्यतया, विस्थापन के परिमाण के बराबर नहीं होती । विस्थापन केवल पथ के अंतिम बिंदुओं पर निर्भर करता है जबकि पथ-लंबाई (जैसाकि नाम से ही स्पष्ट है) वास्तविक पथ पर निर्भर करती है । दोनों राशियां तभी बराबर होंगी जब वस्तु गति मार्ग में अपनी दिशा नहीं बदलती । अन्य दूसरी परिस्थितियों में पथ-लंबाई विस्थापन के परिमाण से अधिक होती है ।

2. उपरोक्त बिंदु 1 की दृष्टि से वस्तु की औसत चाल किसी दिए समय अंतराल में या तो उसके औसत वेग के परिमाण के बराबर होगी या उससे अधिक होगी । दोनों बराबर तब होंगी जब पथ-लंबाई विस्थान के परिमाण के बराबर हो ।

3. सदिश समीकरण (4.46a) तथा (4.47a एवं c) अक्षों के चुनाव पर निर्भर नहीं करते हैं । निःसंदेह आप उन्हें दो स्वतंत्र अक्षों के अनुदिश वियोजित कर सकते हैं ।

4. सदिश गुणनफल की दिशा निकालने के लिए आपको दाएं हाथ के नियम का उपयोग करना चाहिए जिसमें पहले सदिश को दूसरे सदिश की दिशा में दोनों के बीच के न्यून कोण की ओर से घुमाया जाता है ।

5. एकसमान त्वरण के लिए शुद्धगतिकी के समीकरण एकसमान वृत्तीय गति में लागू नहीं होते क्योंकि इसमें त्वरण का परिमाण तो स्थिर रहता है परंतु उसकी दिशा निरंतर बदलती रहती है ।

6. यदि किसी वस्तु के दो वेग $\mathbf{v}_1$ तथा $\mathbf{v}_2$ हों तो उनका परिणामी वेग $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ होगा । उपरोक्त सूत्र तथा वस्तु 2 के सापेक्ष वस्तु का 1 के वेग अर्थात्: $\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ के बीच भेद को भलीभांति जानिए । यहां $\mathbf{v}_1$ तथा $\mathbf{v}_2$ किसी अभयनिष्ठ निर्देश तन्त्र के सापेक्ष वस्तु की गतियां हैं ।

7. वृत्तीय गति में किसी कण का परिणामी त्वरण वृत्त के केंद्र की ओर होता है यदि उसकी चाल एकसमान है ।
8. किसी वस्तु की गति के मार्ग की आकृति केवल त्वरण से ही निर्धारित नहीं होती बल्कि वह गति की प्रारंभिक दशाओं (प्रारंभिक स्थिति व प्रारंभिक वेग) पर भी निर्भर करती है । उदाहरणस्वरूप, एक ही गुरुत्वीय त्वरण से गतिमान किसी वस्तु का मार्ग एक सरल रेखा भी हो सकता है या कोई परवलय भी । ऐसा प्रारंभिक दशाओं पर निर्भर करेगा ।

अभ्यास

4.1 निम्नलिखित भौतिक राशियों में से बतलाइए कि कौन-सी सदिश है और कौन-सी अदिश :

आयतन, द्रव्यमान, चाल, त्वरण, घनत्व, मोल संख्या, वेग, कोणीय आवृत्ति, विस्थापन, कोणीय वेग ।

4.2 निम्नांकित सूची में से दो अदिश राशियों को छांटिए-

बल, कोणीय संवेग, कार्य, धारा, रैखिक संवेग, विद्युत् क्षेत्र, औसत वेग, चुंबकीय आघूर्ण, न्यूटन के तृतीय नियम के अनुसार प्रतिक्रिया, आपेक्षिक वेग ।

4.3 निम्नलिखित सूची में से एकमात्र सदिश राशि को छांटिए-

ताप, दाब, आवेग, समय, शक्ति, पूरी पथ-लंबाई, ऊर्जा, गुरुत्वीय विभव, घर्षण गुणांक, आवेश ।

4.4 कारण सहित बताइए कि अदिश तथा सदिश राशियों के साथ क्या निम्नलिखित बीजगणितीय संक्रियाएं अर्थपूर्ण हैं ?

(a) दो अदिशों को जोड़ना, (b) एक ही विमाओं के एक सदिश व एक अदिश को जोड़ना, (c) एक सदिश को एक अदिश से गुणा करना, (d) दो अदिशों का गुणन, (e) दो सदिशों को जोड़ना, (f) एक सदिश के घटक को उसी सदिश से जोड़ना।

4.5 निम्नलिखित में से प्रत्येक कथन को ध्यानपूर्वक पढ़िए और कारण सहित बताइए कि यह सत्य है या असत्य :

(a) किसी सदिश का परिमाण सदैव एक अदिश होता है, (b) किसी सदिश का प्रत्येक घटक सदैव अदिश होता है, (c) किसी कण द्वारा चली गई पथ की कुल लंबाई सदैव विस्थापन सदिश के परिमाण के बराबर होती है, (d) किसी कण की औसत चाल (पथ तय करने में लगे समय द्वारा विभाजित कुल पथ-लंबाई) समय के समान-अंतराल में कण के औसत वेग के परिमाण से अधिक या उसके बराबर होती है । (e) उन तीन सदिशों का योग जो एक समतल में नहीं हैं, कभी भी शून्य सदिश नहीं होता ।

4.6 निम्नलिखित असमिकाओं की ज्यामिति या किसी अन्य विधि द्वारा स्थापना कीजिए :

(i) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$

(ii) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \ge ||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}||$

(iii) $|\mathbf{a}-\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$

(iv) $|\mathbf{a}-\mathbf{b}| \ge ||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}||$

इनमें समिका (समता) का चिह्न कब लागू होता है ?

4.7 दिया है $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$, नीचे दिए गए कथनों में से कौन-सा सही है :

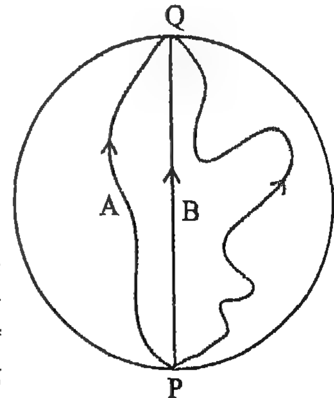
(i) **a, b, c** तथा **d** में से प्रत्येक शून्य सदिश है,

(ii) $(\mathbf{a} + \mathbf{c})$ का परिमाण $(\mathbf{b} + \mathbf{d})$ के परिमाण के बराबर है,

(iii) **a** का परिमाण **b, c** तथा **d** के परिमाणों के योग से कभी भी अधिक नहीं हो सकता,

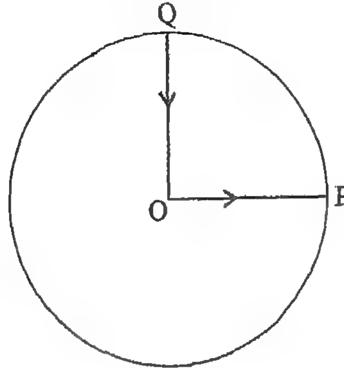
(iv) यदि **a** तथा **d** संरेखीय नहीं हैं तो $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ अवश्य ही **a** तथा **d** के समतल में होगा, और यह **a** तथा **d** के अनुदिश होगा यदि वे संरेखीय हैं ।

4.8 तीन लड़कियां 200 m त्रिज्या वाली वृत्तीय बर्फीली सतह पर स्केटिंग कर रही हैं । वे सतह के किनारे के बिंदु P से चलना शुरू करती हैं तथा P के व्यासीय विपरीत बिंदु Q पर विभिन्न पथों से होकर पहुंचती हैं जैसा कि चित्र (4.23) में दिखाया गया है । प्रत्येक लड़की के विस्थापन सदिश का परिमाण कितना है ? किस लड़की के लिए यह वास्तव में स्केट किए गए पथ की लंबाई के बराबर है ।



चित्र 4.23

4.9 कोई साइकिल सवार किसी वृत्तीय पार्क के केंद्र O से चलना शुरू करता है तथा पार्क के किनारे P पर पहुंचता है। पुन: वह पार्क की परिधि के अनुदिश साइकिल चलाता हुआ QO के रास्ते (जैसा चित्र (4.24) में दिखाया गया है) केंद्र पर वापस आ जाता है। पार्क की त्रिज्या 1 km है। यदि पूरे चक्कर में 10 मिनट लगते हों तो साइकिल सवार का (a) कुल विस्थापन, (b) औसत वेग, तथा (c) औसत चाल क्या होगी ?



चित्र 4.24

4.10 किसी खुले मैदान में कोई मोटर चालक एक ऐसा रास्ता अपनाता है जो प्रत्येक 500 m के बाद उसके बाईं ओर 60° के कोण पर मुड़ जाता है। किसी दिए मोड़ से शुरू होकर मोटर चालक का तीसरे, छठे व आठवें मोड़ पर विस्थापन बताइए। प्रत्येक स्थिति में मोटर चालक द्वारा इन मोड़ों पर तय की गई कुल पथ-लंबाई के साथ विस्थापन के परिमाण की तुलना कीजिए।

4.11 कोई यात्री किसी नए शहर में आया है और वह स्टेशन से किसी सीधी सड़क पर स्थित किसी होटल तक जो 10 km दूर है, जाना चाहता है। कोई बेईमान टैक्सी चालक 23 km के चक्करदार रास्ते से उसे ले जाता है और 28 मिनट में होटल में पहुंचता है।

(a) टैक्सी की औसत चाल, और (b) औसत वेग का परिमाण क्या होगा ? क्या वे बराबर हैं ?

4.12 वर्षा का पानी 30 $m\,s^{-1}$ की चाल से ऊर्ध्वाधर नीचे गिर रहा है। कोई महिला उत्तर से दक्षिण की ओर 10 $m\,s^{-1}$ की चाल से साइकिल चला रही है। उसे अपना छाता किस दिशा में रखना चाहिए।

4.13 कोई व्यक्ति स्थिर पानी में 4 km/h की चाल से तैर सकता है। उसे 1 km चौड़ी नदी को पार करने में कितने समय लगेगा यदि नदी 3 km/h की स्थिर चाल से बह रही हो और वह नदी के बहाव के लंब तैर रहा हो। जब वह नदी के दूसरे किनारे पहुंचता है तो वह नदी के बहाव की ओर कितनी दूर पहुंचेगा ?

4.14 किसी बंदरगाह में 72 km/h की चाल से हवा चल रही है और बंदरगाह में खड़ी किसी नौका के ऊपर लगा झंडा N-E दिशा में लहरा रहा है। यदि वह नौका उत्तर की ओर 51 km/h चाल से गति करना प्रारंभ कर दे तो नौका पर लगा झंडा किस दिशा में लहराएगा ?

4.15 किसी लंबे हाल की छत 25 m ऊंची है। वह अधिकतम क्षैतिज दूरी कितनी होगी जिसमें 40 $m\,s^{-1}$ की चाल से फेंकी गई कोई गेंद छत से टकराए बिना गुजर जाए ?

4.16 क्रिकेट का कोई खिलाड़ी किसी गेंद को 100 m की अधिकतम क्षैतिज दूरी तक फेंक सकता है। वह खिलाड़ी उसी गेंद को जमीन से ऊपर कितनी ऊंचाई तक फेंक सकता है ?

4.17 80 cm लंबे धागे के एक सिरे पर एक पत्थर बाँधा गया है और इसे किसी एकसमान चाल के साथ किसी क्षैतिज वृत्त में घुमाया जाता है। यदि पत्थर 25 s में 14 चक्कर लगाता है तो पत्थर के त्वरण का परिमाण और उसकी दिशा क्या होगी ?

4.18 कोई वायुयान 900 $km\,h^{-1}$ की एकसमान चाल से उड़ रहा है और 1 km त्रिज्या का कोई क्षैतिज लूप बनाता है। इसके अभिकेंद्र त्वरण की गुरुत्वीय त्वरण के साथ तुलना कीजिए।

4.19 नीचे दिए गए कथनों को ध्यानपूर्वक पढ़िए और कारण देकर बताइए कि वे सत्य हैं या असत्य :

(a) वृत्तीय गति में किसी कण का नेट त्वरण हमेशा वृत्त की त्रिज्या के अनुदिश केंद्र की ओर होता है।

(b) किस बिंदु पर किसी कण का वेग सदिश सदैव उस बिंदु पर कण के पथ की स्पर्श रेखा के अनुदिश होता है।

(c) किसी कण का एकसमान वृत्तीय गति में एक चक्र में लिया गया औसत त्वरण सदिश एक शून्य सदिश होता है।

4.20 किसी कण की स्थिति सदिश निम्नलिखित है :

$\mathbf{r} = (3.0t\,\hat{\mathbf{i}} - 2.0t^2\hat{\mathbf{j}} + 4.0\hat{\mathbf{k}})\text{m}$

समय t सेकंड में है तथा सभी गुणकों के मात्रक इस प्रकार से हैं कि **r** में मीटर में व्यक्त हो जाए ।

(a) कण का **v** तथा **a** निकालिए,

(b) $t = 2$ s पर कण के वेग का परिमाण तथा दिशा कितनी होगी ?

4.21 कोई कण $t = 0$ क्षण पर मूल बिंदु से $10\hat{\mathbf{j}}\,\text{m s}^{-1}$ के वेग से चलना प्रारंभ करता है तथा x-y समतल में एकसमान त्वरण $(8.0\,\hat{\mathbf{i}} + 2.0\,\hat{\mathbf{j}})\,\text{m s}^{-2}$ से गति करता है ।

(a) किस क्षण कण का x-निर्देशांक 16 m होगा ? इसी समय इसका y-निर्देशांक कितना होगा ?

(b) इस क्षण कण की चाल कितनी होगी ?

4.22 $\hat{\mathbf{i}}$ व $\hat{\mathbf{j}}$ क्रमशः x- व y-अक्षों के अनुदिश एकांक सदिश हैं । सदिशों $\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}$ तथा $\hat{\mathbf{i}}-\hat{\mathbf{j}}$ का परिमाण कितना होगा ? सदिश $\mathbf{A} = 2\,\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$ के $\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}$ व $\hat{\mathbf{i}}-\hat{\mathbf{j}}$ के दिशाओं के अनुदिश घटक निकालिए ।

4.23 किसी दिक्स्थान पर एक स्वेच्छ गति के लिए निम्नलिखित संबंधों में से कौन-सा सत्य है ?

(i) $\mathbf{v}_{\text{औसत}} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{v}(t_1) + \mathbf{v}(t_2)\right]$

(ii) $\mathbf{v}_{\text{औसत}} = \left[\{\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)\}/(t_2 - t_1)\right]$

(iii) $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) + \mathbf{a}\,t$

(iv) $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + v(0)t + \frac{1}{2}\mathbf{a}\,t^2$

(v) $\mathbf{a}_{\text{औसत}} = \left[\frac{\{\mathbf{v}(t_2) - \mathbf{v}(t_1)\}}{(t_2 - t_1)}\right]$

यहां 'औसत' का आशय समय अंतराल t_2 व t_1 से संबंधित भौतिक राशि के औसत मान से है ।

4.24 निम्नलिखित से कौन-कौन भौतिक राशियां निर्देशांक अक्षों के अभिविन्यास पर निर्भर नहीं करतीं :
$\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $3a_x + 2b_y$, $|\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}|$, **b** व **c** के बीच का कोण, $\lambda\mathbf{a}$ जहां λ एक अदिश है ?

4.25 निम्नलिखित में से प्रत्येक कथन को ध्यानपूर्वक पढ़िए तथा कारण एवं उदाहरण सहित बताइए कि क्या यह सत्य है या असत्य :

अदिश वह राशि है जो

(a) किसी प्रक्रिया में संरक्षित रहती है,

(b) कभी ऋणात्मक नहीं होती,

(c) विमाहीन होती है,

(d) किसी स्थान पर एक बिंदु से दूसरे बिंदु के बीच नहीं बदलती,

(e) उन सभी दर्शकों के लिए एक ही मान रखती है चाहे अक्षों से उनके अभिविन्यास भिन्न-भिन्न क्यों न हों ।

4.26 कोई वायुयान पृथ्वी से 3400 m की ऊंचाई पर उड़ रहा है । यदि पृथ्वी पर किसी अवलोकन बिंदु पर वायुयान की 10 s की दूरी की स्थितियां 30° का कोण बनाती हैं तो वायुमान की चाल क्या होगी ?

अतिरिक्त अभ्यास

4.27 किसी सदिश में परिमाण व दिशा दोनों होते हैं । क्या दिक्स्थान में इसकी कोई स्थिति होती है ? क्या यह समय के साथ परिवर्तित हो सकता है । क्या दिक्स्थान में भिन्न स्थानों पर दो बराबर सदिशों **a** व **b** का समान भौतिक प्रभाव अवश्य पड़ेगा ? अपने उत्तर के समर्थन में उदाहरण दीजिए ।

4.28 किसी सदिश में परिणाम व दिशा दोनों होते हैं । क्या इसका यह अर्थ है कि कोई राशि जिसका परिमाण व दिशा हो, वह अवश्य ही सदिश होगी ? किसी वस्तु के घूर्णन की व्याख्या घूर्णन-अक्ष की दिशा और अक्ष के परितः घूर्णन-कोण द्वारा की जा सकती है । क्या इसका यह अर्थ है कि कोई भी घूर्णन एक सदिश है ?

4.29 क्या आप निम्नलिखित के साथ कोई सदिश संबद्ध कर सकते हैं : (a) किसी लूप में मोड़ी गई तार की लंबाई, (b) किसी समतल क्षेत्र, (c) किसी गोले के साथ ? व्याख्या कीजिए ।

4.30 कोई गोली क्षैतिज से 30° के कोण पर दागी गई है और वह धरातल पर 3 km दूर गिरती है । इसके प्रक्षेप्य के कोण का समायोजन करके क्या 5 km दूर स्थित किसी लक्ष्य का भेद किया जा सकता है ? गोली की नालमुख चाल को नियत तथा वायु के प्रतिरोध को नगण्य मानिए ।

4.31 किसी 100 m ऊंची मीनार पर एक मशीनगन लगाई गई है । मशीनगन की नाल को किस कोण पर रखा जाए ताकि यह भूमि तल पर अधिकतम परास प्राप्त कर सके ? गोली की नालमुख चाल 150 $m\ s^{-1}$ है । [$g = 10\ m\ s^{-2}$]

4.32 कोई लड़ाकू जहाज 1.5 km की ऊंचाई पर 720 km/h की चाल से क्षैतिज दिशा में उड़ रहा है और किसी वायुयान भेदी तोप के ठीक ऊपर से गुजरता है । ऊर्ध्वाधर से तोप की नाल का क्या कोण हो जिससे 600 $m\ s^{-1}$ की चाल से दागा गया गोला वायुमान पर वार कर सके। वायुयान के चालक को किस न्यूनतम ऊंचाई पर जहाज को उड़ाना चाहिए जिससे गोला लगने से बच सके । [$g = 10\ m\ s^{-2}$]

4.33 एक साइकिल सवार 27 km/h की चाल से साइकिल चला रहा है । जैसे ही सड़क पर वह 80 m त्रिज्या के वृत्तीय मोड़ पर पहुंचता है, वह ब्रेक लगाता है और अपनी चाल को 0.5 m/s की एकसमान दर से कम कर लेता है । वृत्तीय मोड़ पर साइकिल सवार के नेट त्वरण का परिमाण और उसकी दिशा निकालिए ।

4.34 (a) सिद्ध कीजिए कि किसी प्रक्षेप्य के x-अक्ष तथा उसके वेग के बीच के कोण को समय के फलन के रूप में निम्न प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं

$$\theta(t) = \tan^{-1}\frac{v_{oy} - gt}{v_{ox}}$$

(b) सिद्ध कीजिए कि मूल बिंदु से फेंके गए प्रक्षेप्य कोण का मान $\theta_o = \tan^{-1}\left(\frac{4h_m}{R}\right)$ होगा । यहां प्रयुक्त प्रतीकों के अर्थ सामान्य हैं ।

अध्याय 5

गति के नियम

5.1 भूमिका

पिछले अध्याय में हमारा संबंध "दिक्स्थान में किसी कण की गति का मात्रात्मक वर्णन करने से था ।" हमने देखा कि एकसमान गति में मात्र वेग की संकल्पना की आवश्यकता थी । असमान गति में त्वरण की अतिरिक्त अवधारणा की आवश्यकता पड़ी । अब तक हमने यह प्रश्न नहीं पूछा है कि पिण्डों की गति का क्या कारण है ? इस अध्याय में हम अपना ध्यान भौतिकी के इस मूल प्रश्न पर केंद्रित करेंगे ।

आइए, सबसे पहले हम अपने सामान्य अनुभवों के आधार पर इस प्रश्न के उत्तर का अनुमान लगाएं । खेल के मैदान में विरामावस्था में पड़ी फुटबाल को गति प्रदान करने के लिए किसी न किसी को उस पर अवश्य ठोकर मारनी होती है । हमारी हथेली पर रखे किसी पत्थर को ऊपर की ओर फेंकने के लिए, हमें उसे ऊपर की ओर प्रक्षेपित करना पड़ता है । मंद पवन पेड़ की शाखाओं को झुला देती है; प्रबल वायु का झोंका तो भारी पिण्डों तक को भी लुढ़का सकता है ! बहती नदी किसी के न खेने पर भी नाव को बहा देती है । स्पष्टत: किसी पिण्ड को विराम से गति में लाने के लिए किसी बाह्य साधन, सजीव अथवा निर्जीव द्वारा बल लगाने की आवश्यकता होती है । इसी प्रकार, 'गति को रोकने अथवा मंद करने के लिए भी बाह्य बल की आवश्यकता होती है । किसी आनत तल पर नीचे की ओर लुढ़कती किसी गेंद को उसकी गति की विपरीत दिशा में बल लगाकर रोका भी जा सकता है ।

इन उदाहरणों में, बल का बाह्य साधन (हाथ, वायु, जलधारा, आदि) पिण्ड के संपर्क में है । परंतु यह सदैव आवश्यक नहीं है । किसी भवन के शिखर से बिना अधोमुखी धक्का दिये मुक्त किया गया पत्थर पृथ्वी के गुरुत्वीय खिंचाव के कारण त्वरित हो जाता है । कोई छड़ चुंबक लोहे की कीलों को दूर से ही, बिना स्पर्श किए, अपनी ओर आकर्षित कर लेता है । ***यह दर्शाता है कि बाह्य साधन (इन उदाहरणों में गुरुत्वीय एवं चुंबकीय बल) किसी दूरी से भी किसी पिण्ड पर बल लगा सकता है ।***

संक्षेप में, किसी रुके हुए पिण्ड को गति प्रदान करने तथा गतिमान पिण्ड को रोकने के लिए बल की आवश्यकता होती है, तथा इस बल को प्रदान करने के लिए किसी बाह्य साधन की आवश्यकता होती है । यह बाह्य साधन सजीव भी हो सकता है और निर्जीव भी, तथा यह उस पिण्ड के संपर्क में भी हो सकता है, और नहीं भी ।

यहां तक तो सब सही है । परंतु तब क्या होता है जब कोई पिण्ड एकसमान गति चलता है (उदाहरण के लिए, बर्फ के क्षैतिज फर्श पर एकसमान चाल से सीधी रेखा में गतिमान कोई स्केटर) ? ***क्या किसी पिण्ड की एकसमान गति बनाए रखने के लिए कोई बाह्य बल आवश्यक है ?***

5.2 अरस्तू की भ्रामकता

उपरोक्त प्रश्न सरल प्रतीत होता है । परंतु वास्तव में इसका उत्तर देने में कई युग लग गए थे । वस्तुतः सत्रहवीं शताब्दी में गैलीलियो द्वारा दिए गए इस प्रश्न का सही उत्तर न्यूटनी यांत्रिकी का आधार बना जिसने आधुनिक विज्ञान के जन्म का संकेत दिया ।

महान ग्रीक विचारक, अरस्तू (384 ई.पू. – 322 ई.पू.) ने यह विचार रखा कि यदि कोई पिण्ड गतिमान है, तो उसे उसी अवस्था में बनाए रखने तथा विराम स्थिति में आने से रोकने के लिए कोई न कोई बाह्य साधन अवश्य चाहिए । इस विचार के अनुसार उदाहरण के लिए, किसी धनुष से छोड़ा गया तीर उड़ता रहता है, क्योंकि तीर के पीछे की वायु उसे धकेलती रहती है । यह अरस्तू द्वारा विकसित विश्व में पिण्डों की गतियों से संबंधित विचारों के विस्तृत ढाँचे का एक भाग था । गति के विषय में अरस्तू के अधिकांश विचार अब गलत जाने जाते हैं, और उनकी अब चिंता करने की आवश्यकता नहीं है । अपने काम के लिए हम यहां अरस्तू के गति के नियम को इस प्रकार लिख सकते हैं : ***किसी पिण्ड को गतिशील रखने के लिए बाह्य बल की आवश्यकता होती है ।***

जैसा कि हम आगे देखेंगे, अरस्तू का गति का नियम दोषयुक्त है । परन्तु यह एक स्वाभाविक विचार है, जो कोई भी व्यक्ति अपने सामान्य अनुभवों से रख सकता है । आखिर अपनी सामान्य खिलौना कार (अवैद्युत) से फर्श पर खेलती छोटी बालिका भी अपने अंतर्ज्ञान से यह जानती है कि कार को चलती रखने के लिए उसे स्थायी रूप से कुछ बल लगाकर बराबर धकेलना होगा । यदि वह अपने हाथ हटा लेती है और कार को स्वतंत्र छोड़ देती है तो कुछ क्षण बाद वह रुक जाती है । अधिकांश स्थलीय गतियों में यही सामान्य अनुभव होता है । पिण्डों को गतिशील बनाए रखने के लिए बाह्य बलों की आवश्यकता प्रतीत होती है । उन्हीं पर छोड़ देने पर सभी वस्तुएं अंततः रुक जाती हैं ।

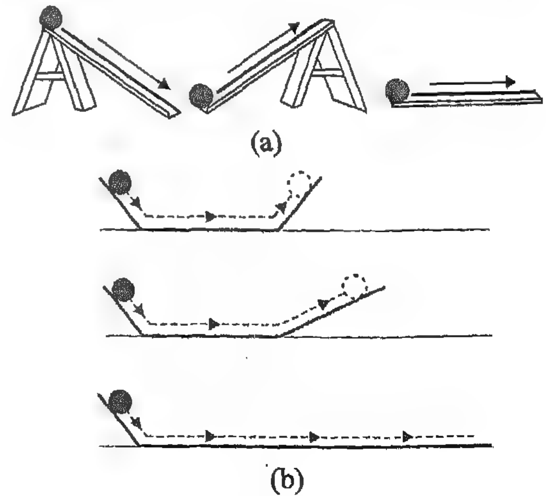
फिर अरस्तू के नियम में क्या दोष है ? इसका उत्तर है : गतिशील खिलौना कार इसलिए रुक जाती है कि फर्श द्वारा कार पर लगने के लिए सदैव वर्तमान बाह्य घर्षण बल इसके गति का विरोध करता है । इस बल को निष्फल करने के लिए बालिका को कार पर गति की दिशा में बाह्य बल (अपने हाथों से) लगाना पड़ता है । जब कार एकसमान गति में होती है तब उस पर कोई नेट बाह्य बल कार्य नहीं करता; बालिका द्वारा लगाया गया बल फर्श के बल (घर्षण बल) को निरस्त कर देता है । इसका उपप्रमेय है : यदि कोई घर्षण न हो, तो बालिका को खिलौना कार की एकसमान गति बनाए रखने के लिए, कोई भी बल लगाने की आवश्यकता नहीं पड़ती ।

प्रकृति में सदैव ही विरोधी घर्षण बल (ठोसों के बीच) अथवा श्यान बल (द्रवों तथा तरलों के बीच आदि) उपस्थित रहते हैं । यह उन व्यावहारिक अनुभवों से स्पष्ट है जिनके अनुसार वस्तुओं में एकसमान गति बनाए रखने के लिए घर्षण बलों को निष्फल करने हेतु बाह्य साधनों द्वारा बल लगाना आवश्यक होता है । अब हम समझ सकते हैं कि अरस्तू से त्रुटि कहां हुई । उसने अपने इस व्यावहारिक अनुभव को एक मूल नियम का रूप दिया । गति तथा बलों के लिए प्रकृति के यथार्थ नियम को जानने के लिए हमें एक ऐसे आदर्श संसार की कल्पना करनी होगी जिसमें बिना किसी विरोधी घर्षण बल लगे एकसमान गति का निष्पादन होता है । यही गैलीलियो ने किया था ।

5.3 जड़त्व का नियम

गैलीलियो ने वस्तुओं की गति का अध्ययन एक आनत समतल पर किया था । किसी आनत समतल पर नीचे की ओर गतिमान वस्तुएं त्वरित होती हैं जबकि तल पर ऊपर की ओर जाने वाली वस्तुओं में मंदन होता है । क्षैतिज समतल पर गति इन दोनों के बीच की स्थिति वाली है । गैलीलियो ने यह निष्कर्ष निकाला कि किसी क्षैतिज समतल पर गतिशील किसी वस्तु में न तो त्वरण होना चाहिए और न ही मंदन, अर्थात् इसे एकसमान वेग से गति करनी चाहिए ।

गैलीलियो के एक अन्य प्रयोग जिसमें उन्होंने द्विआनत समतल का उपयोग किया, से भी यही निष्कर्ष निकलता है । एक आनत समतल पर विरामावस्था से छोड़ी गई गेंद नीचे लुढ़कती है और दूसरे आनत समतल पर ऊपर चढ़ती है । यदि दोनों आनत समतलों के पृष्ठ अधिक रुक्ष नहीं हैं तो गेंद की अंतिम ऊंचाई उसकी आरंभिक ऊंचाई के लगभग समान (कुछ कम, परंतु अधिक कभी नहीं) होती है । आदर्श स्थिति में, जब घर्षण बल



चित्र 5.1 (a) एकल आनत समतल तथा (b) द्विआनत समतल पर गति के प्रेक्षणों से गैलीलियो ने जड़त्व का नियम अनुमानित किया ।

पूर्णतः विलुप्त कर दिया जाता है, तब गेंद की अंतिम ऊंचाई उसकी आरंभिक ऊंचाई के समान होनी चाहिए ।

अब यदि दूसरे समतल के ढाल को घटाकर प्रयोग को दोहराएं, तो फिर भी गेंद उसी ऊंचाई तक पहुंचेगी, परंतु ऐसा करने पर वह अधिक दूरी चलेगी । सीमान्त स्थिति में, जब दूसरे समतल का ढाल शून्य है (अर्थात् वह क्षैतिज समतल है) तब गेंद अनन्त दूरी तक चलती है । दूसरे शब्दों में इसकी गति कभी नहीं रुकेगी । निःसंदेह यह एक आदर्श स्थिति है । व्यवहार में गेंद क्षैतिज समतल पर एक परिमित दूरी तक चलने के बाद बाह्य विरोधी घर्षण बल जिसे पूर्ण रूप से विलुप्त नहीं किया जा सकता, के कारण विराम में आ जाती है । तथापि निष्कर्ष स्पष्ट है : यदि घर्षण न होता तो गेंद क्षैतिज समतल पर एकसमान वेग से निरंतर चलती रहती ।

इस प्रकार गैलीलियो को गति के संबंध में एक नई अंतर्दृष्टि प्राप्त हुई, जो अरस्तू तथा उनके अनुयायिओं को समझ में नहीं आई । गतिकी में विरामावस्था तथा एकसमान रैखिक गति की अवस्था (अर्थात् एकसमान वेग से गति) तुल्य होती हैं । दोनों ही प्रकरणों में पिण्ड पर कोई नेट बल नहीं लगता । यह सोचना त्रुटिपूर्ण है कि किसी पिण्ड की एकसमान गति के लिए उस पर कोई नेट बल लगाना आवश्यक है । किसी पिण्ड को एकसमान गति में बनाए रखने के लिए हमें घर्षण बल (जो एक बाह्य बल ही है) को सटीक निष्फल करने के लिए एक बाह्य बल लगाने की आवश्यकता होती है ताकि पिण्ड पर लगे दोनों बाह्य बलों का नेट बाह्य बल शून्य हो जाए ।

सारांश में, यदि नेट बाह्य बल शून्य है तो विराम अवस्था में रह रहा पिण्ड विरामावस्था में ही रहता है और गतिशील पिण्ड निरंतर एकसमान वेग से गतिशील रहता है । प्रकृति की प्रत्येक वस्तु के इस गुण को जड़त्व कहते हैं । जड़त्व से तात्पर्य है **"परिवर्तन के प्रति प्रतिरोध"** । कोई पिण्ड अपनी विरामावस्था अथवा एकसमान गति की अवस्था में तब तक कोई परिवर्तन नहीं करता जब तक कोई बाह्य बल उसे ऐसा करने के लिए विवश नहीं करता ।

5.4 न्यूटन का गति का प्रथम नियम

गैलीलियो की सरल परंतु क्रांतिकारी धारणाओं ने अरस्तू की यांत्रिकी को उखाड़ दिया । अब एक नई यांत्रिकी का विकास किया जाना था । विशिष्ट रूप से, इस कार्य को सर आइजक न्यूटन ने जिन्हें सभी युगों का महानतम वैज्ञानिक माना जाता है, लगभग अकेले ही संपन्न किया ।

न्यूटन ने गैलीलियो की धारणाओं के आधार पर गति के तीन नियमों जो उनके नामों से जाने जाते हैं, के पदों में एक यांत्रिकी की आधारशिला रखी । गैलीलियो का जड़त्व का नियम उसका आरंभ बिंदु था जिसका न्यूटन ने ***'गति के प्रथम नियम'*** के रूप में संरूपण किया :

> **"प्रत्येक पिण्ड तब तक अपनी विरामावस्था अथवा सरल रेखा में एकसमान गति की अवस्था में रहता है जब तक कोई बाह्य बल उसे अन्यथा व्यवहार करने के लिए विवश नहीं करता ।"**

अब विरामावस्था अथवा एकसमान रैखिक गति दोनों ही में "शून्य त्वरण" समाविष्ट है । अतः गति के प्रथम नियम को, सरल शब्दों में, इस प्रकार भी व्यक्त किया जा सकता है :

यदि किसी पिण्ड पर लगने वाला नेट बाह्य बल शून्य है, तो उसका त्वरण शून्य होता है । शून्येतर त्वरण केवल तभी हो सकता है जब पिण्ड पर कोई नेट बाह्य बल लगता हो ।

प्राचीन भारतीय विज्ञान में गति संबंधी धारणाएं

प्राचीन भारतीय विचारकों ने भी गति संबंधी धारणाओं की एक विस्तृत प्रणाली विकसित कर ली थी । बल जो गति का कारण है, भिन्न प्रकार का माना गया : सतत दाब के कारण बल (जिसे नोदन कहा गया) जैसे जल-यात्रा करते पाल-यानों पर लगने वाला पवन का बल; संघट्ट (अभिघात) जो कुम्भकार द्वारा चाक को छड़ से घुमाने पर लगता है; सरल रैखिक गति (वेग) के लिए अथवा प्रत्यास्थ पिण्डों में आकृति के प्रत्यानयन की दीर्घस्थायी प्रवृत्ति (संस्कार); डोरी, छड़ आग से संचारित बल, गुरुत्व, तरलता, संकल्प शक्ति एवं अदृष्ट जो अज्ञात और अविवेचित कारणों को सन्निहित करता है । गति के '**वैशेषिका**' सिद्धांत में वेगों की संकल्पना कदाचित जड़त्व की संकल्पना के समीपस्थ है । वेग, सरल रेखा में चलने की प्रवृत्ति का विरोध संपर्क में आने वाली वस्तुओं जिनमें वायुमण्डल भी शामिल है, के द्वारा होता है ऐसा माना गया । यह घर्षण तथा वायु-प्रतिरोध के विचार के समान विचार है । उनका यह अनुमान सही था कि पिण्डों की विभिन्न प्रकार की गतियां (स्थानांतरीय, घूर्णी तथा कंपन) उस पिण्ड के अवयवी कणों की केवल स्थानांतरीय गति के कारण ही उत्पन्न होती हैं । पवन में गिरती किसी पत्ती की कुल मिलाकर अधोमुखी गति (**पतन**) हो सकती है और साथ ही उसमें घूर्णी तथा कंपन गति (भ्रमण, स्पंदन) भी हो सकती हैं, परंतु किसी क्षण उस पत्ती के प्रत्येक कण में केवल एक निश्चित (लघु) विस्थापन होता है । गति की माप तथा लंबाई एवं समय के मात्रकों के विषय में भारतीय चिन्तन में यथेष्ट बल दिया गया । यह ज्ञात था कि दिक्स्थान में किसी कण की स्थिति को उसकी तीन अक्षों से दूरियां मापकर निर्दिष्ट किया जा सकता था । भास्कर (1150 ई.) ने तात्क्षणिक गति (**तात्कालिकी गति**) की अवधारणा प्रस्तावित की जिससे अवकल गणित के प्रयोग द्वारा तात्क्षणिक वेग की आधुनिक संकल्पना का पूर्वज्ञान हुआ । तरंग तथा धारा (जल की) के बीच अंतर को भली-भांति समझा जा चुका था; धारा गुरुत्व तथा तरलता के अंतर्गत जल कणों की गति है जबकि तरंग जल कणों के कंपन के संचरण का परिणाम है ।

गैलीलियो गैलिली (1564-1642)



इटली के पीसा नामक शहर में 1564 ई. में जन्मे गैलीलियो गैलिली लगभग चार शताब्दी पूर्व यूरोप में हुई वैज्ञानिक क्रांति के सूत्रधार थे । उन्होंने त्वरण की संकल्पना की । पिण्डों की आनत समतलों पर गति अथवा मुक्त रूप से गिरते पिण्डों की गतियों के प्रयोगों द्वारा उन्होंने अरस्तू की धारणा कि किसी पिण्ड को गतिमान रखने के लिए किसी बल की आवश्यकता होती है तथा भारी पिण्ड गुरुत्व बल के प्रभाव में तीव्रतर गति से गिरते हैं, का खंडन किया । इस प्रकार, उन्होंने जड़त्व के नियम की खोज की जो आइजक न्यूटन के युगांतरीय कार्य का आरम्भ बिंदु था ।

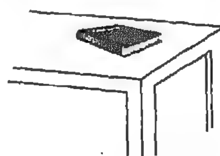
गैलीलियो के खगोलिकी के क्षेत्र में आविष्कार भी उतने ही क्रांतिकारी थे । 1609 ई. में उन्होंने अपना दूरदर्शी (जिसकी खोज पहले हॉलैण्ड में हुई थी) स्वयं बनाया तथा उसका उपयोग उन्होंने अपने कई चौंकाने वाले प्रेक्षणों : चंद्रमा के पृष्ठ पर पर्वत तथा गर्त; सूर्य पर काले धब्बे; बृहस्पति के उपग्रह, तथा शुक्र की कलाओं के लिए किया। उन्होंने यह निष्कर्ष निकाला कि आकाशगंगा अपनी ज्योति नंगी आंखों से न दिखाई दे सकने वाले असंख्य तारों से प्राप्त करती है । अपने वैज्ञानिक तर्क की अति उत्तम रचना "डायलॉग ऑन दि टू चीफ वर्ल्ड सिस्टम्स" में गैलीलियो ने कॉपरनिकस द्वारा प्रस्तावित सौर परिवार के "सूर्य केंद्रीय सिद्धांत" का समर्थन किया और अंततः इसी सिद्धांत को सार्वजनिक मान्यता प्राप्त हुई ।

गैलीलियो के साथ ही वैज्ञानिक जांच (खोजबीन) की विधि में एक मोड़ आया । अब विज्ञान मात्र प्रकृति का प्रेक्षण तथा उन प्रेक्षणों के आधार पर तार्किक अनुमान लगाना ही नहीं रह गया था । अब विज्ञान से तात्पर्य नई-नई युक्तियां बनाकर प्रयोगों द्वारा सिद्धांतों को प्रतिपादित अथवा तिरस्कृत करना बन गया था । विज्ञान का अर्थ भौतिक राशियों की माप और उनके बीच गणितीय संबंधों की खोज बन गया था । उनकी इसी विलक्षण योग्यता के कारण ही गैलीलियो को आधुनिक विज्ञान का जनक माना जाता है ।

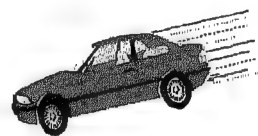
व्यवहार में इस नियम के अनुप्रयोग से हमें दो प्रकार की स्थितियों से सामना करना होता है । कुछ उदाहरणों में तो हम यह जानते हैं कि वस्तु पर नेट बाह्य बल शून्य होता है । उसमें हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि वस्तु का त्वरण शून्य है । उदाहरण के लिए, अंतरा तारकीय आकाश में सभी गुरुत्वीय वस्तुओं से बहुत दूर किसी अंतरिक्षयान, जिसके सभी राकेट बंद किए जा चुके हों, पर कोई नेट बाह्य बल कार्यरत नहीं होता । गति के प्रथम नियम के अनुसार इसका त्वरण शून्य होना चाहिए । यदि यह गति में है, तो इसे एकसमान वेग (***किसी जड़त्वीय प्रेक्षक के सापेक्ष***-देखिए अनुभाग 5.11) से गतिशील रहना चाहिए ।

तथापि, बहुधा हमें आरम्भ में सभी बलों का ज्ञान नहीं होता । उस अवस्था में, यदि हमें यह ज्ञात हो कि कोई वस्तु अत्वरित है (अर्थात् वह वस्तु या तो विरामावस्था में है अथवा एकसमान रैखिक गति में है) तब हम गति के प्रथम नियम के आधार पर यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि उस वस्तु पर नेट बाह्य बल शून्य होना चाहिए । ध्यान दीजिए, हमने नेट शब्द को रेखांकित किया है । गुरुत्व हर स्थान पर है । विशेष रूप से, पार्थिव परिघटनाओं में, पृथ्वी पर स्थित सभी वस्तुएं पृथ्वी के गुरुत्वाकर्षण का अनुभव करती हैं । साथ ही, गतिशील वस्तुएं सदैव ही घर्षण बल, श्यान कर्षण आदि का अनुभव करती हैं । तब यदि पृथ्वी पर स्थित कोई वस्तु विरामावस्था अथवा एकसमान रैखिक गति में हो, तब ऐसा होने का कारण यह नहीं है कि उस पर कोई बल कार्यरत नहीं है, वरन् उस पर कार्यरत विभिन्न बाह्य बल एक दूसरे को निरस्त करके सभी बलों के योग को 'शून्य नेट बाह्य बल' बनाते हैं ।

अब मेज पर विराम में रखी एक पुस्तक पर विचार करते हैं । इस पुस्तक पर दो बाह्य बल कार्यरत हैं : गुरुत्वीय बल (अर्थात् पुस्तक का भार W) ऊर्ध्वाधर नीचे की दिशा में कार्यरत है तथा मेज द्वारा पुस्तक पर ऊर्ध्वाधर ऊपर की दिशा में अभिलंब बल R कार्यरत है । R स्वयं समायोजित होने वाला बल है । यह ऊपर वर्णित दूसरी प्रकार की स्थिति का उदाहरण है । बलों के बारे में तो पूर्ण ज्ञान नहीं है परंतु गति की अवस्था ज्ञात है । हम पुस्तक को विराम की स्थिति में देखते हैं । अतः गति के प्रथम नियम के आधार पर हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि R का परिमाण W के परिमाण के समान है । हमारा प्रायः इस प्रकथन से समागम होता है ; "चूंकि $W=R$, बल एक दूसरे को निरस्त करते हैं, और इसीलिए पुस्तक विराम की स्थिति में है" । यह विवेक के विपरीत है । सही प्रकथन यह होना चाहिए: "चूंकि पुस्तक विराम में दिखाई देती है"; गति के प्रथम नियम के अनुसार इस पर नेट बाह्य बल शून्य होना चाहिए । इसका तात्पर्य है कि अभिलंब R पुस्तक के भार W के समान तथा विपरीत होना चाहिए ।



(a)



(b)

चित्र 5.2 (a) मेज पर विराम में रखी पुस्तक तथा (b) एकसमान वेग से गतिमान कार, इन दोनों ही प्रकरणों में नेट बाह्य बल शून्य है ।

अब हम एक कार की गति का विचार करते हैं जिसमें वह कार विराम से गति आरंभ करके अपनी चाल में वृद्धि करती है और फिर चिकनी सीधी सड़क पर पहुंचकर एकसमान वेग से गति करती है । जब यह विराम में होती है तब उस पर कोई नेट बल नहीं होता । चाल में वृद्धि के समय इसमें त्वरण

होता है । ऐसा नेट बाह्य बल के कारण होना चाहिए । ध्यान दीजिए, यह एक बाह्य बल ही होना चाहिए । कार के त्वरण के लिए किसी भी आंतरिक बल को उत्तरदायी नहीं माना जा सकता । सुनने में यह अद्‌भुत लग सकता है, परंतु यह सत्य है । यदि यहां सड़क के अनुदिश किसी बाह्य बल के विषय में विचार किया जाता है, तो वह घर्षण बल ही है । सब बातों पर विचार करने के उपरांत यही निष्कर्ष निकलता है कि कार की गति में त्वरण का कारण घर्षण बल ही है (घर्षण के विषय में आप अनुभाग 5.9 में पढ़ेंगे) । जब कार एक समान वेग से गति करती है तब फिर उस पर कोई नेट बाह्य बल नहीं होता।

गति के प्रथम नियम में अंतर्विष्ट जड़त्व का गुण बहुत-सी स्थितियों में प्रत्यक्ष दिखाई पड़ता है । मान लीजिए हम किसी रुकी हुई बस में असावधानी से खड़े हैं और यकायक ड्राइवर बस को चला देता है । हम झटके के साथ पीछे की ओर गिर पड़ते हैं । क्यों ? हमारे पैर बस के फर्श को स्पर्श कर रहे होते हैं । यदि घर्षण न होता, तो हम वहीं रहते जहां पहले थे जबकि हमारे पैरों के नीचे बस का फर्श केवल आगे की दिशा में सरकता और बस का पीछे का भाग हमसे आकर टकराता । परंतु सौभाग्यवश, हमारे पैर और फर्श के बीच कुछ घर्षण होता है । यदि बस की पिक-अप अति आकस्मिक नहीं है, अर्थात् त्वरण साधारण है तो घर्षण बल हमारे पैरों को बस के साथ त्वरित करने के लिए पर्याप्त होगा । परंतु वस्तुतः हमारा शरीर एक दृढ़ पिण्ड नहीं है । इसमें विरूपण हो सकता है, अर्थात् इसके विभिन्न भागों के बीच आपेक्ष विस्थापन संभव है। इसका तात्पर्य यह हुआ कि जब हमारे पैर बस के साथ आगे बढ़ते हैं, तो शरीर का शेष भाग जड़त्व के कारण वहीं रहता है । इसीलिए, बस के आपेक्ष हम पीछे की ओर फेंक दिए जाते हैं । जैसे ही यह घटना घटती है, शरीर के शेष भागों पर पेशीय बल (पैरों के द्वारा) कार्य करने लगते हैं, जो आपेक्ष विस्थापन का विरोध करते हैं तथा शरीर के शेष भाग को पैरों के साथ गति कराते हैं और हम चोट खाने से बच जाते हैं । इसी प्रकार की घटना तीव्र गति से चलती बस के यकायक रुकने पर घटती है । हमारे पैर घर्षण के कारण रुक जाते हैं, क्योंकि घर्षण बल पैरों तथा बस के फर्श के बीच आपेक्ष गति नहीं होने देता । परंतु शरीर का शेष भाग, जड़त्व के कारण, आगे की ओर गति करता रहता है । परिणामस्वरूप हम आगे की ओर फेंक दिए जाते हैं । प्रत्यानयनी पेशीय बलों के कार्यरत होने के कारण इस स्थिति में भी हम चोट खाने से बच जाते हैं ।

▶ *उदाहरण 5.1* कोई अंतरिक्षयात्री अंतरातारकीय आकाश में 100 $m\,s^{-2}$ की एकसमान दर से त्वरित अपने अंतरिक्षयान से दुर्घटनावश बाहर फेंक दिया जाता है । जिस क्षण अंतरिक्षयात्री अंतरिक्षयान से बाहर आ जाता है, उसके तुरंत पश्चात् अंतरिक्षयात्री का त्वरण क्या है ?

हल जिस क्षण वह यात्री यान से बाहर आता है, उसी क्षण से अंतरिक्षयात्री पर कोई बाह्यबल कार्यरत नहीं रहता (हमने यह माना है कि यात्री पर गुरुत्वाकर्षण बल आरोपित करने के लिए उसके निकट कोई तारा नहीं हैं तथा छोटा होने के कारण अंतरिक्षयान द्वारा यात्री पर लग रहा गुरुत्वाकर्षण बल नगण्य है) । गति के प्रथम नियम के अनुसार अंतरिक्षयात्री का त्वरण शून्य है । ◀

5.5 न्यूटन का गति का द्वितीय नियम

गति का प्रथम नियम उस साधारण प्रकरण से संबंध रखता है जिसमें किसी पिण्ड पर नेट बाह्य बल शून्य है । गति का द्वितीय नियम उन व्यापक स्थितियों से संबंध रखता है, जिनमें पिण्ड पर कोई नेट बाह्य बल लग रहा हो । यह नियम नेट बाह्य बल और पिण्ड के त्वरण में संबंध दर्शाता है ।

संवेग

किसी पिण्ड के संवेग को उसकी संहति m तथा वेग $\mathbf{v}$ के गुणनफल द्वारा पारिभाषित किया जाता है । इसे $\mathbf{p}$ द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है :

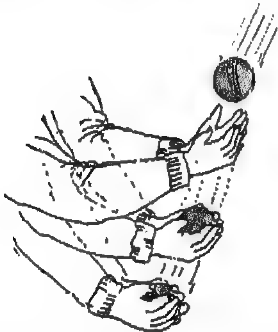
$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \qquad (5.1)$$

स्पष्ट रूप से संवेग एक सदिश राशि है । दैनिक जीवन के साधारण अनुभवों में पिण्डों की गतियों पर बलों के प्रभाव पर विचार करते समय हमें संवेग के महत्त्व का पता चलता है ।

- मान लीजिए एक कम भार का वाहन (जैसे छोटी कार) तथा एक अधिक भार का वाहन (जैसे सामान से लदा ट्रक) दोनों ही किसी क्षैतिज सड़क पर खड़े हैं । हम सभी भलीभांति जानते हैं कि समान समय अंतराल में दोनों वाहनों को समान चाल से गति कराने में कार की तुलना में ट्रक को धकेलने के लिए अपेक्षाकृत अधिक बल की आवश्यकता होती है । इसी प्रकार, यदि एक हल्का पिण्ड तथा एक भारी पिण्ड दोनों समान चाल से गतिमान हैं, तो समान समय अंतराल में दोनों पिण्डों को रोकने में हल्के पिण्ड की तुलना में भारी पिण्ड में अपेक्षाकृत अधिक परिमाण के विरोधी बल की आवश्यकता होती है। यदि दो पत्थर, एक हल्का तथा दूसरा भारी, एक ही भवन के शिखर से गिराए जाते हैं, तो धरती पर खड़े किसी व्यक्ति के लिए भारी पत्थर की तुलना में हल्के पत्थर को लपकना आसान होता है । इस प्रकार किसी पिण्ड की संहति एक महत्त्वपूर्ण प्राचल है जो गति पर बल के प्रभाव को निर्धारित करता है ।
- विचार करने योग्य एक अन्य महत्त्वपूर्ण प्राचल है— चाल। बंदूक से छोड़ी गई कोई गोली रुकने से पूर्व मानव ऊतक को आसानी से वेध सकती है, फलस्वरूप दुर्घटना हो जाती है । यदि उसी गोली को साधारण चाल से फेंकें तो अधिक क्षति नहीं होती । अतः किसी दी गई संहति के लिए यदि चाल अधिक हो तो उसे एक निश्चित समय अंतराल में रोकने के लिए अधिक परिमाण के विरोधी बल की आवश्यकता होती है । साथ-साथ लेने पर, संहति और वेग का गुणनफल, अर्थात संवेग, प्रत्यक्ष रूप से गति का एक प्रासंगिक चर है।

यदि अधिक संवेग परिवर्तन की आवश्यकता है तो लगाने के लिए अधिक परिमाण के बल की आवश्यकता होगी ।

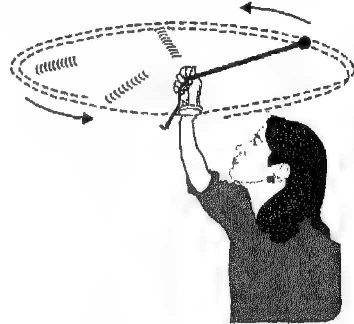
- क्रिकेट का कोई अभ्यस्त खिलाड़ी तीव्र गति से आती गेंद को एक नौसिखिया खिलाड़ी की तुलना में कहीं अधिक आसानी से लपक लेता है जबकि नौसिखिया खिलाड़ी उसी गेंद को लपकने में हाथों में चोट खा लेता है । इसका एक कारण यह है कि अभ्यस्त खिलाड़ी, अपने हाथों से गेंद को लपक कर, उसे रोकने में अधिक समय लगाता है । आपने ध्यान दिया होगा कि अभ्यस्त खिलाड़ी गेंद को लपकने की क्रिया में अपने हाथों को पीछे की ओर खींचता है । जबकि नौसिखिया खिलाड़ी अपने हाथों को स्थिर रखता है तथा गेंद को लगभग तत्क्षण ही लपकने का प्रयास करता है । गेंद को तत्क्षण रोकने के लिए उसे अपेक्षाकृत काफी अधिक बल लगाना पड़ता है फलस्वरूप उसके हाथों में चोट* लग जाती है । इससे निष्कर्ष निकलता है : बल केवल संवेग परिवर्तन पर ही निर्भर नहीं करता, वह इस बात पर भी निर्भर करता है कि कितनी तीव्रता से यह परिवर्तन किया जाता है । समान संवेग परिवर्तन यदि अपेक्षाकृत कम समय में किया जाता है, तो अपेक्षाकृत अधिक बल लगाने की आवश्यकता होती है । संक्षेप में, संवेग परिवर्तन की दर अधिक है, तो बल अधिक होता है ।



चित्र 5.3 बल केवल संवेग परिवर्तन पर ही निर्भर नहीं करता, वरन् वह इस बात पर भी निर्भर करता है कि यह परिवर्तन कितनी तीव्रता से किया जाता है । एक अभ्यस्त खिलाड़ी गेंद लपकते समय अपने हाथों को पीछे की ओर खींचता है जिससे गेंद को रोकने में अधिक समय लगता है, जिसके लिए अपेक्षाकृत कम बल की आवश्यकता होती है ।

- एक अत्यंत महत्त्वपूर्ण प्रेक्षण इस तथ्य की पुष्टि करता है कि संहति तथा वेग का गुणनफल (अर्थात् संवेग) ही गति पर बल के प्रभाव का मूल है । मान लीजिए, विभिन्न संहतियों के दो पिण्डों, जो आरंभ में विराम में हैं, पर कोई निश्चित बल एक निश्चित समय अंतराल के लिए लगाया जाता है । हल्का पिण्ड, अपेक्षानुसार, भारी पिण्ड की तुलना में अधिक चाल ग्रहण कर लेता है । परंतु, समय अंतराल के अंत में, प्रेक्षण यह दर्शाते हैं कि, प्रत्येक पिण्ड समान संवेग उपार्जित करता है । इस प्रकार, ***समान समय के लिए लगाया गया समान बल विभिन्न पिण्डों में समान संवेग परिवर्तन करता है ।*** यह गति के द्वितीय नियम का प्रामाणिक मार्गदर्शक सिद्धांत है ।

- पिछले प्रेक्षणों में संवेग का सदिश चरित्र अर्थपूर्ण नहीं रहा है । अब तक के उदाहरणों में, संवेग परिवर्तन तथा संवेग समान्तर दिशाओं में हैं । परंतु सदैव ऐसा नहीं होता । मान लीजिए, किसी डोरी द्वारा एक पत्थर को क्षैतिज समतल में एकसमान चाल से घूर्णन कराया जाता है । इसमें संवेग का परिमाण स्थिर रहता है, परंतु इसकी दिशा निरन्तर परिवर्तित होती है । संवेग सदिश में यह परिवर्तन करने के लिए बल की आवश्यकता होती है । यह बल डोरी से होकर पत्थर को हमारे हाथों द्वारा प्रदान किया जाता है । प्रयोगों से यह संकेत मिलता है कि यदि पत्थर को अपेक्षाकृत अधिक चाल तथा/अथवा छोटी त्रिज्या के वृत्त में घूर्णन कराया जाए तो हमारे हाथों द्वारा अधिक बल लगाने की आवश्यकता होती है । यह अधिक बल अधिक त्वरण अथवा संवेग सदिश में तुल्यांकी अधिक परिवर्तन के तदनुरूपी होता है । इससे यह संकेत मिलता है कि संवेग सदिश में अधिक परिवर्तन के लिए अधिक बल लगाना होता है ।



चित्र 5.4 संवेग का परिमाण स्थिर रहने पर भी संवेग की दिशा में परिवर्तन के लिए बल आवश्यक है । इसका अनुभव हम डोरी द्वारा किसी पत्थर को एकसमान चाल से वृत्त में घूर्णन कराकर कर सकते हैं ।

ये गुणात्मक प्रेक्षण हमें गति के द्वितीय नियम की ओर ले जाते हैं, जिसे न्यूटन ने इस प्रकार व्यक्त किया था :

किसी पिण्ड के संवेग परिवर्तन की दर आरोपित बल के अनुक्रमानुपाती होती है तथा उसी दिशा में होती है जिस दिशा में बल कार्य करता है ।

इस प्रकार यदि m संहति के किसी पिण्ड पर कोई बल $\mathbf{F}$ समय अंतराल Δt तक लगाने पर उस पिण्ड के वेग में $\mathbf{v}$ से $\mathbf{v}+\Delta\mathbf{v}$ का परिवर्तन हो जाता है, अर्थात् पिण्ड के प्रारंभिक संवेग $m\mathbf{v}$

* चोट लगने का कारण गति का तृतीय नियम है (अनुभाग 5.6 देखिए) । नौसिखिया द्वारा गेंद पर लगाया बल, गेंद द्वारा उसके हाथों पर लगे बल के बराबर होता है, जिसके कारण हाथों में चोट लगती है ।

में $\Delta(m\mathbf{v})$ का परिवर्तन हो जाता है । तब गति के द्वितीय नियम के अनुसार,

$$\mathbf{F} \,\alpha\, \frac{\Delta(m\mathbf{v})}{\Delta t}$$

अथवा $\mathbf{F} \alpha \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}$, अर्थात् $\mathbf{F} = k \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}$

यहां k आनुपातिकता स्थिरांक है । यदि $\Delta t \to 0$, पद $\frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}$, t के आपेक्ष $\mathbf{p}$ का अवकल गुणांक अथवा अवकलन बन जाता है, जिसे $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है । इस प्रकार,

$$\mathbf{F} = k \frac{d\mathbf{p}}{dt} \qquad (5.2)$$

किसी स्थिर संहति m के पिण्ड के लिए

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a} \qquad (5.3)$$

अर्थात्, द्वितीय नियम को इस प्रकार भी लिख सकते हैं,

$$\mathbf{F} = k\, m\, \mathbf{a} \qquad (5.4)$$

जो यह दर्शाता है कि बल $\mathbf{F}$, संहति m तथा त्वरण $\mathbf{a}$ के गुणनफल के अनुक्रमानुपाती होता है ।

हमने बल के मात्रक की अब तक परिभाषा नहीं दी है । वास्तव में, बल के मात्रक की परिभाषा देने के लिए हम समीकरण 5.4 का उपयोग करते हैं । अतः हम k के लिए कोई भी नियत मान चुनने के लिए स्वतंत्र हैं । सरलता के लिए, हम $k = 1$ चुनते हैं । तब द्वितीय नियम हो जाता है,

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\mathbf{a} \qquad (5.5)$$

SI मात्रकों में, एक मात्रक बल वह होता है जो 1kg के पिण्ड में $1\,\text{m s}^{-2}$ का त्वरण उत्पन्न कर देता है । इस मात्रक बल को न्यूटन कहते हैं । इसका प्रतीक N हैं । $1\text{N} = 1\text{kg m s}^{-2}$ । इस स्थिति में हमें गति के द्वितीय नियम के कुछ महत्त्वपूर्ण बिंदुओं पर ध्यान देना है :

1. गति के द्वितीय नियम में $\mathbf{F} = 0$ से यह उपलक्षित होता है कि $\mathbf{a} = 0$ । प्रत्यक्ष रूप से द्वितीय नियम प्रथम नियम के अनुरूप है ।
2. गति का द्वितीय नियम एक सदिश नियम है । यह, वास्तव में, तीन समीकरण हैं, सदिशों के प्रत्येक घटक के लिए एक समीकरण :

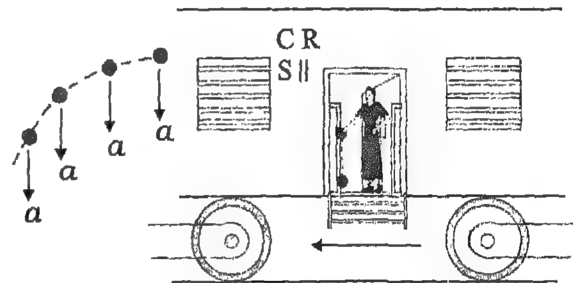
$$F_x = \frac{dp_x}{dt} = ma_x$$

$$F_y = \frac{dp_y}{dt} = ma_y$$

$$F_z = \frac{dp_z}{dt} = ma_z \qquad (5.6)$$

इसका अर्थ यह हुआ कि यदि कोई बल पिण्ड के वेग के समान्तर नहीं है, वरन् उससे कोई कोण बनाता है, तब वह केवल बल की दिशा में वेग के घटक को परिवर्तित करता है । बल के अभिलंबवत् वेग का घटक अपरिवर्तित रहता है । उदाहरण के लिए, ऊर्ध्वाधर गुरुत्वाकर्षण बल के अधीन किसी प्रक्षेप्य की गति में वेग का क्षैतिज घटक अपरिवर्तित रहता है ।

3. समीकरण (5.5) से प्राप्त गति का द्वितीय नियम वस्तुतः, एकल बिंदु कण पर लागू होता है । नियम में $\mathbf{F}$ कण पर लगे नेट बाह्य बल तथा $\mathbf{a}$ कण के त्वरण के लिए प्रयुक्त हुआ है । तथापि इस नियम को इसी रूप में दृढ़ पिण्डों अथवा, यहां तक कि व्यापक रूप में कणों के निकाय पर भी लागू किया जाता है । उस अवस्था में, $\mathbf{F}$ का उल्लेख निकाय पर लगे कुल बल तथा $\mathbf{a}$ का उल्लेख समस्त निकाय के त्वरण के लिए होता है । (अधिक यथार्थता से, $\mathbf{a}$ निकाय के संहति केंद्र का त्वरण है ।)* **निकाय के किसी भी आंतरिक बलों को F में सम्मिलित नहीं किया जाता है ।**



चित्र 5.5 किसी क्षण पर त्वरण का निर्धारण उसी क्षण के बल द्वारा किया जाता है । किसी त्वरित रेलगाड़ी से कोई पत्थर बाहर डालने के क्षण के तुरंत पश्चात्, यदि वायु के प्रतिरोध को नगण्य मानें तो, उस पत्थर पर कोई क्षैतिज त्वरण अथवा बल कार्यरत नहीं होता । कुछ क्षण पूर्व रेलगाड़ी के साथ पत्थर के त्वरण की कोई स्मृति नहीं रहती ।

4. गति का द्वितीय नियम एक स्थानीय संबंध है । इसका यह अर्थ है कि समय के किसी निश्चित क्षण पर समष्टि में किसी बिंदु (कण की अवस्थिति) पर लगा बल $\mathbf{F}$ उसी क्षण उसी बिंदु पर त्वरण $\mathbf{a}$ से संबंधित है । अर्थात् 'अभी' और 'यहां'

* जैसा कि हम अध्याय 7 में देखेंगे, इस विलक्षण तथ्य के सत्यापन में न केवल बिंदु कणों के लिए गति के द्वितीय नियम का उपयोग होता है वरन् गति के तृतीय नियम का भी उपयोग होता है ।

त्वरण का निर्धारण 'अभी' और 'यहां' लगे बल द्वारा किया जाता है, **कण की गति के किसी भी इतिहास द्वारा नहीं।**

> **उदाहरण 5.2** 90 m s^{-1} चाल से गतिमान 0.04 kg संहति की कोई गोली लकड़ी के भारी गुटके में धँसकर 60 cm दूरी चलकर रुक जाती है । गुटके द्वारा गोली पर लगने वाला औसत अवरोधी बल क्या है ?

हल गोली का मंदन (नियत मानते हुए)

$$= \frac{90 \times 90}{2 \times 06} \text{m s}^{-2} = 6750 \text{m s}^{-2}$$

गति के द्वितीय नियम के द्वारा, मंदन बल

$$= 0.04 \text{ kg} \times 6750 \text{ ms}^{-2} = 270 \text{ N}$$

इस प्रकरण में, वास्तविक अवरोधी बल और इसीलिए, गोली का मंदन एकसमान नहीं होता । इसीलिए, उत्तर केवल औसत अवरोधी बल को व्यक्त करता है । ◀

आवेग

कभी-कभी हमारा समागम ऐसे दृष्टांतों से होता है जिनमें किसी पिण्ड पर कोई बड़ा बल, बहुत कम समय के लिए कार्यरत रहकर, उस पिण्ड के संवेग में परिमित परिवर्तन उत्पन्न करता है । उदाहरण के लिए, जब कोई गेंद किसी दीवार से टकराकर वापस परावर्तित होती है, तब दीवार द्वारा गेंद पर लगने वाला बल बहुत कम समय के लिए (जितने समय तक दोनों संपर्क में होते हैं) कार्यरत रहता है तो भी यह बल गेंद के संवेग को उत्क्रमित करने के लिए पर्याप्त होता है । प्रायः इन स्थितियों में, बल तथा समयावधि को पृथक-पृथक सुनिश्चित करना कठिन होता है । परंतु बल तथा समय का गुणनफल, जो कि पिण्ड का संवेग परिवर्तन है, एक मापने योग्य राशि है । इस गुणनफल को आवेग कहते हैं :

आवेग = बल × समयावधि

= संवेग में परिवर्तन (5.7)

परिमित संवेग परिवर्तन उत्पन्न करने के लिए, कम समय के लिए कार्यरत रहने वाले बड़े बल को आवेगी बल कहते हैं । यद्यपि विज्ञान के इतिहास में आवेगी बलों को संकल्पनात्मक रूप से सामान्य बलों से अलग श्रेणी में रखा गया, न्यूटनी यांत्रिकी में ऐसा कोई विभेदन नहीं किया गया है । अन्य बलों की भांति आवेगी बल भी बल ही है–केवल यह बड़ा है और कम समय के लिए कार्यरत रहता है ।

> **उदाहरण 5.3** कोई बल्लेबाज किसी गेंद की आरंभिक चाल जो 12 m s^{-1} है, में बिना परिवर्तन किए उस पर हिट लगाकर सीधे गेंदबाज की दिशा में वापस भेज देता है। यदि गेंद की संहति 0.15 kg है, तो गेंद को दिया गया आवेग ज्ञात कीजिए । (गेंद की गति रैखिक मानिए) ।

हल संवेग परिवर्तन = 2×0.15×12 = 3.6 N s

आवेग = 3.6 N s बल्लेबाज से गेंदबाज की दिशा में

यह एक ऐसा उदाहरण है जिसमें बल्लेबाज द्वारा गेंद पर लगा बल तथा गेंद और बल्ले के बीच संपर्क का समय ज्ञात करना एक कठिन कार्य है जबकि आवेग का परिकलन तुरंत किया जा सकता है । ◀

5.6 न्यूटन का गति का तृतीय नियम

गति का द्वितीय नियम किसी पिण्ड पर लगे बाह्य बल तथा उसमें उत्पन्न त्वरण में संबंध बताता है । पिण्ड पर लगे बाह्य बल का उद्गम क्या है ? कौन साधन बाह्य बल प्रदान करता है ? न्यूटनी यांत्रिकी में इन प्रश्नों का सरल उत्तर यह है कि किसी पिण्ड पर लगने वाला बाह्य बल सदैव ही किसी अन्य पिण्ड के कारण होता है । दो पिण्डों A और B के युगल पर विचार कीजिए । मान लीजिए पिण्ड B पिण्ड A पर कोई बाह्य बल लगाता है, तब यह प्रश्न भी स्वाभाविक है : क्या पिण्ड A भी पिण्ड B पर कोई बाह्य बल लगाता है ? कुछ उदाहरणों में उत्तर स्पष्ट जान पड़ता है । यदि आप किसी कुण्डलित कमानी को अपने हाथों से दबाएं तो वह कमानी आपके हाथों के बल से संपीडित हो जाती है । संपीडित कमानी भी प्रत्युत्तर में आपके हाथों पर बल आरोपित करती है : आप इस बल का अनुभव करते हैं । परंतु तब क्या होता है जब पिण्ड संपर्क में नहीं होते ? पृथ्वी गुरुत्वीय बल के कारण किसी पत्थर को अधोमुखी दिशा में खींचती है । क्या पत्थर पृथ्वी पर कोई बल लगाता है ? इसका उत्तर स्पष्ट नहीं है, क्योंकि हम पत्थर द्वारा पृथ्वी पर लगे बल के प्रभाव को नहीं देख सकते हैं । परंतु न्यूटन के अनुसार इस प्रश्न का उत्तर है : हां, पत्थर भी पृथ्वी पर परिमाण में समान तथा दिशा में विपरीत बल लगाता है । हमें इस बल की जानकारी नहीं हो पाती, इसका कारण यह है कि अत्यधिक भारी होने के कारण पृथ्वी की गति पर पत्थर द्वारा लगने वाले कम बल का प्रभाव नगण्य होता है ।

इस प्रकार, न्यूटनी यांत्रिकी के अनुसार, प्रकृति में बल कभी भी अकेला नहीं पाया जाता । दो पिण्डों के बीच परस्पर अन्योन्य क्रिया बल है । बल सदैव युगल में पाए जाते हैं । साथ ही, दो पिण्डों के बीच परस्पर बल सदैव समान और विपरीत दिशा में होते हैं । न्यूटन ने इस धारणा को **गति के तृतीय नियम** के रूप में व्यक्त किया ।

प्रत्येक क्रिया की सदैव समान एवं विपरीत दिशा में प्रतिक्रिया होती है ।

न्यूटन की गति के तृतीय नियम की भाषा इतनी सुस्पष्ट और रोचक है कि यह सामान्य भाषा का अंग बन गई है । कदाचित इसी कारणवश गति के तृतीय नियम के बारे में काफी भ्रांतियां

हैं। आइए, गति के तृतीय नियम के बारे में कुछ महत्वपूर्ण बिंदुओं पर ध्यान दें, विशेषकर *क्रिया* तथा *प्रतिक्रिया* पदों के प्रयोग के संदर्भ में ।

1. गति के तृतीय नियम में पदों – क्रिया तथा प्रतिक्रिया का अर्थ 'बल' के अतिरिक्त अन्य कुछ नहीं है । एक ही भौतिक राशि के लिए विभिन्न पदों का प्रयोग कभी–कभी भ्रमित कर सकता है । तृतीय नियम को सरल तथा स्पष्ट शब्दों में इस प्रकार लिखा जाता है :

   बल सदैव युगलों में पाए जाते हैं । पिण्ड A पर B द्वारा आरोपित बल पिण्ड B पर A द्वारा आरोपित बल के समान एवं विपरीत होता है ।

2. तृतीय नियम के पदों *क्रिया* तथा *प्रतिक्रिया* से यह भ्रम उत्पन्न हो सकता है कि क्रिया प्रतिक्रिया से पहले आती है, अर्थात् क्रिया कारण है तथा निहित प्रतिक्रिया उसका प्रभाव । तृतीय नियम में ऐसा कोई कारण–प्रभाव संबंध नहीं है । A पर B द्वारा आरोपित बल तथा B द्वारा A पर आरोपित एक ही क्षण कार्यरत होते हैं । इसी संकेत के आधार पर इनमें से किसी भी एक को क्रिया तथा दूसरे को प्रतिक्रिया कहा जा सकता है । मान लीजिए, कोई व्यक्ति A किसी अन्य व्यक्ति B पर प्रहार करता है, तथा B शान्त नही बैठता, बदले में A पर प्रहार करता है । साधारण भाषा में पहला कार्य क्रिया है तथा बाद का कार्य प्रतिक्रिया है । परंतु इस क्रिया–प्रतिक्रिया युगल का तृतीय नियम से कोई संबंध नहीं है । यह सोचने में त्रुटि है कि तृतीय नियम दोनों कार्यों के बलों में संबंध स्थापित करता है और कहता है कि ये दोनों बल समान एवं विपरीत होते हैं ! तब फिर तृतीय नियम के अनुसार इस उदाहरण में सही क्रिया-प्रतिक्रिया युगल क्या है ? जब A, B पर प्रहार करता है तब उसी क्षण वह भी अपने हाथों पर एक बल का अनुभव करता है । ये दोनों समक्षणिक बल (A द्वारा B पर बल तथा B द्वारा A पर बल) तृतीय नियम का क्रिया–प्रतिक्रिया युगल बनाते हैं । प्रसंगवश, कदाचित यही कारण है कि कोई कमजोर व्यक्ति किसी बलशाली व्यक्ति पर प्रहार करने के पश्चात् पश्चाताप करता है । क्योंकि कमजोर व्यक्ति के प्रहार (क्रिया) का बलशाली व्यक्ति पर कोई विशेष प्रभाव नहीं होता, परंतु तात्क्षणिक बल (प्रतिक्रिया) के कारण कमजोर व्यक्ति के हाथों को चोट लगती है । साथ ही बदले में बलशाली व्यक्ति जो परवर्ती बल (प्रहार के रूप में) कमजोर व्यक्ति पर लगाता है, वह इस प्रतिक्रिया बल के अतिरिक्त होता है ।

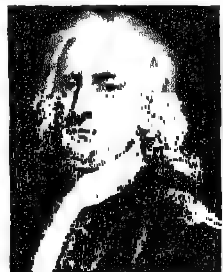
3. क्रिया तथा प्रतिक्रिया बल दो भिन्न पिण्डों पर कार्य करते हैं, एक ही वस्तु पर नहीं । दो पिण्डों A तथा B के युगल पर विचार कीजिए । तृतीय नियम के अनुसार,

$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA} \qquad (5.8)$$

(A पर B द्वारा बल) = - (B पर A द्वारा बल)

इस प्रकार, यदि हम किसी एक पिण्ड (A अथवा B) की गति पर विचार करते हैं तो दो बलों में से केवल एक ही प्रासंगिक है । दोनों बलों का योग करके दृढ़तापूर्वक यह कहना कि नेट बल शून्य है, यह त्रुटिपूर्ण है । फिर भी, यदि आप दो पिण्डों के किसी निकाय को एक पिण्ड मानकर उस पर

आइज़क न्यूटन (1642-1727)



आइजक न्यूटन का जन्म सन् 1642 ई. में इंग्लैण्ड के वूल्सथॉर्पे नामक शहर में हुआ, संयोगवश इसी वर्ष गैलीलियो का देहांत हुआ । विद्यालयी जीवन में उनकी अद्भुत गणितीय प्रतिभा तथा यांत्रिक अभिरुचि अन्य लोगों से छिपी रही । सन् 1662 में स्नातक पूर्व अध्ययन के लिए वे कैम्ब्रिज गए । सन् 1669 में प्लेग-महामारी फैलने के कारण विश्वविद्यालय बंद करना पड़ा और न्यूटन अपनी मातृभूमि वापस लौट आए । इन दो वर्षों के एकाकी जीवन में उनकी प्रसुप्त सृजनात्मक शक्ति विस्फुटित हुई । गणित तथा भौतिकी के मूल आविष्कारों: ऋणात्मक तथा भिन्नात्मक घातांकों के लिए द्विपदी प्रमेय, अवकल गणित का आरंभ, गुरुत्वाकर्षण का व्युत्क्रम वर्ग नियम, श्वेत प्रकाश का स्पेक्ट्रम आदि की बाढ़-सी आ गई । वापस कैम्ब्रिज लौटने पर उन्होंने प्रकाशिकी में अपने आविष्कारों को आगे बढ़ाया तथा परावर्ती दूरदर्शक की रचना की।

सन् 1684 ई. में अपने मित्र एडमण्ड हेली के उत्साहित करने पर न्यूटन ने अपने वैज्ञानिक आविष्कारों को लिखना आरंभ किया और "दि प्रिंसीपिया मैथेमेटिका" नामक महान ग्रंथ की रचना की जो किसी भी काल में रचे गए महानतम ग्रंथों में से एक माना जाता है । इसी ग्रंथ में उन्होंने गति के तीनों नियमों तथा गुरुत्वाकर्षण के सार्वत्रिक नियम का प्रतिपादन किया है जो केप्लर के ग्रहीय कक्षाओं के तीनों नियमों की विधिवत व्याख्या करते हैं । इस ग्रंथ में नई-नई पथ प्रदर्शक उपलब्धियां कूट-कूट कर भरी थीं जिनमें से कुछ प्रमुख इस प्रकार हैं : तरल यांत्रिकी के मूल सिद्धांत, तरंग गति का गणित, पृथ्वी, सूर्य तथा अन्य ग्रहों की संहतियों का परिकलन, विषुवों के पुरस्सरण की व्याख्या, ज्वार-भाटों का सिद्धांत, आदि । सन् 1704 ई. में न्यूटन ने एक अन्य उत्कृष्ट ग्रंथ "ऑप्टिक्स" प्रकाशित किया जिसमें उन्होंने अपने प्रकाश तथा वर्ण संबंधी कार्य का सार प्रस्तुत किया ।

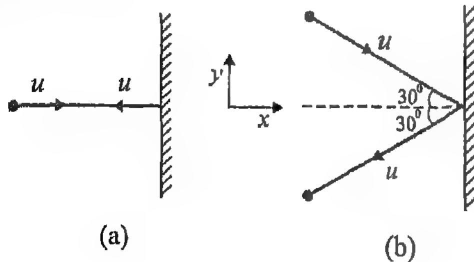
कॉपरनिकस ने जिस वैज्ञानिक क्रांति को प्ररित किया और जिसे केप्लर तथा गैलीलियो ने प्रबलता से आगे प्रचलित किया उसी का भव्य संपूरण न्यूटन द्वारा हुआ । न्यूटनी यांत्रिकी ने पार्थिव तथा आकाशीय परिघटनाओं को एकीकृत किया । एक ही समीकरण पृथ्वी पर सेब के गिरने तथा पृथ्वी के चारों ओर चंद्रमा की परिक्रमा करने को नियंत्रित कर सकती थी । विवेक के युग का उदय हो चुका था ।

विचार करते हैं, तो $\mathbf{F}_{AB}$ तथा $\mathbf{F}_{BA}$ उस निकाय $(A+B)$ के आंतरिक बल हैं । ये दोनों मिलकर एक शून्य बल देते हैं। इस प्रकार किसी पिण्ड अथवा कणों के निकाय में आंतरिक बल युगलों में निरस्त हो जाते हैं । यह एक महत्त्वपूर्ण तथ्य है जो द्वितीय नियम को किसी पिण्ड अथवा कणों के निकाय पर अनुप्रयोज्य होने योग्य बनाता है । (देखिए अध्याय 7)

▶ ***उदाहरण 5.4*** दो सर्वसम बिलियर्ड गेंदें किसी दृढ़ दीवार से समान चाल से, परंतु भिन्न कोणों पर, टकराती हैं तथा नीचे दर्शाए चित्र की भाँति चाल में बिना क्षय हुए परावर्तित हो जाती हैं । (i) प्रत्येक गेंद के कारण दीवार पर बल की दिशा क्या है ? तथा (ii) दीवार द्वारा दोनों गेंदों पर लगे आवेगों का अनुपात क्या है ?

हल स्वाभाविक रूप में इन प्रश्नों के उत्तर इस प्रकार होंगे- (i) यह हो सकता है कि (a) में गेंद के कारण दीवार पर लगा बल दीवार के अभिलंबवत् हो जबकि (b) में गेंद के कारण दीवार पर लगा बल दीवार पर अभिलंब के साथ 30° का कोण बनाता है । यह उत्तर सही नहीं है । दोनों ही प्रकरणों में दीवार पर लगा बल दीवार के अभिलंबवत् है ।

दीवार पर लगे बल को कैसे ज्ञात करें ? इसकी गति के बारे में हमें कोई जानकारी नहीं है । इसके लिए एक परोक्ष विधि अपनाते हैं जिसमें पहले हम द्वितीय नियम का उपयोग करके दीवार के कारण गेंद पर लगे बल (अथवा आवेग) पर विचार करते हैं और तत्पश्चात् (i) का उत्तर देने के लिए तृतीय नियम का उपयोग करते हैं । मान लीजिए प्रत्येक गेंद की संहति m है तथा दीवार से टकराने से पूर्व और टकराने के पश्चात् दोनों गेंदों की चाल u है । चित्र में दर्शाए गये के अनुसार x- तथा y-अक्षों का चुनाव कीजिए, तथा प्रत्येक प्रकरण में गेंद के संवेग में परिवर्तन पर विचार कीजिए :



चित्र 5.6

प्रकरण (a)

$(p_x)^{\text{initial}} = mu \qquad (p_y)^{\text{initial}} = 0$

$(p_x)^{\text{final}} = -mu \qquad (p_y)^{\text{final}} = 0$

संवेग आवेग सदिश में परिवर्तन होता है, अत:

आवेग का x-घटक $= -2\,mu$

आवेग का y-घटक $= 0$

आवेग तथा बल समान दिशा में हैं, उपरोक्त चर्चा से यह स्पष्ट है कि दीवार के कारण गेंद पर लगा बल दीवार के अभिलंबवत्, तथा गति की ऋणात्मक x-दिशा के अनुदिश है । न्यूटन के गति के तृतीय नियम का उपयोग करने पर गेंद के कारण दीवार पर लगा बल दीवार के अभिलंबवत्, तथा गति की धनात्मक x-दिशा के अनुदिश है । चूंकि इस समस्या में यह नहीं बताया गया है कि दीवार से टक्कर में लगा अल्प समय कितना है, अत: बल के परिमाण को सुनिश्चित नहीं किया जा सकता ।

प्रकरण (b)

$(p_x)^{\text{initial}} = mu \cos 30° \qquad (p_y)^{\text{initial}} = -mu \sin 30°$

$(p_x)^{\text{final}} = -mu \cos 30° \qquad (p_y)^{\text{final}} = -mu \sin 30°$

ध्यान दीजिए, टकराने के पश्चात् p_x का चिह्न परिवर्तित हो जाता है, जबकि p_y का नहीं होता । अत:

आवेग का x-घटक $= -2\,mu \cos 30°$

आवेग का y-घटक $= 0$

आवेग (तथा बल) की दिशा वही है जो (a) में थी: यह दीवार के अभिलंबवत् ऋणात्मक x- दिशा के अनुदिश है । पहले की ही भांति, न्यूटन के तृतीय नियम का उपयोग करने पर गेंद के कारण दीवार पर बल दीवार के अभिलंबवत् धनात्मक x-दिशा के अनुदिश है । प्रकरण (a) व प्रकरण (b) में गेंद को दीवार द्वारा प्रदान किए गए आवेगों के परिमाणों का अनुपात है :

$$\frac{2mu}{2mu\cos 30°} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.2$$ ◀

5.7 संवेग-संरक्षण

न्यूटन के गति के द्वितीय तथा तृतीय नियम एक अत्यन्त महत्त्वपूर्ण परिणाम : संवेग-संरक्षण नियम की ओर अग्रसर करते हैं । एक परिचित उदाहरण पर विचार कीजिए । किसी बंदूक से एक गोली छोड़ी जाती है । यदि बंदूक द्वारा गोली पर लगा बल $\mathbf{F}$ है, तो न्यूटन के तृतीय नियम के अनुसार गोली द्वारा बंदूक पर लगने वाला बल $-\mathbf{F}$ है । दोनों बल समान समय अंतराल Δt तक कार्य करते हैं । द्वितीय नियम के अनुसार गोली का संवेग परिवर्तन $\mathbf{F}\,\Delta t$ है तथा बंदूक का संवेग परिवर्तन $-\mathbf{F}\,\Delta t$ है । चूंकि आरंभ में दोनों विराम में हैं, अत: संवेग परिवर्तन अंतिम संवेग के बराबर है । इस प्रकार यदि छोड़ने के पश्चात् गोली का संवेग, $\mathbf{p}_b$ है तथा बंदूक का प्रतिक्षेप संवेग, $\mathbf{p}_g$ है, तो $\mathbf{p}_g = -\mathbf{p}_b$ अर्थात् $\mathbf{p}_g + \mathbf{p}_b = 0$ अर्थात्, गोली बंदूक निकाय का कुल संवेग संरक्षित रहता है ।

इस प्रकार, किसी वियुक्त निकाय (अर्थात् कोई निकाय जिस पर कोई बाह्य बल नहीं लगता है ।) में, निकाय के कणों

के युगलों के बीच पारस्परिक बल व्यष्टि कणों में संवेग परिवर्तन कर सकते हैं, परंतु चूंकि प्रत्येक युगल के लिए पारस्परिक बल समान एवं विपरीत हैं संवेग परिवर्तन युगलों में निरस्त हो जाते हैं तथा कुल संवेग अपरिवर्तित रहता है । इस तथ्य को ***संवेग-संरक्षण नियम*** कहते हैं । इस नियम के अनुसार :

अन्योन्य क्रिया करने वाले कणों के किसी वियुक्त निकाय का कुल संवेग संरक्षित रहता है ।

संवेग-संरक्षण नियम के अनुप्रयोग का एक महत्त्वपूर्ण उदाहरण दो पिण्डों में संघट्टन है । दो पिण्डों A व B पर विचार कीजिए जिनके आरंभिक संवेग $\mathbf{p}_A$ तथा $\mathbf{p}_B$ हैं । दोनों में संघट्ट होता है और पृथक हो जाते हैं । यदि पृथक होने के पश्चात् उनके अंतिम संवेग क्रमशः $\mathbf{P'}_A$ तथा $\mathbf{P'}_B$ हैं; तो द्वितीय नियम के द्वारा

$$\mathbf{F}_{AB}\Delta t = \mathbf{p'}_A - \mathbf{p}_A$$

तथा, $\mathrm{F}_{BA}\Delta t = \mathbf{p'}_B - \mathbf{p}_B$

यहां हमने दोनों बलों के लिए समान समय अंतराल Δt लिया है, यह वह समय है जिसमें दोनों पिण्ड संपर्क में रहते हैं ।

चूंकि $\mathbf{F}_{AB} = -\ \mathbf{F}_{BA}$ तृतीय नियम द्वारा,

$$\mathbf{p'}_A - \mathbf{p}_A = -(\mathbf{p'}_B - \mathbf{p}_B)$$

अर्थात् $\mathbf{p'}_A + \mathbf{p'}_B = (\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B)$

जो यह दर्शाता है कि वियुक्त निकाय (A+B) का कुल अंतिम संवेग उसके आरंभिक संवेग के बराबर है । ध्यान दीजिए, यह नियम दोनों प्रकार के संघट्टनों – प्रत्यास्थ तथा अप्रत्यास्थ, पर लागू होता है । प्रत्यास्थ संघट्टन में आगे और भी शर्त है कि निकाय की कुल आरंभिक गतिज ऊर्जा निकाय की कुल अंतिम ऊर्जा के बराबर होती है (देखिए अध्याय 6) ।

यहां संवेग संरक्षण नियम को यांत्रिकी के गति के नियमों से व्युत्पन्न किया गया है । तथापि, इस नियम का विस्तार यांत्रिकी के प्रभाव-क्षेत्र सीमाओं से बाहर तक है । यह प्रकृति का मूल नियम है और यह वहां भी सत्य प्रमाणित होता है जहां गति का तृतीय नियम मूल रूप में सत्य नहीं होता, उदाहरण के लिए, गतिशील आवेशित कणों के बीच अन्योन्य क्रिया के लिए (इसके विषय में आप आगे अध्ययन करेंगे) । भौतिकी में यह एक ऐसा उदाहरण है जिसमें किसी नियम का परिणाम, उस नियम की तुलना में जिससे वह परिणाम व्युत्पन्न हुआ है, अधिक सत्य प्रमाणित होता है ।

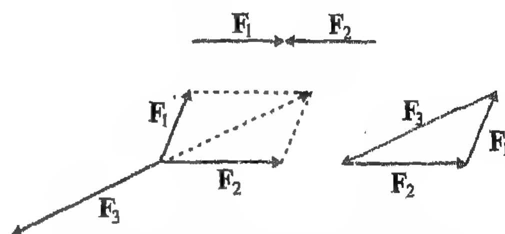
5.8 किसी कण की साम्यावस्था

यांत्रिकी में किसी कण की साम्यावस्था का उल्लेख उन स्थितियों के लिए किया जाता है जिनमें कण पर नेट बाह्य बल शून्य* हो । प्रथम नियम के अनुसार, इसका यह अर्थ है कि या तो कण विराम में है अथवा एक समान गति में है । यदि किसी कण पर दो बल $\mathbf{F}_1$ तथा $\mathbf{F}_2$ कार्य करते हैं, तो सम्यावस्था के लिए आवश्यक है कि,

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 \qquad (5.10)$$

अर्थात् कण पर कार्यरत दोनों बल समान एवं विपरीत होने चाहिए । तीन संगामी बलों, $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ तथा $\mathbf{F}_3$ के अधीन साम्यावस्था (अथवा संतुलन) के लिए इन तीनों बलों का सदिश योग शून्य होना चाहिए :

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = 0 \qquad (5.11)$$

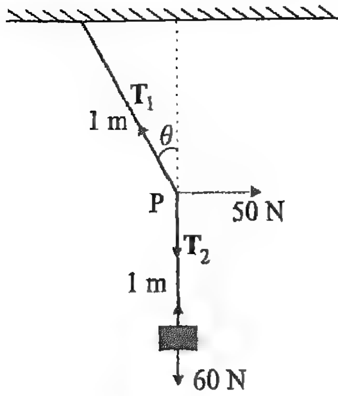


चित्र 5.7 संगामी बलों के अधीन संतुलन

दूसरे शब्दों में, बलों के समान्तर चतुर्भुज नियम द्वारा प्राप्त किन्हीं दो बलों, मान लीजिए $\mathbf{F}_1$ तथा $\mathbf{F}_2$, का परिणामी तीसरे बल $\mathbf{F}_3$, के समान एवं विपरीत होना चाहिए । चित्र 5.7 के अनुसार साम्यावस्था में तीनों बलों को किसी त्रिभुज की भुजाओं, जिस पर चक्रीय क्रम में सदिश तीर बने हों, द्वारा निरूपित किया जा सकता है । इस परिणाम का व्यापीकरण बलों की किसी भी संख्या के लिए किया जा सकता है । आरोपित बलों $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$.... $\mathbf{F}_n$ के अधीन कोई कण साम्यावस्था में होगा यदि उन बलों को n-भुजा के बंद बहुभुज की समान दिशा में दिष्ट तीर-मुक्त भुजाओं द्वारा निरूपित किया जा सके ।

▶ *उदाहरण 5.5* 6 kg संहति के किसी पिण्ड को छत से 2 m लंबाई की डोरी से लटकाया गया है । डोरी के मध्य-बिंदु पर चित्र में दर्शाए अनुसार क्षैतिज दिशा में 50 N बल लगाया जाता है । साम्यावस्था में डोरी ऊर्ध्वाधर से कितना कोण बनाती है ? ($g = 10\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ लीजिए)। डोरी की संहति को नगण्य मानिए ।

* किसी पिण्ड की साम्यावस्था के लिए केवल स्थानान्तरीय साम्यावस्था (शून्य नेट बाह्य बल) ही आवश्यक नहीं है वरन् घूर्णी साम्यावस्था (शून्य नेट बाह्य बल आघूर्ण) भी आवश्यक है, यह हम अध्याय 7 में देखेंगे। फिर भी, किसी कण के लिए, घूर्णी स्वातंत्र्य नहीं होती, इसलिए केवल स्थानान्तरीय साम्यावस्था ही प्रासंगिक होती है ।



चित्र 5.8

हल सर्वप्रथम भार W की साम्यावस्था पर विचार कीजिए । स्पष्ट है, $T_2 = 6 \times 10 = 60$ N । अब तीन बलों - तनाव T_1 तथा T_2, तथा 50 N क्षैतिज बल, की क्रियाओं के अधीन संहति बिंदु P की साम्यावस्था पर विचार कीजिए । परिणामी बल के क्षैतिज तथा ऊर्ध्वाधर घटकों को पृथक-पृथक शून्य होना चाहिए :

$$T_1 \cos\theta = T_2 = 60 \text{ N}$$

$$T_1 \sin\theta = 50 \text{ N}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{5}{6} \text{ अथवा } \theta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{6}\right) = 40^\circ$$

ध्यान दीजिए, उत्तर न तो डोरी (जिसका द्रव्यमान नगण्य माना है) की लंबाई पर निर्भर करता है और न ही उस बिंदु की स्थिति पर निर्भर करता है जिस पर क्षैतिज बल लगाया गया है। ◄

5.9 यांत्रिकी में सामान्य बल

यांत्रिकी में हमारा सामना कई प्रकार के बलों से होता है । वास्तव में, गुरुत्वाकर्षण बल सर्वव्यापक है । पृथ्वी पर स्थित सभी वस्तुएं पृथ्वी के गुरुत्व बल का अनुभव करती हैं । गुरुत्वाकर्षण बल आकाशीय पिण्डों की गतियों को नियंत्रित करता है । गुरुत्वाकर्षण बल किसी दूरी पर बिना मध्यवर्ती माध्यम के कार्य कर सकता है ।

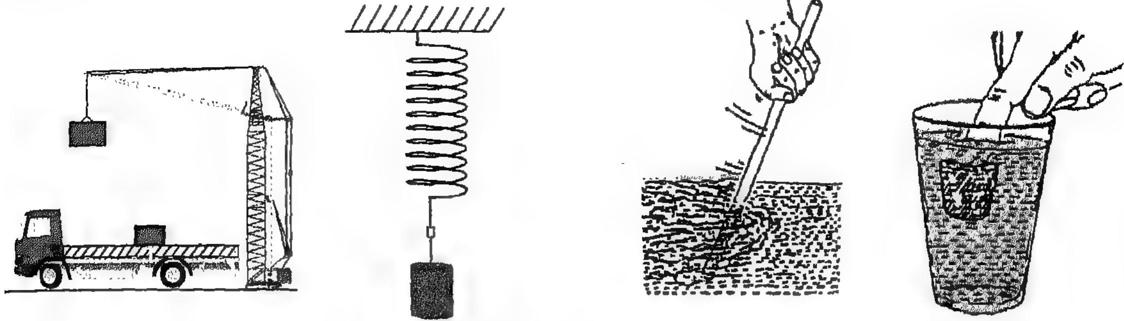
यांत्रिकी में सामान्यतः आने वाले सभी बल संपर्क बल* हैं । जैसा कि नाम से संकेत मिलता है, किसी पिण्ड पर संपर्क बल किसी अन्य पिण्ड ठोस अथवा तरल के संपर्क द्वारा उत्पन्न होता है । जब कई पिण्ड संपर्क में होते हैं, (उदाहरणार्थ, मेज पर रखी कोई पुस्तक, छड़ों, कब्जों तथा अन्य प्रकार के आधारों से संबद्ध दृढ़ पिण्डों का कोई निकाय), तब वहां तृतीय नियम को संतुष्ट करने वाले (पिण्डों के प्रत्येक युगल के लिए) पारस्परिक संपर्क बल होते हैं । संपर्क-पृष्ठों के अभिलंबवत् संपर्क बल के घटक को अभिलंब बल (अथवा अभिलंब प्रतिक्रिया) कहते हैं । संपर्क-पृष्ठों के समान्तर घटक को घर्षण बल कहते हैं । संपर्क बल तब भी उत्पन्न होते हैं जब ठोस तरलों के संपर्क में आते हैं । उदाहरण के लिए, जब किसी ठोस को किसी तरल में डुबाते हैं, तो एक उपरिमुखी बल (उत्प्लावन बल) होता है जो उस ठोस द्वारा विस्थापित तरल के भार के बराबर होता है । श्यान बल, वायु-प्रतिरोध, आदि भी संपर्क बलों के उदाहरण हैं ।

दो सामान्य बल कमानी बल तथा तनाव हैं । जब किसी कमानी को किसी बाह्य बल द्वारा संपीडित अथवा विस्तारित किया जाता है, तब एक प्रत्यानयन बल उत्पन्न होता है । यह बल प्रायः कितना संपीडन अथवा दैर्ध्यवृद्धि के अनुक्रमानुपाती होता है (अतानित विन्यास से छोटे विस्थापनों के लिए) । कमानी बल F को इस प्रकार, $F = -kx$ व्यक्त किया जाता है, यहां x विस्थापन है तथा k को कमानी-स्थिरांक या बल-स्थिरांक कहते हैं । यहां ऋणात्मक चिह्न यह दर्शाता है कि बल अतानित अवस्था से विस्थापन के विपरीत है । डोरी में भी कमानी की भांति तनन के लिए प्रत्यास्थता होती है परंतु उसमें संपीडन के लिए कोई स्थान नहीं होता । किसी अवितान्य डोरी के लिए, बल नियतांक इतना अधिक होता है कि बहुत कम विस्तार (लगभग शून्य) ही परिमित प्रत्यानयन बल उत्पन्न कर देता है। किसी डोरी के प्रत्यानयन बल को तनाव कहते हैं । [परंपरा के अनुसार समस्त डोरी के अनुदिश एक समान तनाव **T** मान लेते हैं, स्वयं डोरी की गति के लिए द्वितीय नियम का अनुप्रयोग करने पर, आप यह देख सकते हैं कि नगण्य संहति की डोरी के लिए, अथवा यदि डोरी साम्यावस्था में है, तो डोरी के प्रत्येक भाग पर समान तनाव मानने की परंपरा सही है ।]

अध्याय 1 में हमने यह सीखा कि प्रकृति में केवल चार मूल बल हैं । इनमें दुर्बल तथा प्रबल बल ऐसे प्रभाव क्षेत्र में प्रकट होते हैं, जिनका यहां हमसे संबंध नहीं है । यांत्रिकी के संदर्भ में केवल गुरुत्वाकर्षण तथा वैद्युत बल ही प्रासंगित होते हैं । यांत्रिकी के विभिन्न संपर्क बल जिनका हमने अभी वर्णन किया है । मूल रूप से वैद्युत बलों से ही उत्पन्न होते हैं । यह बात आश्चर्यजनक प्रतीत हो सकती है क्योंकि यांत्रिकी में हम अनावेशित तथा अचुंबकीय पिण्डों की चर्चा कर रहे हैं । परंतु सूक्ष्म स्तर पर, सभी पिण्ड आवेशित अवयवों (नाभिकों तथा इलेक्ट्रॉनों) से मिलकर बने हैं, आण्विक संघट्टों तथा प्रतिघातों, पिण्डों की प्रत्यास्थता आदि के कारण उत्पन्न विभिन्न संपर्क बलों की खोजबीन से ज्ञात होता है कि अंततः ये विभिन्न पिण्डों के आवेशित अवयवों के बीच वैद्युत बल ही हैं । इन बलों की विस्तृत सूक्ष्म उत्पत्ति के विषय में जानकारी स्थूल स्तर पर यांत्रिकी की समस्याओं को हल करने की दृष्टि से जटिल तथा

* सुगमता के लिए यहां हम आवेशित तथा चुंबकीय पिण्डों पर विचार नहीं कर रहे हैं । इनके लिए, गुरुत्वाकर्षण के अतिरिक्त, यहां वैद्युत तथा चुंबकीय असंपर्क बल हैं ।

अप्रासंगिक है । यही कारण है कि उन्हें विभिन्न प्रकार के बलों के रूप माना जाता है तथा उनके अभिलाक्षणिक गुणों का आनुभविक निर्धारण किया जाता है ।



चित्र 5.9 यांत्रिकी में संपर्क बलों के कुछ उदाहरण ।

5.9.1 घर्षण

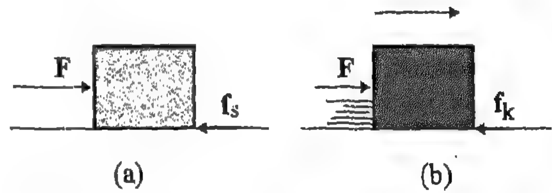
आइए, फिर से क्षैतिज मेज पर रखे m संहति के पिण्ड वाले उदाहरण पर विचार करें । अधोमुखी गुरुत्व बल ($m\mathbf{g}$) को मेज का अभिलंब बल (**R**) निरस्त कर देता है । अब मानिए कि पिण्ड पर कोई बाह्य बल F क्षैतिजतः आरोपित किया जाता है । अनुभव से हमें यह ज्ञात है कि परिमाण में छोटा बल आरोपित करने पर पिण्ड गतिशील नहीं होगा । परंतु यदि आरोपित बल ही पिण्ड पर लगा एक मात्र बाह्य बल है, तो यह बल परिमाण में चाहे कितना भी छोटा क्यों न हो, पिण्ड को F/m त्वरण से गतिशील कर देगा । स्पष्ट है, कि पिण्ड विराम में है क्योंकि पिण्ड पर कोई अन्य बाह्य बल क्षैतिज दिशा में कार्य करने लगता है, जो अरोपित बल F का विरोध करता है, फलस्वरूप पिण्ड पर नेट बल शून्य हो जाता है । यह विरोधी बल f_s, जो मेज के संपर्क में पिण्ड के पृष्ठ के समान्तर लगता है, घषर्ण बल अथवा केवल घर्षण कहलाता है । यहां पादाक्षर s को स्थैतिक घर्षण के लिए प्रयोग किया गया है, ताकि हम इसकी गतिज घर्षण f_k जिसके विषय में बाद में विचार करेंगे, से भिन्न पहचान कर सकें । ध्यान दीजिए, स्थैतिक घर्षण का अपना कोई आस्तित्व नहीं होता । जब तक कोई बाह्य बल आरोपित नहीं होता, तब तक स्थैतिक घर्षण भी नहीं होता । जिस क्षण कोई बल आरोपित होता है, उसी क्षण घर्षण बल भी लगने लगता है । पिंड को विराम में रखते हुए जब आरोपित बल F बढ़ता है, आरोपित बल के समान व विपरीत दिशा में रहते हुए f_s भी बढ़ता है । अतः विशेषक **स्थैतिक** का उपयोग किया गया है । स्थैतिक घर्षण **समुपस्थित गति** का विरोध करता है । समुपस्थित गति का तात्पर्य ऐसी गति से है जो तभी होगी जब (परंतु वास्तव में होती नहीं) किसी आरोपित बल के अंतर्गत घर्षण अनुपस्थित हो ।

हम अनुभव से यह जानते हैं कि, जैसे आरोपित बल एक निश्चित सीमा से बढ़ता है, पिण्ड गति आरंभ कर देता है । प्रयोगों द्वारा यह पाया गया है कि स्थैतिक घर्षण का सीमान्त मान ($f_s^{\text{अधिकतम}}$) संपर्क पृष्ठ के क्षेत्रफल पर निर्भर नहीं करता तथा अभिलंब बल (R) के साथ लगभग इस प्रकार परिवर्तित होता है :

$$f_s^{\text{अधिकतम}} = \mu_s R \qquad (5.12)$$

यहां μ_s आनुपातिकता स्थिरांक है, जो केवल संपर्क-पृष्ठों के युगल की प्रकृति पर ही निर्भर करता है । इस स्थिरांक μ_s को स्थैतिक घर्षण गुणांक कहते हैं । स्थैतिक घर्षण नियम को इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$f_s \le \mu_s R \qquad (5.13)$$



चित्र 5.10 स्थैतिक तथा सर्पी घर्षण: (a) स्थैतिक घर्षण पिण्ड की समुपस्थित गति का विरोध करता है । जब बाह्य बल स्थैतिक घर्षण की अधिकतम सीमा से बढ़ जाता है, तो गति आरंभ होती है । (b) एक बार जब पिण्ड गतिशील हो जाता है तो उस पर सर्पी अथवा गतिज घर्षण कार्य करने लगता है जो संपर्क पृष्ठों के बीच आपेक्ष गति का विरोध करता है । गतिज घर्षण प्रायः स्थैतिक घर्षण के अधिकतम मान से कम होता है ।

यदि आरोपित बल F का मान $f_s^{\text{अधिकतम}}$ से अधिक हो जाता है, तो पिण्ड पृष्ठ पर सरकना आरंभ कर देता है । प्रयोगों द्वारा यह पाया गया है कि जब आपेक्ष गति आरंभ हो जाती है, तब घर्षण बल, अधिकतम स्थैतिक घर्षण बल $f_s^{\text{अधिकतम}}$ से कम हो जाता है । वह घर्षण बल, जो दो संपर्क पृष्ठों के बीच आपेक्ष गति का विरोध करता है, गतिज अथवा सर्पी घर्षण कहलाता है और इसे f_k द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है । स्थैतिक घर्षण की भांति गतिज घर्षण भी संपर्क पृष्ठों के क्षेत्रफल पर निर्भर नहीं करता । साथ ही, यह आपेक्ष गति के वेग पर भी लगभग निर्भर नहीं करता । यह एक सन्निकट नियम, जो स्थैतिक घर्षण के लिए नियम के समरूप है, को संतुष्ट करता है :

$$f_k = \mu_k R \qquad (5.14)$$

यहां μ_k, गतिज घर्षण गुणांक हैं जो केवल संपर्क पृष्ठों के युगल की प्रकृति पर निर्भर करता है। जैसा कि ऊपर वर्णन किया जा चुका है, प्रयोग यह दर्शाते हैं कि μ_k, μ_s से कम होता है। जब आपेक्ष गति आरंभ हो जाती है तो, द्वितीय नियम के अनुसार, गतिमान पिण्ड का त्वरण $(F-f_k)/m$ होता है। एकसमान वेग से गतिमान पिण्ड के लिए, $F = f_k$। यदि पिण्ड से आरोपित बल को हटा लें तो उसका त्वरण $-f_k/m$ होता है और अंतिमत: पिण्ड रुक जाता है।

ऊपर वर्णन किए गए घर्षण के नियमों को मूल नियमों की उस श्रेणी में नहीं माना जाता जिसमें गुरुत्वाकर्षण, वैद्युत तथा चुंबकीय बलों को माना जाता है। ये आनुभविक संबंध हैं, जो केवल सीमित प्रभाव क्षेत्रों में ही सन्निकटत: सही हैं। फिर भी ये नियम यांत्रिकी में व्यावहारिक परिकलनों में बहुत लाभप्रद हैं।

इस प्रकार, जब दो पिण्ड संपर्क में होते हैं तब प्रत्येक पिण्ड अन्य पिण्ड के द्वारा संपर्क बल का अनुभव करता है। परिभाषा के अनुसार, घर्षण बल संपर्क बल का संपर्क पृष्ठों के समान्तर घटक होता है, जो दो पृष्ठों के बीच समुपस्थित अथवा वास्तविक आपेक्ष गति का विरोध करता है। ध्यान दीजिए, घर्षण बल गति का नहीं वरन् आपेक्ष गति का विरोध करता है। त्वरित गति से गतिमान रेलगाड़ी के किसी डिब्बे में रखे बॉक्स पर विचार कीजिए। यदि बॉक्स रेलगाड़ी के आपेक्ष स्थिर है, तो वास्तव में वह रेलगाड़ी के साथ त्वरित हो रहा है। वह कौन-सा बल है जो बॉक्स को त्वरित कर रहा है ? स्पष्ट है कि क्षैतिज दिशा में एक ही कल्पनीय बल है, और वह है घर्षण बल। यदि कोई घर्षण नहीं है तो रेलगाड़ी के डिब्बे का फर्श तो आगे की ओर सरकेगा तथा जड़त्व के कारण बॉक्स अपनी आरंभिक स्थिति पर ही रहेगा (तथा रेलगाड़ी के डिब्बे की पिछली दीवार से टकराएगा)। इस समुपस्थित आपेक्ष गति का स्थैतिक घर्षण f_s द्वारा विरोध किया जाता है। यहां स्थैतिक घर्षण, बॉक्स को रेलगाड़ी के आपेक्ष स्थित रखते हुए, बॉक्स तथा रेलगाड़ी को समान त्वरण प्रदान करता है।

> *उदाहरण 5.6* कोई बॉक्स रेलगाड़ी के फर्श पर स्थिर रखा है। यदि बॉक्स तथा रेलगाड़ी के फर्श के बीच स्थैतिक, घर्षण गुणांक 0.15 है, तो रेलगाड़ी का वह अधिकतम त्वरण ज्ञात कीजिए जो बॉक्स को रेलगाड़ी के फर्श पर स्थिर रखने के लिए आवश्यक है।

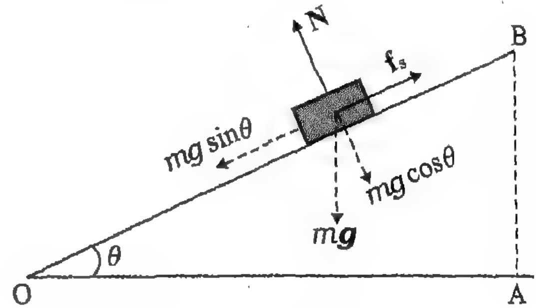
हल चूंकि बॉक्स में त्वरण स्थैतिक घर्षण के कारण ही है, अत:

$$m\,a = f \le \mu_s N = \mu_s m\, g$$

अर्थात् $a \le \mu_s g$

$$\therefore a_{\text{अधिकतम}} = \mu_s g = 0.15 \times 10\ \text{m s}^{-2} = 1.5\ \text{m s}^{-2}$$

> *उदाहरण 5.7* 4 kg का कोई गुटका एक क्षैतिज समतल पर रखा है। समतल को धीरे-धीरे तब तक आनत किया जाता है जब तक क्षैतिज से किसी कोण $\theta = 15°$ पर वह गुटका सरकना आरंभ नहीं कर देता। पृष्ठ और गुटके के बीच स्थैतिक घर्षण गुणांक क्या है ?



चित्र 5.11

हल आनत समतल पर विरामावस्था में रखे m संहति के गुटके पर कार्यरत बल है (*i*) गुटके का भार mg ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर, (*ii*) समतल द्वारा गुटके पर लगाया गया अभिलंब बल N, तथा (*iii*) समुपस्थित गति का विरोध करने वाला स्थैतिक घर्षण बल f_s। गुटके की साम्यावस्था में इन बलों का परिणामी शून्य बल होना चाहिए। भार mg को चित्र में दर्शाए अनुसार दो दिशाओं में अपघटित करने पर

$$mg \sin\theta = f_s \qquad mg\cos\theta = N$$

जैसे-जैसे θ बढ़ता है, स्वसमायोजी घर्षण बल f_s तब तक बढ़ता है जब तक, $\theta = \theta_{\text{अधिकतम}}$ पर यह अपना अधिकतम मान प्राप्त नहीं कर लेता, $f_s^{\text{अधिकतम}} = \mu_s N$, जहां μ_s गुटके तथा समतल के बीच स्थैतिक घर्षण गुणांक है।

अत:

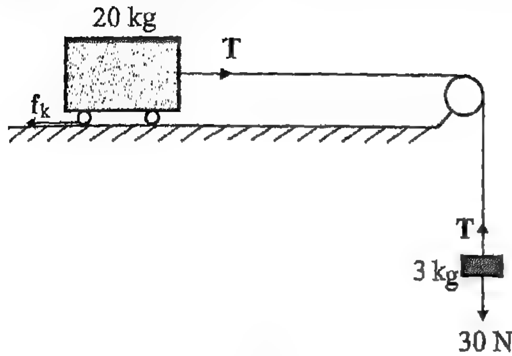
$$\tan\theta_{\text{अधिकतम}} = \mu_s \text{ अथवा } \theta_{\text{अधिकतम}} = \tan^{-1}\mu_s$$

जब θ का मान $\theta_{\text{अधिकतम}}$ से केवल कुछ ही अधिक होता है, तो गुटके पर एक लघु नेट बल लगता है और गुटका सरकना आरंभ कर देता है। ध्यान दीजिए, $\theta_{\text{अधिकतम}}$ केवल μ_s पर ही निर्भर करता है, यह गुटके की संहति पर निर्भर नहीं करता।

$\theta_{\text{अधिकतम}} = 15°$ के लिए,

$$\mu_s = \tan 15° = 0.27$$

> *उदाहरण 5.8* चित्र में दर्शाए ब्लॉक-ट्राली निकाय का त्वरण क्या है, यदि ट्राली और पृष्ठ के बीच गतिज घर्षण गुणांक 0.04 है ? डोरी में तनाव क्या है ? ($g = 10 \text{ m s}^{-2}$ लीजिए), डोरी की संहति नगण्य मानिए ।



चित्र 5.12

हल चूंकि डोरी की लंबाई नियत है, 3 kg के ब्लॉक तथा 20 kg की ट्राली दोनों के त्वरणों के परिमाण समान, a, हैं । ब्लॉक की गति पर द्वितीय नियम का अनुप्रयोग करने पर,

$$30 - T = 3a$$

ट्राली की गति पर द्वितीय नियम का अनुप्रयोग करने पर,

$$T - f_k = 20a$$

अब $f_k = \mu_k N$, जहां μ_k गतिज घर्षण गुणांक है तथा N अभिलंब बल है । यहां $\mu_k = 0.04$, तथा $N = 20 \times 10 = 200 \text{ N}$

इस प्रकार, ट्राली की गति के लिए समीकरण है

$T - 0.04 \times 200 = 20\,a$ अथवा $T - 8 = 20\,a$

इस समीकरणों से हमें प्राप्त होता है,

$$a = \frac{22}{23} \text{ m s}^{-2} = 0.96 \text{ m s}^{-2}$$

तथा $T = 27.1 \text{ N}$ ◀

घर्षण की उत्पत्ति का कारण आण्विक स्तर पर पृष्ठों की विषमता है । स्थूल स्तर पर पृष्ठ चिकने प्रतीत हो सकते हैं परंतु सूक्ष्म स्तर पर चोटियां तथा घाटियां जैसी दिखाई देती हैं । खुरदरे पृष्ठों पर इनके आकार बड़े तथा संख्या अधिक होती है । जब आप किसी पृष्ठ पर पॉलिश करते हैं तो आप इनके आकार को कम कर देते हैं । यह विषमताएं जब कभी दो पृष्ठों के बीच आपेक्ष समुपस्थित अथवा वास्तविक गति होती है, विरोधी बलों को जन्म देती हैं । इन विरोधी बलों को उत्पन्न करने के लिए उत्तरदायी वास्तविक आण्विक प्रक्रियाएं अत्यन्त जटिल हैं और उन्हें सुलझा पाना सरल नहीं है । यही कारण है कि हमें घर्षण के सन्निकट आनुभविक नियमों से ही संतोष करना पड़ता है ।

लोटनिक घर्षण

सिद्धांत रूप से क्षैतिज समतल पर किसी वलय (रिंग) अथवा गोल गेंद जैसे पिण्ड पर जो बिना सरके केवल लोटन कर रहा (लुढ़क) है, पर किसी भी प्रकार का कोई घर्षण बल नहीं लगेगा । लोटनिक गति करते किसी पिण्ड का हर क्षण समतल तथा पिण्ड के बीच केवल एक ही संपर्क बिंदु होता है तथा यदि कोई सरकन नहीं है तो इस तात्क्षणिक संपर्क बिंदु की समतल के आपेक्ष कोई गति नहीं होती । इस आदर्श स्थिति में गतिज अथवा स्थैतिक घर्षण शून्य होता है तथा पिण्ड को एक समान वेग से निरंतर लोटनिक गति करते रहना चाहिए । हम जानते हैं कि व्यवहार में ऐसा नहीं होगा, तथा गति में कुछ न कुछ अवरोध (लोटनिक घर्षण) अवश्य रहता है, अर्थात्, पिण्ड को निरंतर लोटनिक गति करते रहने के लिए उस पर कुछ बल लगाने की आवश्यकता होती है । समान भार के पिण्ड के लिए लोटनिक घर्षण सदैव ही सर्पी अथवा स्थैतिक घर्षण की तुलना में बहुत कम (यहां तक कि परिमाण की 2 अथवा 3 कोटि तक) होता है । यही कारण है कि मानव सभ्यता के इतिहास में भारी बोझों के परिवहन के लिए पहिए की खोज एक बड़ा मील का पत्थर माना गया है ।

लोटनिक घर्षण का उद्गम जटिल है यद्यपि यह सर्पी घर्षण के उद्भव से कुछ भिन्न है, लोटनिक गति के समय संपर्क पृष्ठों में क्षणमात्र के लिए विरूपण होता है, तथा इसके फलस्वरूप पिण्ड का कुछ परिमित क्षेत्रफल (कोई बिंदु नहीं), लोटनिक गति के समय पृष्ठ के संपर्क में होता है । इसका नेट प्रभाव यह होता है कि संपर्क बल का एक घटक पृष्ठ के समान्तर प्रकट होता है जो गति का अवरोध करता है ।

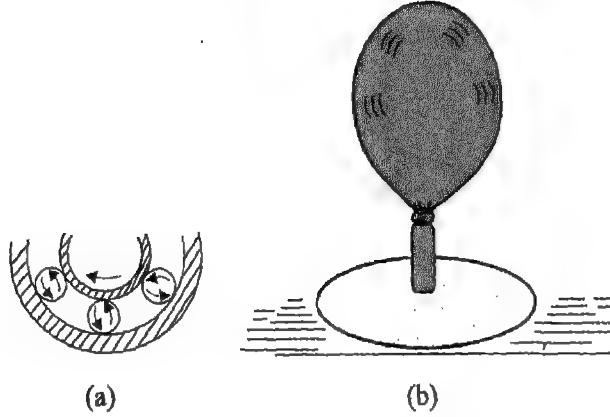
हम प्राय: घर्षण को एक अवांछनीय बल मानते हैं । बहुत सी स्थितियों में, जैसे किसी मशीन, जिसमें विभिन्न कल पुर्जे गति करते हों, में घर्षण की ऋणात्मक भूमिका होती है । यह आपेक्ष गतियों का विरोध करता है जिसके फलस्वरूप ऊष्मा, आदि के रूप में ऊर्जा-क्षय होता है । मशीनों में स्नेहक गतिज घर्षण को कम करने का एक साधन होता है । घर्षण को कम करने का एक अन्य उपाय मशीन के दो गतिशील भागों के बीच, बॉल-बेयरिंग लगाना है (क्योंकि दो संपर्क पृष्ठों तथा बाल बेयरिंगों के बीच लोटनिक घर्षण बहुत कम होता है, अत: ऊर्जा-क्षय घट जाता है । सापेक्ष गति करते दो ठोस पृष्ठों के बीच वायु की पतली परत बनाए रखकर भी प्रभावी ढंग से घर्षण को घटाया जा सकता है ।

तथापि, बहुत-सी व्यावहारिक स्थितियों में, घर्षण अत्यन्त आवश्यक होता है । गतिज घर्षण में ऊर्जा-क्षय होता है, फिर भी सापेक्ष गति को शीघ्र समाप्त करने में इसकी महत्त्वपूर्ण भूमिका है । मशीनों तथा यंत्रों में ब्रेक की भांति इसका उपयोग किया

जाता है । इसी प्रकार स्थैतिक घर्षण भी हमारे दैनिक जीवन में अत्यन्त महत्त्वपूर्ण है । हम घर्षण के कारण ही फर्श पर चल पाते हैं । अत्यधिक फिसलन वाली सड़क पर कार को चला पाना असंभव होता है । किसी साधारण सड़क पर, टायरों और सड़क के बीच घर्षण पहिए की घूर्णी गति को लोटनिक गति में रूपांतरित करके कार को त्वरित करने के लिए आवश्यक बाह्य बल प्रदान करता है ।

$$f = \frac{mv^2}{R} \leq \mu_s N \quad (5.17)$$

यहां प्रथम समीकरण लागू होता है, क्योंकि ऊर्ध्वाधर दिशा में कोई गति नहीं है (इसलिए त्वरण नहीं है) । वर्तुल गति के लिए आवश्यक अभिकेंद्र बल सड़क के पृष्ठ के अनुदिश है। यह बल कार के टायरों तथा सड़क के पृष्ठ के बीच पृष्ठ के अनुदिश



चित्र 5.13 घर्षण को घटाने के कुछ उपाय । (a) मशीन के गतिशील भागों के बीच बॉल-बेयरिंग लगाकर, (b) आपेक्ष गति करने वाले पृष्ठों के बीच वायु का संपीडित गद्दा ।

संपर्क बल के घटक, जो परिभाषा के अनुसार घर्षण बल ही है, द्वारा प्रदान किया जाना चाहिए । ध्यान दीजिए, यहां स्थैतिक घर्षण ही अभिकेंद्र त्वरण प्रदान करता है । स्थैतिक घर्षण, घर्षण की अनुपस्थिति में वृत्त से दूर जाती गतिमान कार की समुपस्थित गति का विरोध करता है ।

इन समीकरणों से हमें प्राप्त होता है,

$$v^2 \leq \mu_s Rg$$

यह संबंध कार की संहति पर निर्भर नहीं करता । इससे यह प्रदर्शित होता है कि μ_s तथा R के किसी दिए हुए मान के लिए कार की वर्तुल गति की कोई संभावित अधिकतम चाल होती है, जिसे इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है,

$$v_{\text{अधिकतम}} = \sqrt{\mu_s Rg} \quad (5.18)$$

यदि सड़क ढालू है (चित्र 5.14b), तो हम कार की वर्तुल गति में घर्षण के योगदान को घटा सकते हैं । क्योंकि यहां फिर ऊर्ध्वाधर दिशा में कोई त्वरण नहीं है,

$$N \cos\theta = mg + f \sin\theta$$

N तथा f के घटकों द्वारा अभिकेंद्र बल प्राप्त किया जाता है :

$$N \sin\theta + f \cos\theta = \frac{mv^2}{R}$$

5.10 वर्तुल (वृत्तीय) गति

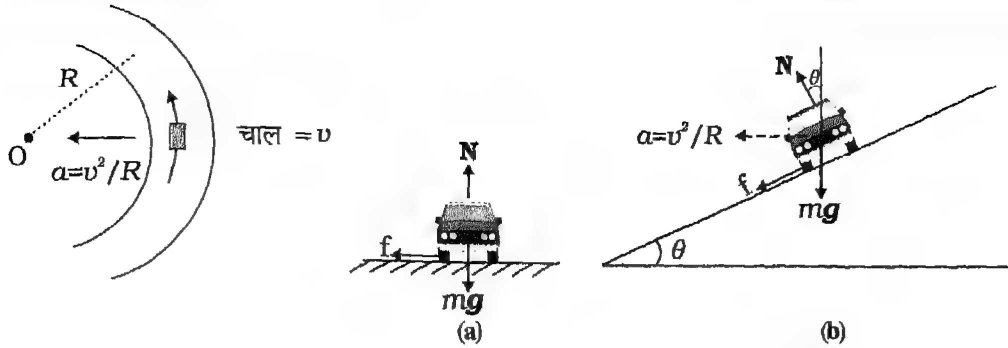
हमने अध्याय 4 में यह देखा कि R त्रिज्या के किसी वृत्त में एकसमान चाल v से गतिमान किसी पिण्ड का त्वरण v^2/R वृत्त के केंद्र की ओर निर्दिष्ट होता है । द्वितीय नियम के अनुसार इस त्वरण को प्रदान करने वाला बल है :

$$f = \frac{mv^2}{R} \quad (5.15)$$

जहां m पिण्ड की संहति है । केंद्र की ओर निर्दिष्ट इस बल को अभिकेंद्र बल कहते हैं । डोरी की सहायता से वृत्त में घूर्णन करने वाले पत्थर को डोरी में तनाव अभिकेंद्र बल प्रदान करता है । सूर्य के चारों ओर किसी ग्रह की गति के लिए आवश्यक अभिकेंद्र बल सूर्य के कारण उस ग्रह पर लगे गुरुत्वाकर्षण से मिलता है । किसी क्षैतिज सड़क पर कार को वृत्तीय मोड़ लेने के लिए आवश्यक अभिकेंद्र बल घर्षण बल प्रदान करता है ।

किसी सपाट सड़क तथा किसी ढालू सड़क पर कार की वर्तुल गति, गति के नियमों के रोचक उदाहरण हैं । कार पर आरोपित तीन बल हैं, इसका भार mg, अभिलंब बल N तथा घर्षण बल f। उस प्रकरण में, जिसमें कार सपाट सड़क पर वर्तुल गति करती है [चित्र 5.14(a)] हम पाते हैं,

$$N = mg \quad (5.16)$$



चित्र 5.14 कार की (a) समतल सड़क, तथा (b) ढालू सड़क पर वर्तुल गति ।

यहां, पहले कि भांति

$$f \leq \mu_s N$$

उपरोक्त दोनों संबंधों से हमें प्राप्त होता है :

$$v^2 = Rg\,\frac{\mu + \tan\theta}{1-\mu\tan\theta} \qquad (5.19)$$

यहां $\mu = \dfrac{f}{N} \leq \mu_s$

अत: किसी ढालू सड़क पर कार की अधिकतम संभव वर्तुल चाल

$$v_{\text{अधिकतम}} = \left(Rg\,\frac{\mu_s + \tan\theta}{1-\mu_s\tan\theta}\right)^{1/2} \qquad (5.21)$$

जो कि, अपेक्षानुसार, समीकरण (5.18) के अनुसार समतल सड़क के लिए कार की अधिकतम संभव वर्तुल चाल से अधिक है । समीकरण (5.20) में $\mu_s = 0$ के लिए,

$$v_0 = (Rg\tan\theta)^{1/2} \qquad (5.21)$$

इस चाल पर आवश्यक अभिकेंद्र बल प्रदान करने के लिए घर्षण बल की कोई आवश्यकता नहीं होती । इस चाल से ढालू सड़क पर कार चलाने पर कार के टायरों की कम से कम घिसाई होती है । इसी समीकरण से यह भी ज्ञात होता है कि $v < v_0$ के लिए घर्षण बल उपरिमुखी होगा तथा किसी कार को स्थिर स्थिति में केवल तभी पार्क किया जा सकता है जब $\tan\theta \leq \mu_s$ हो ।

> *उदाहरण 5.9* 18 km/h की चाल से समतल सड़क पर गतिमान कोई साइकिल सवार बिना चाल को कम किए 3 m त्रिज्या का तीव्र वर्तुल मोड़ लेता है । टायरों तथा सड़क के बीच स्थैतिक घर्षण गुणांक 0.1 है । क्या साइकिल सवार मोड़ लेते समय फिसल कर गिर जाएगा ?

हल सपाट सड़क पर अकेला घर्षण बल ही साइकिल सवार को बिना फिसले वर्तुल मोड़ लेने के लिए आवश्यक अभिकेंद्र बल प्रदान कर सकता है । यदि चाल बहुत अधिक है, तथा/अथवा मोड़ अत्यधिक तीव्र है (अर्थात् त्रिज्या बहुत कम है), तब घर्षण बल इन स्थितियों में आवश्यक अभिकेंद्र बल प्रदान करने के लिए पर्याप्त नहीं होता और साइकिल सवार मोड़ लेते समय फिसल कर गिर जाता है । साइकिल सवार के न फिसलने की शर्त समीकरण (5.18) द्वारा इस प्रकार है :

$$v^2 \leq \mu_s Rg$$

अब, यहां इस प्रश्न में $R = 3$ m, $g = 9.8$ m s^{-2} तथा $\mu_s = 0.1$ अर्थात् $\mu_s Rg = 2.94$ m^{2}s^2; तथा $v = 18$ km/h $= 5$ m s^{-1}; अर्थात् $v^2 = 2.5$ m^{2}s^{-2} अर्थात्, शर्त $v^2 \leq \mu_s Rg$ का पालन नहीं होता । अतः, साइकिल सवार तीव्र वर्तुल मोड़ लेते समय फिसलकर गिरेगा । ◀

> *उदाहरण 5.10* 300 m त्रिज्या वाले किसी वृत्ताकार दौड़ के मैदान का ढाल 15° है । यदि मैदान और रेसकार की पट्टियों के बीच घर्षण गुणांक 0.2 है, तो (a) टायरों को घिसने से बचाने के लिए रेसकार की अनुकूलतम चाल, तथा (b) फिसलने से बचने के लिए अधिकतम अनुमेय चाल क्या है ?

हल ढालू मैदान में बिना फिसले गतिशील रेसकार को वर्तुल मोड़ लेने के लिए आवश्यक अभिकेंद्र बल प्रदान करने में घर्षण बल तथा अभिलंब बल के क्षैतिज घटकों का योगदान होता है । रेसकार की अनुकूलतम चाल पर गति के लिए अभिलंब बल का घटक ही आवश्यक अभिकेंद्र बल प्रदान करने के लिए पर्याप्त होता है । तथा घर्षण बल की कोई आवश्यकता नहीं होती । समीकरण (5.21) द्वारा रेसकार की अनुकूलतम चाल v_0 को इस प्रकार व्यक्त करते हैं :

$$v_0 = (Rg\tan\theta)^{1/2}$$

यहां $R = 300$ m, $\theta = 15^0$, $g = 9.8$ m s^{-2}; अत:

$$v_0 = 28.1 \text{ m s}^{-1}$$

समीकरण (5.20) द्वारा रेसकार की अधिकतम अनुमेय चाल को इस प्रकार व्यक्त करते है :

$$v_{\text{अधिकतम}} = \left(Rg\,\frac{\mu_s + \tan\theta}{1-\mu_s\tan\theta}\right)^{1/2} = 38.1 \text{ m s}^{-1}$$ ◀

5.11 न्यूटन के गति के नियमों की व्याख्या I : जड़त्वीय तथा त्वरित फ्रेम

गति के तीन नियम भौतिकी के लिए इतने आधारभूत हैं कि इनका पुन: परीक्षण किया जाना चाहिए । आइए, प्रथम नियम से ही आरंभ करते हैं । यह नियम बताता है कि यदि किसी पिण्ड पर आरोपित नेट बल शून्य है तो उसका त्वरण शून्य होता है । फिर भी, किसी पिण्ड का त्वरण, सदैव ही किसी प्रेक्षक के आपेक्ष मापा जाता है । उदाहरण के लिए, रेलवे प्लेटफार्म पर रखे किसी संदूक का प्लेटफार्म पर खड़े किसी प्रेक्षक के आपेक्ष शून्य वेग और शून्य त्वरण होता है । मान लीजिए, अब कोई रेलगाड़ी किसी एकसमान वेग से उस प्लेटफार्म से दूर जा रही है । इस रेलगाड़ी में सवार किसी प्रेक्षक के लिए, वही संदूक एकसमान वेग (–**v**) से गति करता है और उसका त्वरण शून्य है । अब यह भी मानें कि कोई अन्य रेलगाड़ी उसी प्लेटफार्म से, एकसमान वेग न होकर, किसी त्वरण **a** से जा रही है । इस दूसरी रेलगाड़ी में सवार प्रेक्षक के लिए इस संदूक का त्वरण शून्य नहीं है । इस प्रेक्षक के आपेक्ष संदूक का त्वरण –**a** है । ध्यान दीजिए, एक ही पिण्ड (संदूक) के लिए ये विभिन्न प्रकथन प्रेक्षकों की विभिन्न प्रकार की गतियों के कारण ही उत्पन्न हुए हैं । इन प्रकथनों का प्रेक्षकों के व्यक्तिपरक या मानव स्वभाव गुणों से किसी भी प्रकार का कोई संबंध नहीं है । अत:, पद 'प्रेक्षक' की तुलना में 'निर्देश फ्रेम' को अधिक पसंद किया जाता है । यद्यपि इन दोनों पदों का उपयोग पर्यायवाची के रूप में होता है । प्रत्येक पिण्ड को किसी 'निर्देश फ्रेम' से संबद्ध कर दिया जाता है । इस प्रकार, पद 'रेलगाड़ी के प्रेक्षक' के स्थान पर पद 'रेलगाड़ी का निर्देश फ्रेम' अधिक पसंद किया जाता है । इसी प्रकार, हम 'प्लेटफार्म का निर्देश फ्रेम' की बात करते हैं । हमें यह पूर्णतया स्पष्ट होना चाहिए कि 'निर्देश फ्रेम' किसी पिण्ड से संबद्ध एक सैद्धांतिक रचना है जो उस पिण्ड के आपेक्ष विराम में होती है, परंतु यह स्वयं पिण्ड नहीं है । किसी भी निर्देश फ्रेम के आपेक्ष इस विश्व की सभी परिघटनाओं का वर्णन किया जा सकता है ।

संदूक के उदाहरण पर वापस लौटते हुए, हम यह कह सकते हैं कि 'प्लेटफार्म के निर्देश फ्रेम' तथा पहली रेलगाड़ी (एकसमान वेग से गतिमान) के निर्देश फ्रेम के आपेक्ष संदूक का त्वरण शून्य है तथा दूसरी रेलगाड़ी के निर्देश फ्रेम के आपेक्ष संदूक का त्वरण शून्येतर (–**a**) है । तीनों ही निर्देश फ्रेमों पर आरोपित बल समान हैं : संदूक का भार (W) जो अधोमुखी कार्यरत है और उपरिमुखी अभिलंब बल (R) दोनों मिलकर शून्य नेट बल देते हैं ।

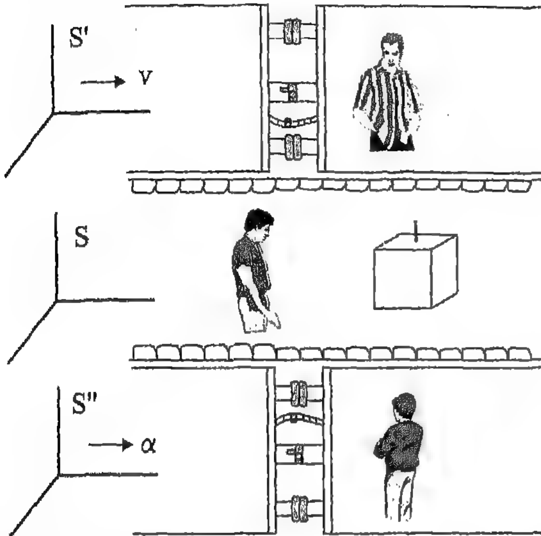
इस प्रकार, यहां निम्नलिखित स्थिति है : 'प्लेटफार्म' तथा 'पहली रेलगाड़ी' के निर्देश फ्रेमों के लिए शून्य नेट बल शून्य त्वरण के तदनुरूपी है । दूसरी 'त्वरित रेलगाड़ी' के निर्देश फ्रेम के लिए, फिर भी, शून्य नेट बल शून्य त्वरण को अंतर्निहित नहीं करता । इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि न्यूटन का प्रथम नियम कुछ निर्देश फ्रेमों के लिए वैध है तो कुछ अन्य निर्देश फ्रेमों के लिए वैध नहीं है । कोई निर्देश फ्रेम जिसके आपेक्ष न्यूटन का प्रथम नियम वैध होता है, उसे 'जड़त्वीय फ्रेम' कहते हैं, तथा इसके विपरीत वह फ्रेम जिसके आपेक्ष न्यूटन का प्रथम नियम वैध नहीं होता, उसे 'अजड़त्वीय फ्रेम' कहते हैं । उपरोक्त चर्चा के आधार पर ध्यान रखिए कि यदि कोई फ्रेम जड़त्वीय फ्रेम है (जैसे प्लेटफार्म का फ्रेम), तो इसके आपेक्ष कोई भी एकसमान वेग से गतिमान फ्रेम भी जड़त्वीय फ्रेम ही होता है । इसके विपरीत, यदि कोई फ्रेम किसी जड़त्वीय फ्रेम के आपेक्ष त्वरित है, तो उस फ्रेम को अजड़त्वीय फ्रेम ही माना जाएगा ।

संक्षेप में, प्रकृति के सभी संभावित निर्देश फ्रेमों में एकसमान आपेक्षिक गति के विशेष फ्रेमों की एक श्रेणी है जिसके आपेक्ष न्यूटन का गति का प्रथम नियम वैध है । इसके अतिरिक्त अन्य सभी फ्रेम, जो जड़त्वीय फ्रेम के संदर्भ में त्वरित हैं, घूर्णी हैं, आदि, अजड़त्वीय फ्रेम हैं, जिनके लिए न्यूटन का गति का प्रथम नियम वैध नहीं है । विभिन्न जड़त्वीय निर्देश फ्रेम पूर्णत: तुल्यांकी होते हैं; अर्थात् उन सभी के लिए यांत्रिकी के नियम समान होते हैं । ऐसा कोई भी विशेष प्राधिकृत निर्देश फ्रेम नहीं है जिसे हम कह सकें कि यह निरपेक्ष विराम में है । सभी जड़त्वीय फ्रेमों की यह तुल्यता तथा किसी निरपेक्ष विराम के फ्रेम को परिभाषित कर सकने की अयोग्यता को न्यूटनी यांत्रिकी का आपेक्षिकता का सिद्धांत* कहते हैं ।

आइए, फिर प्रथम नियम की चर्चा करें । हमने देखा कि यह नियम जड़त्वीय फ्रेमों के लिए वैध है तथा अजड़त्वीय फ्रेमों के लिए वैध नहीं है । परन्तु ध्यान दीजिए, यह सुनिश्चित करने का कोई स्वतंत्र उपाय नहीं है जिसके द्वारा हम यह कह सकें कि कौन सा फ्रेम जड़त्वीय है और कौन सा अजड़त्वीय । जड़त्वीय तथा अजड़त्वीय फ्रेम सुनिश्चित करने का केवल एक ही उपाय है कि हम उस फ्रेम के अभिलक्षणों का परीक्षण करके यह सुनिश्चित करें कि उसके लिए प्रथम नियम वैध है अथवा नहीं । इसका अर्थ यह हुआ कि सामान्य विवेक के अनुसार प्रथम नियम कोई नियम नहीं है, यह एक मापदण्ड है जिसके द्वारा फ्रेमों की एक विशेष श्रेणी (जड़त्वीय फ्रेम) का चयन किया जाता है जिसके आपेक्ष सरल तथ्य "शून्य बल का अर्थ शून्य त्वरण है" का वास्तव में पालन होता है । किसी प्रयोगशाला के प्रेक्षक (अर्थात् पृथ्वी के निर्देश फ्रेम) के लिए यह मापदण्ड सन्निकटत:

* आइंस्टीन ने इस आपेक्षिकता के सिद्धांत का यांत्रिकी से लेकर समस्त भौतिकी तक विस्तार किया, परिणामस्वरूप आइंस्टीन ने आपेक्षिकता के विशिष्ट सिद्धांत को प्रतिपादित किया ।

सही पाया गया है । इस प्रकार, पृथ्वी का निर्देश फ्रेम सन्निकटतः जड़त्वीय फ्रेम* है । इसीलिए हमारी अब तक की चर्चा के आधार पर पृथ्वी के आपेक्ष एकसमान गति करते सभी निर्देश फ्रेम (सन्निकटतः) जड़त्वीय हैं । इसके विपरीत, त्वरित रेलगाड़ी का निर्देश फ्रेम अथवा परिक्रमण करते *मेरी गो राउंड* झूले का निर्देश फ्रेम अजड़त्वीय निर्देश फ्रेम के उदाहरण हैं ।



चित्र 5.15 प्लेटफार्म के प्रेक्षक S, एकसमान वेग से गतिमान रेलगाड़ी के प्रेक्षक S' तथा त्वरित रेलगाड़ी के प्रेक्षक S" के सापेक्ष प्लेटफार्म पर रखे किसी संदूक की गतिकी । न्यूटन का प्रथम नियम S तथा S' में वैध है परंतु S" में वैध नहीं है । S तथा S' जड़त्वीय प्रेक्षक हैं जबकि S" अजड़त्वीय प्रेक्षक है ।

5.12 न्यूटन के गति के नियमों की व्याख्या II: छद्म बल

अब हम द्वितीय नियम : $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ पर विचार करते हैं । यह समीकरण तीन भौतिक राशियों $\mathbf{F}, m$ तथा $\mathbf{a}$ में संबंध दर्शाती है । इनमें से त्वरण $\mathbf{a}$ की परिभाषा पहले ही (पिछले अध्यायों में) दी जा चुकी है, तथा सिद्धांत रूप से इसका मापन सरल है । हमें दो अन्य राशियों m तथा $\mathbf{F}$ की अधिक स्पष्ट परिभाषा देनी चाहिए ।

आइए, पहले संहति की परिभाषा देने की समस्या पर विचार करते हैं । गुणात्मक रूप में संहति द्रव्य की माप होती है । चार सर्वसम गेंदों की संहति प्रत्येक गेंद की संहति की चार गुनी होती है । परंतु समस्या यह है कि असमान पिण्डों की संहतियों की तुलना कैसे करें । संबंध $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ एक संकेत देता है । हमने अब तक बल $\mathbf{F}$ की माप तथा इसके अर्थ की परिभाषा नहीं दी है । परंतु बल से कोई व्यक्ति क्या समझता है इसका हमें कुछ गुणात्मक बोध है । हम ऐसी स्थितियों की कल्पना कर सकते हैं जिनमें दो विभिन्न पिण्डों पर *समान* बल $\mathbf{F}$ आरोपित किया गया हो । मान लीजिए दो एकसमान कुण्डलित कमानियों में से एक पिण्ड 1 से तथा दूसरा पिण्ड 2 से संबद्ध है । दोनों कमानियों को समान सीमाओं तक संपीडित किया जाता है । जैसे ही इन कमानियों को मुक्त करते हैं उसी क्षण दोनों पिण्ड समान परिमाण के बल अनुभव करते हैं । यदि उसी बल $\mathbf{F}$ के लिए दोनों पिण्डों के तात्क्षणिक त्वरण $\mathbf{a}_1$ तथा $\mathbf{a}_2$ हैं, तब

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1} \quad (5.22)$$

प्रयोगों द्वारा त्वरणों को मापकर** दोनों पिण्डों की संहतियों का अनुपात प्राप्त किया जा सकता है । संहति के मात्रक को परिभाषित करने के लिए किसी सुविधाजनक पिण्ड को मानक के रूप में लेकर हर अन्य पिण्ड की संहति निर्धारित की जा सकती है ।

अब हम बल $\mathbf{F}$ की परिभाषा के प्रश्न की ओर बढ़ते हैं । क्या द्वितीय नियम के सत्यापन के लिए बल $\mathbf{F}$ की कोई पृथक व्यापक परिभाषा है ? इसका उत्तर है : नहीं । द्वितीय नियम स्वयं बल $\mathbf{F}$ की माप की मात्रात्मक परिभाषा, यथा संहति × त्वरण प्रस्तुत करने का एक उपाय है । प्रथम दृष्टि में यह असमंजस्यपूर्ण प्रतीत हो सकता है । कोई परिभाषा नियम कैसे हो सकती है? यदि कोई परिभाषा गति का नियम हो सकती है, तो क्या हम गति के चरों जैसे वेग, त्वरण, वेग परिवर्तन की दर, आदि के अन्य संचयों के बारे में विचार कर उन्हें कोई अन्य नाम दे सकते है यथा प्रणोद अथवा धक्का ? इसका उत्तर है : हां, आप ऐसा कर सकते हैं पर उसका कोई विशेष उपयोग नहीं होगा । द्वितीय नियम ($\mathbf{F}=m\mathbf{a}$) द्वारा दी गई बल की न्यूटनी परिभाषा सर्वोत्कृष्ट उपयोगी सिद्ध हुई है । पहला, यह कि बल की यह सरलतम परिभाषा है जो गति के प्रथम नियम से सामंजस्य रखती है । दूसरा, यह पाया गया है कि विभिन्न प्रकार के बलों के लिए प्रकृति में $\mathbf{F}$ के सरलतम सुस्पष्ट रूप उपस्थित हैं । गुरुत्वाकर्षण बल इसका सर्वोत्तम उदाहरण है । जब हम द्वितीय नियम में गुरुत्वार्कषण बल के सुस्पष्ट रूप $\left(F=\frac{-GMm}{r^2}\right)$ को प्रतिस्थापित करते हैं तब यह नियम मात्र परिभाषा ही नहीं रह जाता अपितु एक ऐसा समीकरण हो जाता है जिसमें भविष्यवाणी करने की विशाल क्षमता होती है और इसके निष्कर्षों का प्रेक्षणों तथा प्रयोगों द्वारा सत्यापन किया जाता है । तीसरा और इतना ही महत्त्वपूर्ण है द्वितीय नियम से प्राप्त बल की न्यूटनी परिभाषा जो तृतीय नियम का तुष्टीकरण करती है और प्रयोगों द्वारा सत्यापित संवेग संरक्षण नियम की ओर ले जाती है ।

इस प्रकार, गति के नियमों के मूल स्तर पर नियमों में प्रकट होने वाली भौतिक राशियों की परिभाषाएं स्वयं नियमों से पृथक

* 'सन्निकटतः जड़त्वीय फ्रेम' का और अधिक यथार्थ अर्थ अनुभाग 5.12 में स्पष्ट होगा ।

**तात्क्षणिक त्वरण निर्धारित करने के लिए मुक्त करने के पश्चात् कमानी को तुरंत काटा जा सकता है तब आवेगी त्वरण पिण्ड द्वारा प्राप्त वेग के अनुक्रमानुपाती होता है ।

नहीं की जा सकतीं । आप इन्हें परिभाषा कहें अथवा नियम, इससे कोई फर्क नही पड़ता । इस तथ्य का आत्मसात् कर पाना सरल नहीं है । इस तथ्य के महत्त्व को आप इन नियमों के विषय में चिन्तन करने तथा इनसे भलीभांति परिचित होने के पश्चात्, स्वयं समझ जाएंगे ।

आइए फिर से, अपनी जड़त्वीय तथा अजड़त्वीय फ्रेमों की चर्चा आरंभ करते हैं । हम जानते हैं कि किसी जड़त्वीय फ्रेम को परिभाषित करने के लिए प्रथम नियम का एक मापदण्ड के रूप में प्रयोग किया जाता है । जड़त्वीय फ्रेम वह होता है जिसमें प्रथम नियम वैध हो । इस विषय में द्वितीय नियम की कितनी वैधता है ? हमने देखा कि द्वितीय नियम से बल की माप की मात्रात्मक परिभाषा मिलती है । क्या द्वितीय नियम जड़त्वीय तथा अजड़त्वीय दोनों फ्रेमों के लिए वैध है ? इस प्रश्न का उत्तर देने के लिए, याद रखिए कि संबंध $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ में $\mathbf{F}$ किसी पिण्ड पर लगने वाला वह बल है जो उस पिण्ड पर किसी बाह्य भौतिक साधन द्वारा आरोपित किया जाता है। यदि आस-पास कोई भौतिक साधन नहीं है, अथवा पिण्ड पर विभिन्न बाह्य भौतिक साधनों द्वारा लगाए गए बल निरस्त होकर शून्य नेट बल प्रदान करते हैं, तो द्वितीय नियम द्वारा उस पिण्ड का त्वरण शून्य होता है, जो प्रथम नियम ही है। इस प्रकार प्रथम नियम के समनुरूप होने के कारण द्वितीय नियम, स्पष्ट रूप से केवल किसी जड़त्वीय निर्देश फ्रेम के आपेक्ष वैध होता है ।

यह जानने के लिए कि अजड़त्वीय फ्रेम में द्वितीय नियम का क्या होता है, उसी रेलगाड़ी के उदाहरण पर विचार करते हैं जो प्लेटफार्म के फ्रेम के सापेक्ष त्वरण $\boldsymbol{\alpha}$ से गतिमान है । कोई वस्तु जिस पर नेट भौतिक बल शून्य है (जैसे प्लेटफार्म पर रखा कोई संदूक), रेलगाड़ी के निर्देश फ्रेम के आपेक्ष त्वरण $-\boldsymbol{\alpha}$ से गति करता है । इसे हम विधिवत् ऐसा समझ सकते हैं जैसे कोई 'बल' $-m\boldsymbol{\alpha}$ संदूक पर कार्यरत है । अधिक व्यापक रूप में , जब भौतिक बल $\mathbf{F}$ शून्य नहीं है तब हम त्वरित रेलगाड़ी के फ्रेम के लिए "द्वितीय नियम" को इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं :

$$\mathbf{F}-m\boldsymbol{\alpha} = m\,\mathbf{a} \qquad (5.23)$$

इस प्रकार पद $-m\boldsymbol{\alpha}$ अजड़त्वीय फ्रेम के आपेक्ष प्रेक्षित त्वरण उत्पन्न करने के लिए भौतिक बल $\mathbf{F}$ के साथ योग करता है । इस पद को छद्म बल $\mathbf{F}_p$ कहते हैं । त्वरित रेलगाड़ी ही अजड़त्वीय फ्रेम का एकमात्र उदाहरण नहीं है । घूर्णी फ्रेम के आपेक्ष हमारे पास अन्य प्रकार के छद्म बल होते हैं । उदाहरण के लिए, किसी डोरी द्वारा किसी पत्थर को R त्रिज्या के वृत्त में एकसमान चाल v से परिक्रमित कराया जाता है; किसी जड़त्वीय प्रेक्षक के लिए डोरी में तनाव आवश्यक अभिकेंद्र त्वरण प्रदान करता है तथा द्वितीय नियम के अनुसार,

$$T = m\,v^2/R \qquad (5.24a)$$

अब हम पत्थर के साथ घूर्णन करते किसी फ्रेम की कल्पना करते हैं । इस फ्रेम के सापेक्ष पत्थर विराम में है, यद्यपि इस पर बल T आरोपित है । स्पष्ट रूप से द्वितीय नियम वैध नहीं है तथा घूर्णी फ्रेम अजड़त्वीय है । फिर भी हम विधिवत् रूप से द्वितीय नियम के इसी समीकरण को इस प्रकार व्यक्त करके तुष्ट कर सकते हैं :

$$T = m\,v^2/R = m \times 0 \qquad (5.24b)$$

यहां दाहिनी ओर '0' घूर्णी पत्थर के फ्रेम के आपेक्ष पत्थर के त्वरण का मान है । पद $-m\,v^2/R$ घूर्णी फ्रेम में प्रकट होने वाला छद्म बल है । ऋणात्मक चिह्न यह दर्शाता है कि बल T त्रिज्या के अनुदिश भीतर की ओर छद्म बल त्रिज्या के अनुदिश बाहर की ओर है । इस छद्म बल को **अपकेंद्र बल** कहते हैं । इस प्रकार भौतिक बल में अपकेंद्र बल को जोड़कर हमने घूर्णी फ्रेम के आपेक्ष भी द्वितीय नियम का विधिवत् तुष्टीकरण किया है ।

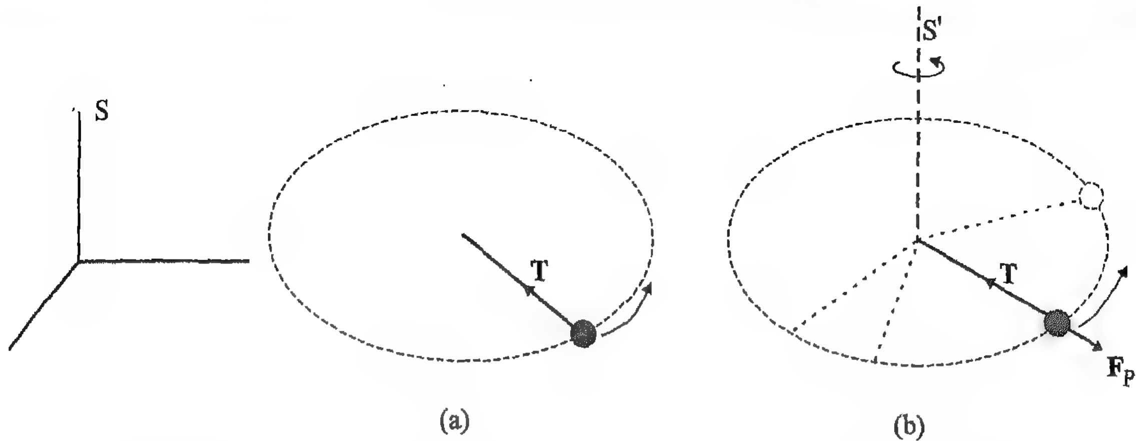
ध्यान दीजिए कि हम घूर्णी फ्रेम के आपेक्ष गति करते पिण्डों की गतिकी पर भी विचार कर सकते हैं । उदाहरण के लिए, हम किसी घूर्णी फ्रेम के सापेक्ष फर्श पर किसी ट्राली की गति पर विचार कर सकते हैं । इस प्रकरण में, यह पाया जाता है कि ट्राली पर लगे छद्म बलों में केवल अपकेंद्र बल ही नहीं होता वरन् इसके साथ एक अन्य बल भी सम्मिलित होता है जो घूर्णी फ्रेम के सापेक्ष ट्राली के वेग पर निर्भर करता है । यह बाद वाला बल कोरऑलियस बल कहलाता है । यहां पर हम घूर्णी फ्रेम में छद्म बलों की विस्तार से चर्चा नहीं कर सकते, परंतु ये घूर्णी निर्देश फ्रेमों के आपेक्ष वस्तुओं की गति को समझने के लिए आवश्यक हैं ।

संपेक्ष में, किसी व्यापक अजड़त्वीय निर्देश फ्रेम के लिए द्वितीय नियम को इस रूप में व्यक्त किया जाता है :

$$\mathbf{F}+\mathbf{F}_p = m\,\mathbf{a} \qquad (5.25)$$

यहां $\mathbf{F}$ भौतिक साधनों द्वारा आरोपिक नेट बल $\mathbf{F}_p$ छद्म बल तथा $\mathbf{a}$ **अजड़त्वीय फ्रेम के आपेक्ष वस्तु का त्वरण है ।**

आइए इस तथ्य पर ध्यान दें कि छद्म बल केवल तभी प्रकट होते हैं जब गति का वर्णन किसी अजड़त्वीय फ्रेम के आपेक्ष किया जाता है । एक जड़त्वीय फ्रेम में $\mathbf{F}_p=0$ । इन बलों को छद्म बल कहने का कारण यह है कि इनका कोई भौतिक उद्भव नहीं होता, ये निर्देश फ्रेम के स्वयं त्वरित, घूर्णी आदि होने के कारण प्रकट होते हैं । छद्म बलों में सदैव ही पिण्ड की जड़त्वीय



चित्र 5.16 घूर्णी पत्थर की गतिकी (a) किसी जड़त्वीय फ्रेम के सापेक्ष : डोरी में तनाव आवश्यक अभिकेंद्र बल प्रदान करता है : इस फ्रेम में अपकेंद्र बल की कोई आवश्यकता नहीं होती; (b) पत्थर के घूर्णी फ्रेम के सापेक्ष : शून्य नेट त्वरण प्रदान करने के लिए त्रिज्यतः भीतर की ओर तनाव T को त्रिज्यतः बाहर की ओर अपकेंद्र बल द्वारा निरस्त किया जाता है ।

संहति* m सम्मिलित होती है, इसीलिए इन्हें 'जड़त्वीय बल' भी कहते हैं ।

समीकरण (5.25) तुरंत ही किसी **'सन्निकटतः जड़त्वीय फ्रेम'** की धारणा को स्पष्ट कर देती है । किसी आदर्श जड़त्वीय फ्रेम के लिए $\mathbf{F}_p$, सही अर्थों में, शून्य होता है । यदि किसी निर्देश फ्रेम के लिए विमाहीन अनुपात $|\mathbf{F}_p|/|\mathbf{F}|$ एक से बहुत कम है, तो उस फ्रेम में अजड़त्वीय लक्षण नगण्य होते हैं तथा वह फ्रेम सन्निकटतः जड़त्वीय फ्रेम होता है । इसके अतिरिक्त एक महत्त्वपूर्ण बिंदु पर ध्यान दीजिए । अनुपात $|\mathbf{F}_p|/|\mathbf{F}|$ केवल निर्देश फ्रेम पर ही निर्भर नहीं करता; यह विचाराधीन पिण्ड की गति के प्राचलों पर भी निर्भर करता है । यही कारण है कि संदर्भ पर निर्भर करते हुए, एक ही निर्देश फ्रेम यदि किसी एक संदर्भ में सन्निकटतः जड़त्वीय फ्रेम है, तो किसी अन्य संदर्भ में अजड़त्वीय फ्रेम भी हो सकता है । पृथ्वी का निर्देश फ्रेम अधिकांश (परंतु सभी के लिए नहीं)** पार्थिव परिघटनाओं के लिए सन्निकटतः जड़त्वीय है, परंतु खगोलीय परिघटनाओं के लिए यही फ्रेम अजड़त्वीय है । खगोलीय परिघटनाओं के लिए सूर्य का निर्देश फ्रेम सन्निकटतः जड़त्वीय है । एक आदर्श जड़त्वीय फ्रेम अस्तित्व में नहीं है । फिर भी, अधिकांश प्रयोजनों के लिए स्थिर तारों का निर्देश फ्रेम सन्निकटता की अति उत्तम कोटियों तक एक जड़त्वीय फ्रेम माना जाता है ।

अंततः तृतीय नियम केवल दो पिण्डों के बीच पारस्परिक भौतिक बलों का उल्लेख करता है तथा छद्म बलों के लिए अप्रासंगिक है ।

5.13 परिवर्ती (चर) संहति समस्याएं

अब तक हमने स्थिर संहति के पिण्डों पर न्यूटन के नियमों के अनुप्रयोग पर विचार किया है । फिर भी, यांत्रिकी में हमारा कभी-कभी ऐसी परिस्थितियों से सामना होता है जिनमें विचारणीय निकाय की संहति स्थिर नहीं रहती । उदाहरण के लिए, किसी राकेट में ईंधन के दहन से उत्पन्न गैसें अत्यधिक वेग से बाहर निकलती हैं और प्रतिक्रियास्वरूप विपरीत दिशा में राकेट को धकेलती हैं । यदि हम राकेट की पहचान एक 'निकाय' के रूप में करें तो स्पष्ट है कि इस निकाय की संहति स्थिर नहीं रहती; यह समय के साथ निरंतर कम होती जाती है । इसी प्रकार, यदि गुरुत्व बल के अधीन गिरती कोई वर्षा की बूंद जब धुंध से गुजरती है तो उसे अपने साथ जोड़ती चलती है और उसके आकार के साथ उसकी संहति निरंतर बढ़ती जाती है । इस प्रकार के परिवर्ती (चर) संहति निकायों से कैसे निपटें ?

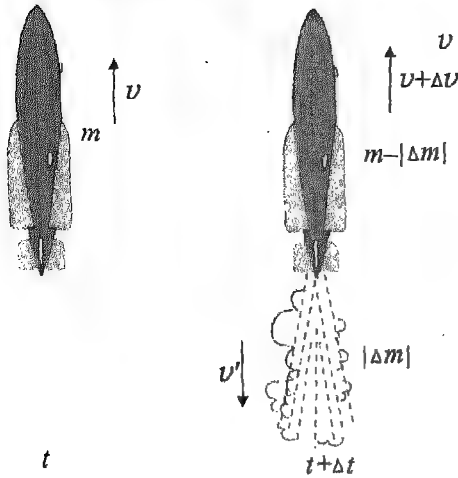
आइए, न्यूटन के द्वितीय नियम को इस रूप में व्यक्त करते हैं :

$$\mathbf{F}_{ext}\,\Delta t = \Delta \mathbf{p} \qquad (5.26)$$

इस नियम को इसी रूप में किसी भी स्थिर संहति के निकाय पर लागू कर सकते हैं । यहां इस बात को महत्त्व देना आवश्यक है कि यह नियम तत्क्षण वैध है । यहाँ $\mathbf{F}_{ext}$ समय t पर कुल बाह्य बल है तथा $\Delta \mathbf{p}$ समय t से $t+\Delta t$ तक संवेग परिवर्तन है, जहां Δt अत्यंत छोटा लिया गया है ($\Delta t \to 0$) । किसी चर संहति निकाय पर विचार करने का एक उपाय यह है कि हम किसी स्थिर संहति निकाय के बारे में (जिसका दिया गया चर संहति निकाय एक भाग है) समय अंतराल Δt के लिए सोचें तथा द्वितीय नियम का अनुप्रयोग उस स्थिर संहति निकाय पर करें ।

* जड़त्वीय संहति वह संहति है जो न्यूटन के द्वितीय नियम $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ में प्रकट होती है । यह सिद्धांत रूप में गुरुत्वीय संहति से जो न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण नियम में प्रकट होती है, भिन्न होती है । अध्याय 8 देखिए ।

** पवनों तथा महासागरीय धाराओं की गतिकी में पृथ्वी के फ्रेम का अजड़त्वीय लक्षण प्रकट होता है ।



चित्र 5.17 द्वितीय नियम के अनुप्रयोग के लिए समय अंतराल t से $t + \Delta t$ की अवधि में स्थिर संहति निकाय ।

किसी ऐसे राकेट पर विचार कीजिए जिसकी संहति, ऊपर की गई चर्चा के अनुसार, दहनशील गैसों के निष्कासन के कारण निरंतर घट रही है । मान लीजिए, समय t पर इसकी संहति $m(t)$ है। समय $t+\Delta t$ पर राकेट की संहति $m(t)-|\Delta m|$ है, जहां $|\Delta m|$ समय Δt में निष्कासित गैसों की संहति है । समय अंतराल t से $(t+\Delta t)$ के लिए उपयुक्त स्थिर संहति निकाय $(m-|\Delta m|)$ संहति का राकेट तथा $|\Delta m|$ संहति का ईंधन है । समय t पर ईंधन राकेट के भीतर है तथा $t+\Delta t$ पर (जला हुआ) ईंधन बाहर है ।

मान लीजिए समय t पर (प्रयोगशाला प्रेक्षक के आपेक्ष) राकेट का वेग $v(t)$ तथा समय $t+\Delta t$ पर इसका वेग $v(t)+\Delta v(t)$ है । मान लीजिए उसी प्रेक्षक के आपेक्ष गैसों की चाल v' है । स्थिर संहति निकाय का समय t पर आरंभिक संवेग mv है । इसी निकाय का $t+\Delta t$ पर अंतिम संवेग $(m-|\Delta m|)(v+\Delta v) -|\Delta m|(v')$ है, यहां ऋणात्मक चिह्न प्रकट होने का कारण यह है कि निष्कासित गैसों के बाहर आने की दिशा राकेट की गति की दिशा के विपरीत है । अब राकेट में ईंधन जलने की यंत्रावली का चाल अभिलक्षण **राकेट के आपेक्ष** निष्कासित गैसों के निकलने की चाल होता है । इसे v_r से निर्दिष्ट करते हैं । स्पष्ट है, $v' = v_r - v$

यदि राकेट बाहर अंतरिक्ष में बिना किसी बाह्य बल जैसे गुरुत्व बल के चल रहा हो, तो स्थिर संहति निकाय का संवेग अपरिवर्तित रहना चाहिए :

$$(m-|\Delta m|)(v+\Delta v) - |\Delta m|(v_r - v) = mv \qquad (5.27)$$

छोटे पद $|\Delta m|\,\Delta v$ को अन्य पदों के आपेक्ष नगण्य मानने पर, हमें यह प्राप्त होता है :

$$m\Delta v - |\Delta m| v_r = 0$$

यदि अत्यधिक छोटे समय अंतराल dt में संहति में परिवर्तन dm है, तो $|\Delta m| = -dm$ । इससे हमें यह प्राप्त होता है :

$$m\,\frac{dv}{dt} = -\,\frac{dm}{dt}\,v_r \qquad (5.28)$$

इस समीकरण की व्याख्या सरल है । किसी क्षण t पर निष्कासित गैसों द्वारा प्रदान किया गया बाह्य बल $-\frac{dm}{dt}v_r$ राकेट में त्वरण $\frac{dv}{dt}$ उत्पन्न करता है । ध्यान दीजिए $\frac{dm}{dt}$ का चिह्न ऋणात्मक है, अतः बल का चिह्न धनात्मक है, जो राकेट को आगे की दिशा में त्वरण प्रदान करता है । अब हम v_r अर्थात् राकेट में ईंधन जलने की यंत्रावली के चाल अभिलक्षण को एक स्थिर राशि मान सकते हैं । अब आगे यदि गैसों के निष्कासन की दर $\frac{dm}{dt}$ स्थिर है, तो निष्कासित गैसों के कारण राकेट पर आरोपित बल स्थिर होगा । तो भी, चूंकि m स्थिर नहीं है, यह समय के साथ घटता है, इसलिए राकेट का त्वरण स्थिर नहीं रहता, यह समय के साथ बढ़ता जाता है । समीकरण (5.28) को सरलता से समाकलित करके v को समय के फलन के रूप में प्राप्त किया जा सकता है ।

$$m dv = -\,dm\, v_r$$

$$\int_V^u dv = -v_r \int_M^m dm$$

इससे प्राप्त होता है $v - V = v_r \ln\frac{M}{m}$ (5.29)

यहां m तथा V राकेट की आरंभिक संहति तथा वेग को प्रदर्शित करते हैं । यदि ईंधन की खपत की दर α है, तो

$$v = V + v_r \ln\,\frac{M}{M-\alpha t} \qquad (5.30)$$

> **उदाहरण 5.11** कोई राकेट जिसकी आरंभिक संहति 6000 kg है 11 km s^{-1} की नियत आपेक्षिक चाल के साथ 16 kg s^{-1} की स्थिर दर से संहति निष्कासित करता है । स्फोटन के एक मिनट पश्चात् राकेट का त्वरण क्या होगा ? (गुरुत्व बल को नगण्य मानिए ।)

हल यहां $\frac{dm}{dt} = -16$ kg s^{-1};

$v_r = 11$ km s^{-1}; $M = 6000$ kg

समीकरण (5.28) से $t = 60$ s पर राकेट का त्वरण

$$= \frac{16\times11000}{6000-16\times60}\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

$$= 34.9\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

5.14 यांत्रिकी में समस्याओं को हल करना

गति के जिन तीन नियमों के विषय में आपने इस अध्याय में अध्ययन किया है वे यांत्रिकी की आधारशिला हैं। अब आप यांत्रिकी की विविध प्रकार की समस्याओं को हल करने में सक्षम हैं। आमतौर पर यांत्रिकी की किसी प्रतीकात्मक समस्या में बलों की क्रिया में केवल एक पिण्ड का ही समावेश नहीं होता। अधिकांश प्रकरणों में हम विभिन्न पिण्डों के ऐसे संयोजन पर विचार करते हैं जिनमें पिण्ड परस्पर एक दूसरे पर विभिन्न प्रकार की टेकों व संबंधनों (कब्जों, कमानियों, डोरियों आदि), घर्षण, प्रतिरोध आदि के माध्यम से बल लगाते हैं। इसके अतिरिक्त संयोजन का प्रत्येक पिण्ड गुरुत्व बल का भी अनुभव करता है। इस प्रकार की किसी समस्या को हल करने का प्रयास करते समय हमें एक स्पष्ट तथ्य याद रखना परमावश्यक है कि समस्या का हल करने के लिए उस संयोजन के किसी भी भाग को चुना जा सकता है तथा उस भाग पर गति के नियमों को इस शर्त के साथ लागू किया जा सकता है कि चुने गए भाग पर संयोजन के शेष भागों द्वारा आरोपित सभी बलों को सम्मिलित करना सुनिश्चित कर लिया गया है। संयोजन के चुने गए भाग को हम निकाय कह सकते हैं तथा संयोजन के शेष भाग (निकाय पर आरोपित बलों के अन्य साधनों को सम्मिलित करते हुए) को वातावरण कह सकते हैं। इस विधि को वास्तव में हमने पहले भी कई उदाहरणों में अपनाया है। यांत्रिकी की किसी प्ररूपी समस्या को सुव्यवस्थित ढंग से हल करने के लिए हमें निम्नलिखित चरणों को अपनाना चाहिए :

(i) पिण्डों के संयोजन के विभिन्न भागों – संबंधनों, टेकों, आदि को दर्शाने वाला संक्षिप्त योजनाबद्ध आरेख खींचिए।

(ii) संयोजन के किसी सुविधाजनक भाग को निकाय के रूप में चुनिए।

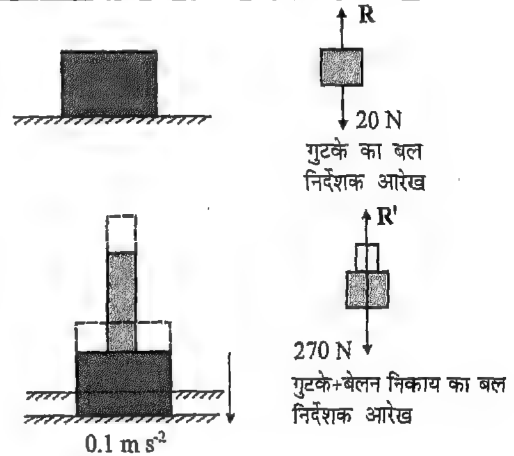
(iii) एक पृथक आरेख खींचिए जिसमें केवल निकाय तथा पिण्डों के संयोजन के शेष भागों द्वारा निकाय पर आरोपित सभी बलों को सम्मिलित करके दर्शाया गया हो। निकाय पर उन सभी अन्य साधनों द्वारा आरोपित बलों को भी सम्मिलित कीजिए जो उस निकाय के परोक्ष संपर्क में नहीं हैं; परंतु निकाय द्वारा वातावरण पर आरोपित बलों को इसमें सम्मिलित नहीं कीजिए। इस प्रकार के आरेख को **"बल-निर्देशक आरेख"** कहते हैं। (ध्यान दीजिए, इसका यह अर्थ नहीं है कि विचाराधीन निकाय मुक्त है, अर्थात् उस पर कोई नेट बल नहीं है।)

(iv) किसी बल निर्देशक आरेख में बलों से संबंधित केवल वही सूचनाएं (बलों के परिमाण तथा दिशाएं) सम्मिलित कीजिए जो या तो आपको दी गई हैं अथवा जो निर्विवाद निश्चित हैं। (उदाहरण के लिए, किसी पतली डोरी में तनाव की दिशा सदैव डोरी की लंबाई के अनुदिश होती है।) शेष उन सभी को अज्ञात माना जाना चाहिए जिन्हें गति के नियमों के अनुप्रयोगों द्वारा ज्ञात किया जाना है।

(v) यदि आवश्यक हो, तो संयोजन से कोई अन्य निकाय चुनकर उसके लिए भी यही विधि अपनाइए। ऐसा करने के लिए न्यूटन का तृतीय नियम प्रयोग कीजिए। अर्थात्, यदि A के बल निर्देशक आरेख में B के कारण A पर बल को $\mathbf{F}$ द्वारा दर्शाया गया है, तो B के बल निर्देशक आरेख में A के कारण B पर बल को $-\mathbf{F}$ द्वारा दर्शाया जाना चाहिए।

निम्नलिखित उदाहरण में उपरोक्त विधि का स्पष्टीकरण किया गया है :

> *उदाहरण 5.12* किसी कोमल क्षैतिज फर्श पर 2 kg संहति का लकड़ी का गुटका रखा है। जब इस गुटके के ऊपर 25 kg संहति का लोहे का बेलन रखा जाता है तो फर्श स्थिर गति से नीचे धँसता है तथा गुटका व बेलन एक साथ $0.1\ m\ s^{-2}$ त्वरण से नीचे जाते हैं। गुटके की फर्श पर क्रिया (a) फर्श के धँसने से पूर्व तथा (b) फर्श के धँसने के पश्चात् क्या है ? $g = 10\ m\ s^{-2}$ लीजिए। समस्या में क्रिया-प्रतिक्रिया युगलों को पहचानिए।



चित्र 5.18

हल

(a) फर्श पर गुटका विरामावस्था में है। इसका बल निर्देशक आरेख गुटके पर दो बलों को दर्शाता है, पृथ्वी द्वारा आरोपित गुरुत्वाकर्षण बल $= 2 \times 10 = 20$ N; तथा गुटके पर फर्श का अभिलंब बल R। प्रथम नियम के द्वारा गुटके पर आरोपित नेट बल शून्य होना चाहिए, अर्थात्, $R = 20$ N। तीसरे नियम का उपयोग करने पर गुटके की क्रिया अर्थात् गुटके द्वारा फर्श पर आरोपित बल परिमाण में 20 N के बराबर है तथा इसकी दिशा ऊर्ध्वाधरतः अधोमुखी है।

(b) निकाय (गुटका + बेलन) नीचे की ओर $0.1\ m\ s^{-2}$ त्वरण से धँस रहा है। इसका बल निर्देशक आरेख निकाय पर दो बलों को दर्शाता है। पृथ्वी के कारण गुरुत्व बल

(=270 N) ; तथा फर्श का अभिलंब बल R' । ध्यान दीजिए, निकाय का बल निर्देशक आरेख गुटके और बेलन के बीच आंतरिक बलों को नहीं दर्शाता । निकाय पर द्वितीय नियम का अनुप्रयोग करने पर,

$$270 - R' = 27 \times 0.1$$

$$\text{अर्थात्}\ R' = 267.3\ \text{N}$$

तृतीय नियम के अनुसार फर्श पर निकाय की क्रिया 267.3 N के बराबर है तथा यह ऊर्ध्वाधरतः अधोमुखी है ।

क्रिया-प्रतिक्रिया युगल

(a) के लिए (i) पृथ्वी द्वारा गुटके पर आरोपित गुरुत्व बल (= 20 N) (क्रिया) तथा गुटके द्वारा पृथ्वी पर आरोपित गुरुत्व बल (प्रतिक्रिया) 20 N के बराबर उपरिमुखी निदेशित (आरेख में नहीं दर्शाया गया है) ।

(ii) गुटके द्वारा फर्श पर आरोपित बल (क्रिया); फर्श द्वारा गुटके पर आरोपित बल (प्रतिक्रिया)

(b) के लिए (i) पृथ्वी द्वारा निकाय पर आरोपित गुरुत्व बल (= 270 N) (क्रिया); निकाय द्वारा पृथ्वी पर आरोपित गुरुत्व बल (प्रतिक्रिया) 270 N के बराबर उपरिमुखी निदेशित (आरेख में नहीं दर्शाया गया है ।)

(ii) निकाय द्वारा फर्श पर आरोपित बल (क्रिया); फर्श द्वारा निकाय पर आरोपित बल (प्रतिक्रिया)

इसके अतिरिक्त (b) के लिए बेलन द्वारा गुटके पर आरोपित बल तथा गुटके द्वारा बेलन पर आरोपित बल भी क्रिया-प्रतिक्रिया का एक युगल बनाते हैं ।

याद रखने योग्य एक महत्त्वपूर्ण तथ्य यह है कि किसी क्रिया-प्रतिक्रिया युगल की रचना दो पिण्डों के बीच पारस्परिक बलों, जो सदैव परिमाण में समान तथा दिशा में विपरीत होते हैं, से होती है । एक ही पिण्ड पर दो बलों, जो किसी विशेष परिस्थिति में परिमाण में समान व दिशा में विपरीत हो सकते हैं, से किसी क्रिया-प्रतिक्रिया युगल की रचना नहीं हो सकती । इस प्रकार, उदाहरण के लिए (a) अथवा (b) में पिण्ड पर गुरुत्व बल तथा फर्श द्वारा पिण्ड पर आरोपित अभिलंब बल कोई क्रिया-प्रतिक्रिया युगल नहीं है । ये बल संयोगवश समान एवं विपरीत हैं क्योंकि (a) के लिए पिण्ड विरामावस्था में है । परंतु प्रकरण (b) के लिए वे ऐसे नहीं हैं जैसा कि हमने पहले ही देख लिया है । निकाय का भार 270 N है जबकि अभिलंब बल $R' = 267.3$ N है । ◂

यांत्रिकी की समस्याओं को हल करने में बल निर्देशक आरेख खींचने की प्रथा अत्यंत सहायक है । यह आपको, अपने निकाय को परिभाषित करने तथा उन सभी पिण्डों के कारण, जो स्वयं निकाय के भाग नहीं हैं, निकाय पर आरोपित सभी विभिन्न बलों पर विचार करने के लिए विवश करता है । इस अध्याय तथा आगामी अध्यायों में दिए गए अभ्यास-प्रश्नों द्वारा इस प्रथा के पोषण में आपको सहायता मिलेगी ।

सारांश

1. अरस्तू का यह दृष्टिकोण, कि किसी पिण्ड की एकसमान गति रखने के लिए बल आवश्यक है, गलत है । व्यवहार में विरोधी घर्षण बल को प्रभावहीन करने के लिए कोई बल आवश्यक होता है ।
2. गैलीलियो ने आनत समतलों पर पिण्डों की गतियों का बहिर्वेशन किया और जड़त्व के नियम की खोज की । न्यूटन का गति का प्रथम नियम वही नियम है, जिसे फिर से शब्दों में इस प्रकार व्यक्त किया गया है :
   "प्रत्येक पिण्ड तब तक अपनी विरामावस्था अथवा किसी सरल रेखा में एकसमान गति की अवस्था में रहता है, जब तक कोई बाह्य बल उसे अन्यथा व्यवहार करने के लिए विवश नहीं करता ।" सरल पदों में, प्रथम नियम इस प्रकार है *"यदि किसी पिण्ड पर बाह्य बल शून्य है तो उसका त्वरण शून्य होता है ।"*
3. किसी पिण्ड का संवेग (**p**) उसकी संहति (m) तथा वेग (**v**) का गुणनफल होता है :

$$\mathbf{p} = m\,\mathbf{v}$$

4. न्यूटन का गति का द्वितीय नियम :
   किसी पिण्ड के संवेग परिवर्तन की दर आरोपित बल के अनुक्रमानुपाती होती है तथा संवेग परिवर्तन आरोपित बल की दिशा में होता है । इस प्रकार :

$$\mathbf{F} = k\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = k\,m\,\mathbf{a}$$

   यहाँ **F** पिण्ड पर आरोपित नेट बाह्य बल है, तथा **a** पिण्ड में उत्पन्न त्वरण है । आनुपातिकता स्थिरांक $k = 1$ चुनने पर व्यापकता में कोई कमी नहीं आती है । तब

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = m\,\mathbf{a}$$

बल का S.I. मात्रक न्यूटन (प्रतीक N) है : $1\,N = 1\,kg\,m\,s^{-2}$

(i) द्वितीय नियम तथा प्रथम नियम में सामंजस्य है ($\mathbf{F} = 0$ का अर्थ है $\mathbf{a} = 0$)

(ii) यह एक सदिश समीकरण है ।

(iii) सही अर्थों में तो यह किसी बिंदु कण पर लागू होती है । फिर भी किसी पिण्ड अथवा कणों के निकाय पर भी इसे लागू किया जा सकता है परंतु शर्त यह है कि हम **F** का अर्थ निकाय पर आरोपित कुल *बाह्य* बल तथा **a** का अर्थ समस्त निकाय का त्वरण मानें ।

(iv) एक निश्चित क्षण पर आकाश में किसी बिंदु पर आरोपित बल **F** उसी क्षण उसी बिंदु पर **a** का निर्धारण करता है । अर्थात् द्वितीय नियम एक स्थानीय नियम है । किसी क्षण पर **a** गति के इतिहास पर निर्भर नहीं करता ।

5. बल तथा समय का गुणनफल आवेग कहलाता है जो संवेग परिवर्तन के बराबर होता है ।
आवेग की धारणा उस स्थिति में लाभदायक होती है जब कोई बृहत् बल अल्प काल के लिए कार्य करके संवेग में मापने योग्य परिवर्तन उत्पन्न कर देता है ।

6. न्यूटन का गति का तृतीय नियम :
प्रत्येक क्रिया की समान तथा विपरीत प्रतिक्रिया होती है ।
सरल पदों में इस नियम को इस प्रकार भी अभिव्यक्त किया जा सकता है :
प्रकृति में बल सदैव ही दो पिण्डों के युगलों के बीच पाए जाते हैं । किसी पिण्ड A पर पिण्ड B द्वारा आरोपित बल पिण्ड B पर पिण्ड A द्वारा आरोपित बल के समान तथा विपरीत होता है ।
क्रिया तथा प्रतिक्रिया समक्षणिक बल हैं । क्रिया तथा प्रतिक्रिया के बीच कार्य-कारण संबंध नहीं होता । इन दो पारस्परिक बलों में से किसी भी एक को क्रिया तथा अन्य को प्रतिक्रिया कहा जा सकता है ।
क्रिया तथा प्रतिक्रिया बल दो भिन्न पिण्डों पर कार्य करते हैं । अतः किसी एकल पिण्ड पर ये दोनों बल एक दूसरे को निरस्त नहीं कर सकते । तथापि, किसी पिण्ड में आंतरिक क्रिया तथा प्रतिक्रिया बलों का योग अवश्य ही शून्य होता है ।

7. *संवेग संरक्षण नियम*
कणों के किसी वियुक्त निकाय का कुल संवेग संरक्षित रहता है । यह नियम गति के द्वितीय तथा तृतीय नियमों से आता है । तथापि इसकी मान्यता का विस्तार यांत्रिकी के बाहर भी है ।

8. *घर्षण*
घर्षण बल संपर्क में दो पृष्ठों के बीच आपेक्ष गति (समुपस्थित अथवा वास्तविक) का विरोध करता है । यह संपर्क बल का संपर्क पृष्ठों के अनुदिश घटक है । स्थैतिक घर्षण f_s समुपस्थित आपेक्ष गति का विरोध करता है ; गतिज घर्षण f_k वास्तविक आपेक्ष गति का विरोध करता है । घर्षण बल संपर्क पृष्ठों के क्षेत्रफल पर निर्भर नहीं करते तथा निम्नलिखित सन्निकट नियम की तुष्टि करते हैं :

$$f_s \le f_s^{\text{अधिकतम}} = \mu_s R$$

$$f_k = \mu_k R$$

μ_s (स्थैतिक घर्षण गुणांक) तथा μ_k (गतिज घर्षण गुणांक) संपर्क पृष्ठों के युगल के अभिलक्षणों के स्थिरांक हैं । प्रयोगों द्वारा यह पाया गया है कि μ_k, μ_s से तुलना में बहुत कम होता है ।

9. *जड़त्वीय तथा अजड़त्वीय निर्देश फ्रेम*
जड़त्वीय निर्देश फ्रेम वह होता है जिसके आपेक्ष न्यूटन का गति का प्रथम नियम सही सिद्ध हो । किसी जड़त्वीय निर्देश फ्रेम के आपेक्ष एकसमान गति करते सभी फ्रेम भी जड़त्वीय फ्रेम होते हैं । ऐसे निर्देश फ्रेम जो किसी जड़त्वीय निर्देश फ्रेम के आपेक्ष त्वरित गति अथवा घूर्णी गति करते हैं, अजड़त्वीय फ्रेम होते हैं । किसी अजड़त्वीय निर्देश फ्रेम में गति का द्वितीय नियम, $\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$ वैध नहीं होता । किसी ऐसे अजड़त्वीय फ्रेम के लिए जो किसी भी जड़त्वीय फ्रेम के आपेक्ष त्वरण $\boldsymbol{\alpha}$ से गतिशील है, गति का द्वितीय नियम इस रूप में व्यक्त होता है :

$$\mathbf{F} - m\,\boldsymbol{\alpha} = m\,\mathbf{a}$$

यहां $\boldsymbol{\alpha}$ अजड़त्वीय फ्रेम के आपेक्ष पिण्ड का त्वरण है । इस समीकरण में पद $-m\,\boldsymbol{\alpha}$ छद्म बल ($\mathbf{F}_p$) का एक उदाहरण है । अपकेंद्र अथवा कोरिऑलिस बल जो किसी घूर्णी (अजड़त्वीय) फ्रेम में उत्पन्न होते हैं छद्म बलों के अन्य उदाहरण हैं । व्यापक रूप में, किसी अजड़त्वीय फ्रेम के लिए "द्वितीय नियम" यह रूप ले लेता है :

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_p = m\,\mathbf{a}$$

कोई फ्रेम "सन्निकटतः जड़त्वीय" है यदि $\dfrac{|\mathbf{F}_p|}{|\mathbf{F}|} << 1$

कोई फ्रेम जो किसी एक संदर्भ के लिए सन्निकटतः जड़त्वीय है किसी अन्य संदर्भ के लिए अजड़त्वीय हो सकता है । अधिकांश प्रयोगशाला स्तर की परिघटनाओं के लिए पृथ्वी का निर्देश फ्रेम सन्निकटतः जड़त्वीय होता है परंतु खगोलीय प्रेक्षणों के लिए यही फ्रेम अजड़त्वीय हो जाता है ।

10. यांत्रिकी में समस्याओं को हल करने के लिए, विचारणीय निकाय को स्पष्ट दर्शाना महत्त्वपूर्ण होता है । चर संहति की समस्याओं के लिए ऐसा करना और भी अधिक महत्त्वपूर्ण इस कारण से हो जाता है कि दिए गए समय के किसी क्षण पर निकाय को परिभाषित करना आवश्यक होता है तथा लघु समय अंतराल में इसका संवेग परिवर्तन आवेग से संबंधित होता है । जेट से निष्कासित गैसों द्वारा राकेट का धकेले जाना, तथा गिरती वर्षा की बूंद का धुंध को अपने साथ जोड़ना चर संहति निकायों के उदाहरण हैं ।

राशि	प्रतीक	मात्रक	विमाएं	टिप्पणी
संवेग	P	kg m s^{-1} अथवा N s	$[M][L][T]^{-1}$	सदिश
बल	F	N	$[M][L][T]^{-2}$	$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ द्वितीय नियम
आवेग		kg m s^{-1} अथवा N s	$[M][L][T]^{-1}$	आवेग = बल × समय = संवेग परिवर्तन
स्थैतिक घर्षण	f_s	N	$[M][L][T]^{-2}$	$f_s \le \mu_s N$
गतिज घर्षण	f_k	N	$[M][L][T]^{-2}$	$f_k = \mu_k N$

विचारणीय विषय

1. बल सदैव गति की दिशा में नहीं होता । परिस्थितियों पर निर्भर करते हुए, **F**, **v** के अनुदिश, **v** के विपरीत, **v** के अभिलंबवत् अथवा **v** से कोई अन्य कोण बनाते हुए हो सकता है । प्रत्येक प्रकरण में, यह त्वरण के समान्तर होता है ।
2. यदि किसी क्षण **v** = 0 है, अर्थात् यदि कोई पिण्ड क्षणिक विराम में है, तो इसका यह अर्थ नहीं होता कि उस क्षण पर बल अथवा त्वरण अवश्य ही शून्य हों । उदाहरण के लिए, जब ऊर्ध्वाधर ऊपर फेंकी गई कोई गेंद अपनी अधिकतम ऊंचाई पर पहुंचती है, तो **v** = 0 होता है, परंतु उस पिण्ड के भार mg के बराबर बल उस पर निरंतर लगा रहता है तथा त्वरण शून्य नहीं होता, यह g होता है ।
3. किसी दिए गए समय पर किसी पिण्ड पर आरोपित बल उस समय उस पिण्ड के स्थान की अवस्थिति द्वारा ज्ञात किया जाता है । कोई पिण्ड बल का वहन अपनी गति के पूर्व इतिहास से नहीं करता । जिस क्षण कोई पत्थर किसी त्वरित रेलगाड़ी से बाहर गिरा दिया जाता है, उस क्षण के तुरंत पश्चात्, यदि चारों ओर की वायु के प्रभाव नगण्य हैं तो उस पत्थर पर कोई क्षैतिज बल (अथवा त्वरण) कार्यरत नहीं रहता । तब पत्थर पर केवल पृथ्वी का ऊर्ध्वाधर गुरुत्व बल ही कार्य करता है ।
4. गति के द्वितीय नियम $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ में **F** पिण्ड के बाहर के सभी भौतिक साधनों द्वारा आरोपित नेट बल है । **a** बल का प्रभाव है । $m\mathbf{a}$ को अभी तक **F** के अतिरिक्त अन्य कोई बल नहीं समझा जाना चाहिए ।
5. अभिकेंद्र बल को कोई अन्य प्रकार का बल नहीं समझना चाहिए । यह मात्र एक नाम है जो उस बल को दिया गया है जो वर्तुल मार्ग पर गतिमान किसी पिण्ड को त्रिज्यतः केंद्र की ओर त्वरण प्रदान करता है । हमें वर्तुल गतियों में सदैव ही अभिकेंद्र बल के रूप में कुछ भौतिक बलों; जैसे- तनाव, गुरुत्वाकर्षण बल, वैद्युत बल, घर्षण बल आदि को खोजना चाहिए ।
6. स्थैतिक घर्षण बल अपनी सीमा $\mu_s N$ ($f_s \le \mu_s N$) तक एक स्वयं समायोजी बल है । बिना यह सुनिश्चित किए कि स्थैतिक घर्षण का अधिकतम मान कार्यरत हो गया है $f_s = \mu_s N$ कदापि मत रखिए ।
7. मेज पर रखे पिण्ड के लिए सुपरिचित समीकरण $mg = R$ केवल तभी सही है, जब पिण्ड साम्यावस्था में हो । ये दोनों बल, mg तथा R भिन्न भी हो सकते हैं (जैसा कि त्वरित लिफ्ट में रखे पिण्ड के उदाहरण में)। mg और R में समानता का तृतीय नियम से कोई संबंध नहीं है ।
8. गति के तृतीय नियम में पद 'क्रिया' तथा 'प्रतिक्रिया' का अर्थ किसी पिण्डों के युगल के बीच समक्षणिक पारस्परिक बलों से है । भाषा के अर्थ के विपरीत, क्रिया न तो प्रतिक्रिया से पहले घटित होती है और न ही प्रतिक्रिया का कारण होती है। क्रिया तथा प्रतिक्रिया दो भिन्न पिण्डों पर कार्य करती हैं ।
9. विभिन्न पद जैसे 'घर्षण', 'अभिलंब प्रतिक्रिया', 'तनाव', वायु-प्रतिरोध' 'श्यान कर्षण', 'प्रणोद', 'उत्प्लावन बल', 'भार', 'अभिकेंद्र बल' इन सभी का तात्पर्य विभिन्न संदर्भों में 'बल' ही होता है । स्पष्टता के लिए, यांत्रिकी में मिलने वाले प्रत्येक बल तथा उसके तुल्य पदों को इस वाक्यांश में रूपान्तरित करना चाहिए 'A पर B द्वारा बल' ।
10. गति के द्वितीय नियम को लागू करने के लिए, सजीव तथा निर्जीव पिण्डों के बीच कोई वैचारिक भिन्नता नहीं होती । किसी सजीव पिण्ड, जैसे किसी मानव को भी त्वरित करने के लिए बाह्य बल चाहिए । उदाहरण के लिए, घर्षण बाह्य बल के बिना हम धरती पर चल नहीं सकते ।
11. भौतिकी में 'बल' की वस्तुनिष्ठ संकल्पना तथा 'बल का अनुभव' की व्यक्तिनिष्ठ संकल्पना के बीच कोई भ्रम नहीं होना चाहिए । किसी 'मेरी गो राउण्ड' में हमारे शरीर के सभी अंगों पर अंदर की ओर बल लगता है । परंतु हमें बाहर की ओर धकेले जाने का अनुभव होता है जो समुपस्थित गति की दिशा है ।

12. केवल अजड़त्वीय निर्देश फ्रेमों में ही छद्म बलों का आह्वान किया जाना चाहिए । यह स्पष्टीकरण कि "क्षैतिज वृत्त में परिक्रमण करते किसी पत्थर के लिए, डोरी में तनाव द्वारा प्रदान किया गया अभिकेंद्र बल, अपकेंद्र बल द्वारा संतुलित किया जाता है" प्रयोगशाला (जड़त्वीय)निर्देश फ्रेम के लिए गलत है । उस अजड़त्वीय निर्देश फ्रेम के आपेक्ष जो पत्थर के साथ परिक्रमा कर रहा है, यह एक सही स्पष्टीकरण है ।

अभ्यास

(आंकिक परिकलनाओं में सरलता के लिए $g = 10\text{ m s}^{-2}$ लीजिए)

5.1 निम्नलिखित पर कार्यरत नेट बल का परिमाण व उसकी दिशा लिखिए :
- (a) एकसमान चाल से नीचे गिरती वर्षा की कोई बूंद,
- (b) जल में तैरता 10 g संहति का कोई कार्क,
- (c) आकाश में कुशलता से स्थिर रखी गई कोई पतंग,
- (d) 30 km h^{-1} के एकसमान वेग से ऊबड़-खाबड़ सड़क पर गतिशील कोई कार,
- (e) अंतरिक्ष में, सभी गुरुत्वीय पिण्डों से दूर तथा वैद्युत और चुंबकीय क्षेत्रों से मुक्त, तीव्र चाल वाला इलेक्ट्रॉन ।

5.2 0.05 kg संहति का कोई कंकड़ ऊर्ध्वाधर ऊपर फेंका गया है । नीचे दी गई प्रत्येक परिस्थिति में कंकड़ पर लग रहे नेट बल का परिमाण व उसकी दिशा लिखिए :
- (a) उपरिमुखी गति के समय
- (b) अधोमुखी गति के समय
- (c) उच्चतम बिंदु पर जहां क्षण भर के लिए यह विराम में रहता है । यदि कंकड़ को क्षैतिज दिशा से 45° कोण पर ऊपर फेंका जाए, तो क्या आपके उत्तर में कोई परिवर्तन होगा ?

वायु-प्रतिरोध को नगण्य मानिए ।

5.3 निम्नलिखित पर कार्यरत नेट बल का परिमाण व उसकी दिशा निकालिए :
- (a) स्थिर रेलगाड़ी की खिड़की से गिराने के तुरंत पश्चात् 0.1 kg संहति के किसी पत्थर पर,
- (b) 36 km h^{-1} के एकसमान वेग से गतिशील किसी रेलगाड़ी से गिराने के तुरंत पश्चात् 0.1 kg संहति के उपरोक्त पत्थर पर,
- (c) 1 m s^{-2} के त्वरण से गतिशील किसी रेलगाड़ी से गिराने के तुरंत पश्चात् 0.1 kg संहति के उपरोक्त पत्थर पर,
- (d) 1 m s^{-2} के त्वरण से गतिशील किसी रेलगाड़ी के फर्श पर पड़े 0.1 kg संहति के उसी पत्थर पर जबकि वह रेलगाड़ी के आपेक्ष विराम में है ।

उपरोक्त सभी स्थितियों में वायु का प्रतिरोध नगण्य मानिए ।

5.4 l लंबाई की एक डोरी का एक सिरा m संहति के किसी कण से तथा दूसरा सिरा चिकनी क्षैतिज मेज पर लगी खूँटी से बँधा है। यदि कण v चाल से वृत्त में गति करता है तो कण पर (केंद्र की ओर निदेशित) नेट बल है :

(i) T, (ii) $T - \frac{mv^2}{l}$, (iii) $T + \frac{mv^2}{l}$, (iv) O

[सही विकल्प चुनिए] T डोरी में तनाव है ।

5.5 15 m s^{-1} की आरंभिक चाल से गतिशील 20 kg द्रव्यमान के किसी पिण्ड पर 50 N का स्थाई मंदन बल आरोपित किया गया है। पिण्ड को रुकने में कितना समय लगेगा ?

5.6 3.0 kg संहति के किसी पिण्ड पर आरोपित कोई बल 25 s में उसकी चाल को 2.0 m s^{-1} से 3.5 m s^{-1} कर देता है । पिण्ड की गति की दिशा अपरिवर्तित रहती है । बल का परिमाण व दिशा क्या है ?

5.7 5.0 kg संहति के किसी पिण्ड पर 8 N व 6 N के दो लंबवत् बल आरोपित है । पिण्ड के त्वरण का परिमाण व दिशा निकालिए ।

5.8 36 km h^{-1} की चाल से गतिमान किसी आटो रिक्शा का चालक सड़क के बीच एक बच्चे को खड़ा देखकर अपने वाहन को ठीक 4.0 s में रोककर उस बच्चे को बचा लेता है । यदि आटो रिक्शा बच्चे के ठीक निकट रुकता है, तो वाहन पर लगा औसत मंदन बल क्या है ? आटोरिक्शा तथा चालक की संहतियां क्रमशः 400 kg और 65 kg हैं ।

5.9 20,000 kg उत्थापन संहति के किसी राकेट में 5 m s^{-2} के आरंभिक त्वरण के साथ स्फोट किया जाता है । स्फोट का आरंभिक प्रणोद (बल) परिकलित कीजिए ।

5.10 उत्तर की ओर 10 m s^{-1} की एकसमान चाल से गतिमान 0.40 kg संहति के किसी कण पर दक्षिण दिशा के अनुदिश 8.0 N का स्थाई बल 30 s के लिए आरोपित किया जाता है । जिस क्षण बल आरोपित किया गया उसे $t = 0$, तथा उस समय कण की स्थिति $x = 0$ लीजिए । $t = -5\text{ s}, 25\text{ s}, 100\text{ s}$ पर इस कण की स्थिति की भविष्यवाणी कीजिए ।

5.11 कोई कार विरामावस्था से गति आरंभ करके $2.0\ m\ s^{-2}$ के समान त्वरण से गतिशील रहती है । $t = 10\ s$ पर, कार की 1 m ऊंची खिड़की से कोई पत्थर बाहर गिराया जाता है । $t = 11\ s$ पर, पत्थर का (a) वेग, तथा (b) त्वरण क्या है ? (वायु का प्रतिरोध नगण्य मानिए।)

5.12 किसी कमरे की छत से 2 m लंबी डोरी द्वारा 0.1 kg संहति के गोलक को लटकाकर दोलन आरंभ किए गए । अपनी माध्य स्थिति पर गोलक की चाल $1\ m\ s^{-1}$ है । गोलक का प्रक्षेप-पथ क्या होगा यदि डोरी को उस समय काट दिया जाता है जब गोलक अपनी (a) चरम स्थितियों में से किसी एक पर है, तथा (b) माध्य स्थिति पर है ?

5.13 किसी व्यक्ति की संहति 70 kg है । वह एक गतिमान लिफ्ट में तुला पर खड़ा है जो

(a) $10\ m\ s^{-1}$ की एकसमान चाल से ऊपर जा रही है,

(b) $5\ m\ s^{-2}$ के एकसमान त्वरण से नीचे जा रही है,

(c) $5\ m\ s^{-2}$ के एकसमान त्वरण से ऊपर जा रही है, तथा

प्रत्येक स्थिति में तुला के पैमाने का पठन क्या होगा ?

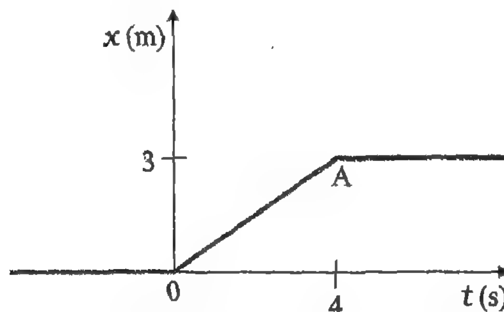
(d) यदि लिफ्ट की मशीन में खराबी आ जाए और वह गुरुत्वीय प्रभाव में मुक्त रूप से नीचे गिरे तो पठन क्या होगा ?

5.14 चित्र 5.19 में 4 kg संहति के किसी पिण्ड का स्थिति-समय ग्राफ दर्शाया गया है ।

(a) $t < 0$; $t > 4\ s$; $0 < t < 4\ s$ के लिए पिण्ड पर आरोपित बल क्या है ?

(b) $t = 0$ तथा $t = 4\ s$ पर आवेग क्या है ?

(केवल एकविमीय गति पर विचार कीजिए)



चित्र 5.19

5.15 600 N का कोई क्षैतिज बल किसी घर्षणरहित मेज पर रखे 10 kg तथा 20 kg के दो पिण्डों को, जो किसी पतली डोरी द्वारा आपस में जुड़े हैं, खींच रहा है । डोरी में तनाव क्या है ? क्या आपका उत्तर इस पर निर्भर करता है कि बल किस पिण्ड के छोर पर आरोपित किया गया है ?

5.16 8 kg तथा 12 kg के दो पिण्डों को किसी हल्की अवितान्य डोरी, जो घर्षणरहित घिरनी पर चढ़ी है, के दो सिरों से बाँधा गया है। पिण्डों को मुक्त छोड़ने पर उनके त्वरण तथा डोरी में तनाव ज्ञात कीजिए ।

5.17 प्रयोगशाला के निर्देश फ्रेम में कोई नाभिक विराम में है । यदि यह नाभिक दो छोटे नाभिकों में विघटित हो जाता है, तो यह दर्शाइए कि उत्पाद विपरीत दिशाओं में उत्सर्जित होने चाहिए ।

5.18 दो बिलियर्ड गेंद जिनमें प्रत्येक की संहति 0.05 kg है, $6\ m\ s^{-1}$ की चाल से विपरीत दिशाओं में गति करती हुई संघट्ट करती है और संघट्ट के पश्चात् उसी चाल से वापस लौटती हैं । प्रत्येक गेंद पर दूसरी गेंद कितना आवेग लगाती है ?

5.19 100 kg संहति की किसी बंदूक द्वारा 0.020 kg की गोली दागी गई है । यदि गोली की नालमुखी चाल $80\ m\ s^{-1}$ है तो बंदूक की प्रतिक्षेप चाल क्या है ?

5.20 कोई बल्लेबाज किसी गेंद को 45° के कोण पर विक्षेपित कर देता है। ऐसा करने में वह गेंद की आरंभिक चाल, जो $54\ km/h^{-1}$ है, में कोई परिवर्तन नहीं करता । गेंद को कितना आवेग दिया जाता है ? (गेंद की संहति 0.15 kg है ।)

5.21 किसी डोरी के एक सिरे से बँधा 0.25 kg संहति का कोई पत्थर क्षैतिज तल में 1.5 m त्रिज्या के वृत्त पर 40 rev/min की चाल से चक्कर लगाता है? डोरी में तनाव कितना है ? यदि डोरी 200 N के अधिकतम तनाव को सहन कर सकती है, तो वह अधिकतम चाल ज्ञात कीजिए जिससे पत्थर को घुमाया जा सकता है ।

5.22 यदि प्रश्न 5.21 में पत्थर की चाल को अधिकतम अनुमोदित सीमा से भी अधिक कर दिया जाए, तथा डोरी यकायक टूट जाए, तो डोरी के टूटने के पश्चात् पत्थर के प्रक्षेप का सही वर्णन निम्नलिखित में से कौन करता है :

(a) वह पत्थर झटके के साथ त्रिज्यतः बाहर की ओर जाता है।

(b) डोरी टूटने के क्षण पत्थर स्पर्शरेखीय पथ पर उड़ जाता है।

(c) पत्थर स्पर्शी से किसी कोण पर, जिसका परिमाण पत्थर की चाल पर निर्भर करता है, उड़ जाता है ।

5.23 सामान्य पार्थिव प्रयोगों के लिए निम्नलिखित प्रेक्षकों में कौन-से प्रेक्षक जड़त्वीय हैं और कौन-से अजड़त्वीय हैं ?

(a) विशाल चक्र में परिक्रमण करता कोई बच्चा,

(b) किसी स्पोर्ट्स कार में 200 $km\ h^{-1}$ की एकसमान तीव्र चाल से सीधी सड़क पर गतिशील कोई चालक,

(c) धरती से उड़ान भरता कोई वायुयान चालक,

(d) तीक्ष्ण मोड़ लेते हुए कोई साइकिल सवार,

(e) किसी स्टेशन पर रुकने के लिए मंद हो रही किसी रेलगाड़ी का गार्ड ।

5.24 बहुधा हमें वर्तुल गति से संबंधित निम्न प्रकार के प्रकथन सुनने को मिलते हैं : "वृत्त के अनुदिश एकसमान चाल से गतिमान किसी कण पर केंद्र की ओर एक बल (अभिकेंद्र बल) तथा परिमाण में समान एवं दिशा में विपरीत एक अन्य बल (अपकेंद्र बल) लगता है । ये दोनों बल मिलकर कण को साम्यावस्था में रखते हैं ।" इस प्रकथन में क्या त्रुटि है स्पष्ट कीजिए ।

5.25 स्पष्ट कीजिए कि क्यों :

(a) कोई घोड़ा रिक्त दिक्स्थान में किसी गाड़ी को खींचकर दौड़ नहीं सकता ।

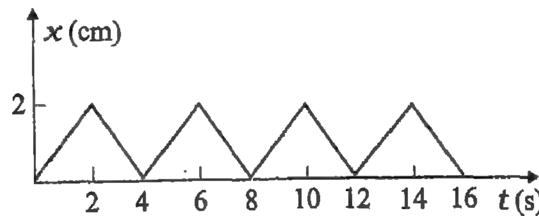
(b) किसी तीव्र गति से चल रही बस के यकायक रुकने पर यात्री आगे की ओर गिरते हैं ।

(c) लान मूवर को धकेलने की तुलना में खींचना आसान होता है ।

(d) क्रिकेट का खिलाड़ी गेंद को लपकते समय अपने हाथ गेंद के साथ पीछे को खींचता है ।

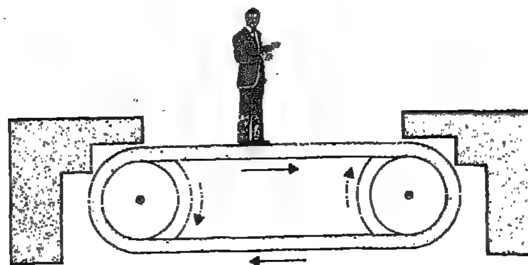
अतिरिक्त अभ्यास

5.26 चित्र 5.20 में 0.04 kg संहति के किसी कण का स्थिति-समय ग्राफ दर्शाया गया है । इस गति के लिए कोई उचित भौतिक संदर्भ प्रस्तावित कीजिए । कण द्वारा प्राप्त दो क्रमिक आवेगों के बीच समय-अंतराल क्या है ? प्रत्येक आवेग का परिमाण क्या है ?



चित्र 5.20

5.27 चित्र 5.21 में कोई व्यक्ति 1 $m\ s^{-2}$ त्वरण से गतिशील क्षैतिज संवाहक पट्टे के संदर्भ में स्थिर खड़ा है । उस व्यक्ति पर आरोपित नेट बल क्या है ? यदि व्यक्ति के जूतों और पट्टे के बीच स्थैतिक घर्षण गुणांक 0.2 है, तो पट्टे के कितने त्वरण तक वह व्यक्ति उस पट्टे के आपेक्ष स्थिर रह सकता है ? (व्यक्ति की संहति = 65 kg)



चित्र 5.21

5.28 m संहति के पत्थर को किसी डोरी के एक सिरे से बाँधकर R त्रिज्या के ऊर्ध्वाधर वृत्त में घुमाया जाता है । वृत्त के निम्नतम तथा उच्चतम बिंदुओं पर ऊर्ध्वाधरतः अधोमुखी दिशा में नेट बल हैं : (सही विकल्प चुनिए)

निम्नतम बिंदु पर	उच्चतम बिंदु पर
(i) $mg - T_1$	$mg + T_2$
(ii) $mg + T_1$	$mg - T_2$
(iii) $mg + T_1 + (mv_1^2)/R$	$mg - T_2 + (mv_2^2)/R$
(iv) $mg - T_1 - (mv_1^2)/R$	$mg + T_2 + (mv_2^2)/R$

यहां T_1, T_2 (तथा v_1, v_2) डोरी में तनाव (तथा पत्थर की क्रमशः निम्नतम व उच्चतम बिंदुओं पर चाल) दर्शाते हैं ।

5.29 1000 kg संहति का कोई हेलीकॉप्टर 15 m s^{-2} के ऊर्ध्वाधर त्वरण से ऊपर उठता है । चालक दल तथा यात्रियों की संहति 300 kg है । निम्नलिखित बलों का परिमाण व दिशा लिखिए:

(*a*) चालक दल का यात्रियों द्वारा फर्श पर आरोपित बल,
(*b*) चारों ओर की वायु पर हेलीकॉप्टर के रोटर की क्रिया, तथा
(*c*) चारों ओर की वायु के कारण हेलीकॉप्टर पर आरोपित बल ।

5.30 15 m s^{-1} चाल से क्षैतिजतः प्रवाहित कोई जलधारा 10^{-2} m^2 अनुप्रस्थ काट की किसी नली से बाहर निकलती है तथा समीप की किसी ऊर्ध्वाधर दीवार से टकराती है । जल की टक्कर द्वारा, यह मानते हुए कि जलधारा टकराने पर वापस नहीं लौटती, दीवार पर आरोपित बल ज्ञात कीजिए ।

5.31 किसी मेज पर एक-एक रुपये के दस सिक्कों को एक के ऊपर एक करके रखा गया है । प्रत्येक सिक्के की संहति m kg है । निम्नलिखित प्रत्येक स्थिति में बल का परिमाण एवं दिशा लिखिए:

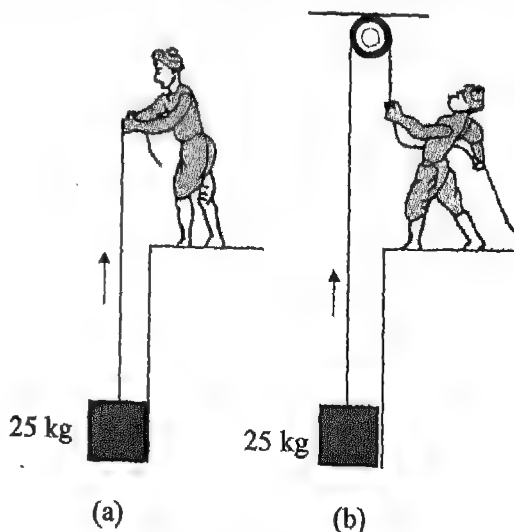
(*a*) सातवें सिक्के (नीचे से गिनने पर) पर उसके ऊपर रखे सभी सिक्कों के कारण बल,
(*b*) सातवें सिक्के पर आठवें सिक्के द्वारा आरोपित बल, तथा
(*c*) छठे सिक्के की सातवें सिक्के पर प्रतिक्रिया ।

5.32 कोई वायुयान अपने पंखों को क्षैतिज से 15° के झुकाव पर रखते हुए 720 km h^{-1} की चाल से एक क्षैतिज लूप पूरा करता है । लूप की त्रिज्या क्या है ?

5.33 कोई रेलगाड़ी बिना ढाल वाले 30 m त्रिज्या के वृत्तीय मोड़ पर 54 km h^{-1} चाल से चलती है । रेलगाड़ी की संहति 10^6 kg है । इस कार्य को करने के लिए आवश्यक अभिकेंद्र बल कौन प्रदान करता है ? इंजन अथवा पटरियां ? पटरियों को क्षतिग्रस्त होने से बचाने के लिए मोड़ का ढाल-कोण कितना होना चाहिए ?

5.34 "अधिकांश प्रयोगशाला स्तर के पार्थिव प्रयोगों के लिए पृथ्वी को जड़त्वीय फ्रेम मानना तर्कसंगत है, परंतु खगोलीय प्रेक्षणों के लिए पृथ्वी एक अजड़त्वीय निर्देश फ्रेम है ।" इस प्रकथन की व्याख्या कीजिए । आप क्या देखते हैं, एक ही निर्देश फ्रेम किसी एक प्रयोजन के लिए सन्निकटतः जड़त्वीय हो सकता है और किसी अन्य प्रयोजन के लिए अजड़त्वीय भी हो सकता है ।

5.35 चित्र 5.22 में दर्शाए अनुसार 50 kg संहति का कोई व्यक्ति 25 kg संहति के किसी गुटके को दो भिन्न ढंग से उठाता है । दोनों स्थितियों में उस व्यक्ति द्वारा फर्श पर आरोपित क्रिया-बल कितना है ? यदि 700 N अभिलंब बल से फर्श धँसने लगता है, तो फर्श को धँसने से बचाने के लिए उस व्यक्ति को, गुटके को उठाने के लिए, कौन-सा ढंग अपनाना चाहिए ।

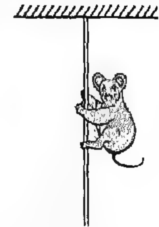


चित्र 5.22

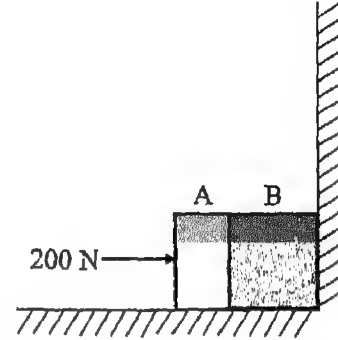
5.36 40 kg संहति का कोई बंदर 600 N का अधिकतम तनाव सह सकने योग्य किसी रस्सी पर चढ़ता है (चित्र 5.23) । नीचे दी गई स्थितियों में से किसमें रस्सी टूट जाएगी :

(a) बंदर 6 m s^{-2} त्वरण से ऊपर चढ़ता है,
(b) बंदर 4 m s^{-2} त्वरण से नीचे उतरता है,
(c) बंदर 5 m s^{-1} की एकसमान चाल से ऊपर चढ़ता है,
(d) बंदर लगभग मुक्त रूप से गुरुत्व बल के प्रभाव में रस्सी से गिरता है ।

(रस्सी की संहति नगण्य मानिए ।)


चित्र 5.23

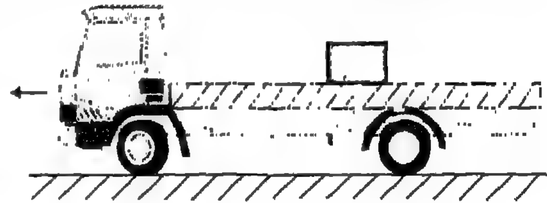
5.37 दो पिण्ड A तथा B, जिनकी संहति क्रमशः 5 kg तथा 10 kg हैं, एक दूसरे के संपर्क में एक मेज पर किसी दृढ़ विभाजक दीवार के सामने विराम में रखे हैं (चित्र 5.24) । पिण्डों तथा मेज के बीच घर्षण गुणांक 0.15 है । 200 N का कोई बल क्षैतिजतः A पर आरोपित किया जाता है । (a) विभाजक दीवार की प्रतिक्रिया, तथा (b) A तथा B के बीच क्रिया–प्रतिक्रिया बल क्या हैं ? विभाजक दीवार को हटाने पर क्या होता है ? यदि पिण्ड गतिशील हैं तो क्या (b) का उत्तर बदल जाएगा ? μ_s तथा μ_k के बीच अंतर की उपेक्षा कीजिए ।



चित्र 5.24

5.38 15 kg संहति का कोई गुटका किसी लंबी ट्राली पर रखा है । गुटके तथा ट्राली के बीच स्थैतिक घर्षण गुणांक 0.18 है । ट्राली विरामावस्था से 20 s तथा 0.5 m s^{-2} के त्वरण से त्वरित होकर एकसमान वेग से गति करने लगती है । (a) धरती पर स्थिर खड़े किसी प्रेक्षक को, तथा (b) ट्राली के साथ गतिमान किसी अन्य प्रेक्षक को, गुटके की गति कैसी प्रतीत होगी इसकी विवेचना कीजिए ।

5.39 चित्र 5.25 में दर्शाए अनुसार किसी ट्रक का पिछला भाग खुला है तथा 40 kg संहति का एक संदूक खुले सिरे से 5 m दूरी पर रखा है । ट्रक के फर्श तथा संदूक के बीच घर्षण गुणांक 0.15 है । किसी सीधी सड़क पर ट्रक विरामावस्था से गति प्रारंभ करके 2 m s^{-2} से त्वरित होता है । आरंभ बिंदु से कितनी दूरी चलने पर वह संदूक ट्रक से नीचे गिर जाएगा ? (संदूक के आकार की उपेक्षा कीजिए ।)


चित्र 5.25

5.40 15 cm त्रिज्या का कोई बड़ा ग्रामोफोन रिकार्ड $33\frac{1}{3}$ rev/min की चाल से घूर्णन कर रहा है । रिकार्ड पर उसके केंद्र से 4 cm तथा 14 cm की दूरियों पर दो सिक्के रखे गए हैं । यदि सिक्के तथा रिकार्ड के बीच घर्षण गुणांक 0.15 है तो कौन सा सिक्का रिकार्ड के साथ परिक्रमा करेगा ?

5.41 आपने सरकसों में मौत के कुएं (एक खोखला जालयुक्त गोलीय चैम्बर ताकि उसके भीतर के क्रियाकलापों को दर्शक देख सकें) में मोटरसाइकिल सवार को ऊर्ध्वाधर लूप में मोटरसाइकिल चलाते हुए देखा होगा । स्पष्ट कीजिए कि वह मोटरसाइकिल सवार नीचे से कोई सहारा न होने पर भी गोले के उच्चतम बिंदु से नीचे क्यों नहीं गिरता । यदि चैम्बर की त्रिज्या 25 m है तो ऊर्ध्वाधर लूप को पूरा करने के लिए मोटरसाइकिल की न्यूनतम चाल कितनी होनी चाहिए ?

5.42 70 kg संहति का कोई व्यक्ति अपने ऊर्ध्वाधर अक्ष पर 300 *rev/min* की चाल से घूर्णन करती 3 m त्रिज्या की किसी बेलनाकार दीवार के साथ उसके संपर्क में खड़ा है । दीवार तथा उसके कपड़ों के बीच घर्षण गुणांक 0.15 है । दीवार की वह न्यूनतम घूर्णन चाल ज्ञात कीजिए, जिससे फर्श को यकायक हटा लेने पर भी, वह व्यक्ति बिना गिरे दीवार से चिपका रह सके ।

5.43 R त्रिज्या का पतला वृत्तीय तार अपने ऊर्ध्वाधर व्यास के परितः कोणीय आवृत्ति ω से घूर्णन कर रहा है । यह दर्शाइए कि इस तार में डली कोई मणिका $\omega \le \sqrt{g/R}$ के लिए अपने निम्नतम बिंदु पर रहती है । $\omega = \sqrt{\frac{2g}{R}}$ के लिए, केंद्र से मनके को जोड़ने वाला त्रिज्य सदिश ऊर्ध्वाधर अधोमुखी दिशा से कितना कोण बनाता है । (घर्षण को नगण्य मानिए ।)

अध्याय 6

कार्य, ऊर्जा और शक्ति

6.1 भूमिका

दैनिक बोलचाल की भाषा में हम प्राय: 'कार्य', 'ऊर्जा', और 'शक्ति' शब्दों का प्रयोग करते हैं। यदि कोई किसान खेत में खरपतवार की छँटाई करता है तो यह कहा जाता है कि उसने कठिन परिश्रम किया है। जब कोई स्त्री कुएं से पानी अपने घर ले जा रही होती है तो यही माना जाता है कि वह कार्य कर रही है। यदि किसी सूखाग्रस्त क्षेत्र में उसे पानी पर्याप्त दूरी से लाना पड़ता है तो यह माना जाता है कि वह बहुत ऊर्जस्विता है। इस प्रकार, ऊर्जा किसी कार्य को करने की क्षमता है। 'शक्ति' शब्द प्राय: चाल से संबद्ध होता है। कराटे में शक्तिशाली मुक्का वही माना जाता है जो तेज गति से मारा जाता है। भौतिकी में, हम इन शब्दों को परिशुद्ध रूप से परिभाषित करेंगे। हम यह देखेंगे कि इन पदों की भौतिक परिभाषाओं तथा इनके द्वारा मस्तिष्क में बने शारीरिक चित्रणों के बीच अधिक से अधिक सहसंबंध अल्प ही होता है।

6.2 कार्य और गतिज ऊर्जा की धारणा : कार्य-ऊर्जा प्रमेय

अध्याय 3 में, नियत त्वरण a के अंतर्गत सरल रेखीय गति के लिए आप निम्न भौतिक संबंध पढ़ चुके हैं;

$$v^2 - u^2 = 2as$$

जहां u तथा v क्रमश: आरंभिक व अंतिम चाल और s वस्तु द्वारा चली गई दूरी है। दोनों पक्षों को $\left(\frac{m}{2}\right)$ से गुणा करने पर

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2 = mas = Fs \qquad (6.1)$$

जहां आखिरी चरण न्यूटन के द्वितीय नियमानुसार है। इस प्रकार सदिशों के प्रयोग द्वारा सहज ही समीकरण (6.1) का त्रिविमीय व्यापकीकरण कर सकते हैं

$$v^2 - u^2 = 2\,\mathbf{a}\,.\,\mathbf{d}$$

एक बार फिर दोनों पक्षों को $\left(\frac{m}{2}\right)$ से गुणा करने पर हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2 = m\,\mathbf{a.d} = \mathbf{F.\,d} \qquad (6.2)$$

उपरोक्त समीकरण कार्य एवं गतिज ऊर्जा को परिभाषित करने के लिए प्रेरित करती है । समीकरण (6.2) में बायां पक्ष वस्तु के द्रव्यमान के आधे और उसकी चाल के वर्ग के गुणनफल के अंतिम और आरंभिक मान का अंतर है । हम इनमें से प्रत्येक राशि को 'गतिज ऊर्जा' कहते हैं और संकेत K से निर्दिष्ट करते हैं । समीकरण का दायां पक्ष वस्तु पर आरोपित बल का विस्थापन के अनुदिश घटक और वस्तु के विस्थापन का गुणनफल है । इस राशि को 'कार्य' कहते हैं और इसे संकेत W से निर्दिष्ट करते हैं । अतः समीकरण (6.2) को निम्न प्रकार लिख सकते हैं :

$$K_f - K_i = W \quad (6.3)$$

जहां K_i तथा K_f वस्तु की आरंभिक एवं अंतिम ऊर्जा हैं । कार्य किसी वस्तु पर लगने वाले बल और इसके विस्थापन के संबंध को बताता है । ***अतः किसी निश्चित विस्थापन के दौरान वस्तु पर लगाया गया बल कार्य कहलाता है ।***

समीकरण (6.1) कार्य-ऊर्जा प्रमेय की एक विशेष स्थिति है जो यह प्रदर्शित करती है कि **किसी वस्तु पर लगाए गए कुल बल द्वारा किया गया कार्य उस वस्तु की गतिज ऊर्जा में परिवर्तन के बराबर होता है ।** परिवर्ती बल के लिए उपरोक्त व्युत्पत्ति का व्यापकीकरण हम अनुभाग 6.6 में करेंगे ।

▶ ***उदाहरण 6.1*** हम अच्छी तरह जानते हैं कि वर्षा की बूंद नीचे की ओर लगने वाले गुरुत्वाकर्षण बल और बूंद के गिरने की दिशा के विपरीत लगने वाले प्रतिरोधी बल के प्रभाव के अधीन गिरती है । प्रतिरोधी बल बूंद की चाल के अनुक्रमानुपाती, परंतु अनिर्धारित होता है । माना कि 1 g द्रव्यमान की वर्षा की बूंद (या कंकड़) 1.00 km ऊंचाई की किसी चोटी से गिर रही है । यह धरातल पर 50.00 m s^{-1} की चाल से संघट्ट करती है । अज्ञात प्रतिरोधी बल द्वारा किया गया कार्य क्या है ?

हल कंकड़ की गतिज ऊर्जा में परिवर्तन

$$\Delta K = \frac{1}{2} m v^2 - 0 = \frac{1}{2} \times 10^{-3} \times (50)^2$$
$$= 1.25 J$$

यहां हमने यह कल्पना कर ली है कि कंकड़ चोटी से विरामावस्था से गिरना आरंभ करता है ।

गुरुत्वाकर्षण बल द्वारा किया गया कार्य $W_g = m g h$

मान लीजिए कि $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ है जो 1 km तक अचर है ।

अतः $W_g = m g h$
$= 10^{-3} \times 10 \times 10^3$
$= 10 J$

कार्य-ऊर्जा प्रमेय से, $\Delta K = W_g + W_r$

जहां W_r प्रतिरोधी बल द्वारा किया गया कार्य है । अतः

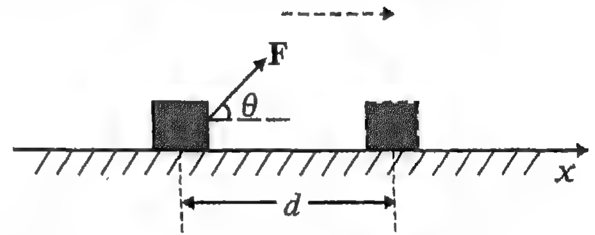
$$W_r = \Delta K - W_g$$
$$= 1.25 - 10$$
$$= -8.75 J$$

ऋणात्मक है । ◀

अब हम इस अनुभाग में प्रस्तुत भौतिक राशियों का विस्तृत अध्ययन करेंगे ।

6.3 कार्य

उपरोक्त अनुभाग में आपने देखा कि कार्य, बल और उसके द्वारा वस्तु के विस्थापन से संबंधित होता है । माना कि एक अचर बल **F**, किसी m द्रव्यमान के पिंड पर लग रहा है जिसके कारण पिंड का धनात्मक x-दिशा में होने वाला विस्थापन **d** है जैसा कि चित्र 6.1 में दर्शाया गया है ।



चित्र 6.1 *किसी पिंड का आरोपित बल* **F** *के कारण विस्थापन* **d** *।*

अतः किसी बल द्वारा किया गया कार्य "बल के विस्थापन की दिशा के अनुदिश घटक और विस्थापन के परिमाण के गुणनफल" के रूप में परिभाषित किया जाता है । अतः

$$W = (F \cos \theta) d = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d} \quad (6.4)$$

हम देखते हैं कि यदि वस्तु का विस्थापन शून्य है तो बल का परिमाण कितना ही अधिक क्यों न हो, वस्तु द्वारा किया गया कार्य शून्य होता है । जब कभी आप किसी ईंटों की दृढ़ दीवार को धक्का देते हैं तो कोई कार्य नहीं होता है । इस प्रक्रिया में आपकी मांसपेशियों का एकांतरतः संकुचन और शिथिलीकरण हो रहा है और आंतरिक ऊर्जा लगातार व्यय हो रही है और आप थक जाते हैं । भौतिक विज्ञान में कार्य का अर्थ इसके दैनिक भाषा में प्रयोग के अर्थ से भिन्न है ।

कोई भी कार्य तब तक संपन्न हुआ नहीं माना जाता है जब तक कि :

(i) वस्तु का विस्थापन शून्य है, जैसा कि पूर्ववर्ती अनुच्छेद के उदाहरण में आपने देखा । कोई भारोत्तोलक 150 kg द्रव्यमान के भार को 30 s तक अपने कंधे पर लगातार उठाए हुए खड़ा है तो वह कोई कार्य नहीं कर रहा है ।

(ii) बल शून्य है । किसी चिकनी क्षैतिज मेज पर गतिमान पिंड पर कोई क्षैतिज बल कार्य नहीं करता है, परंतु पिंड का विस्थापन काफी अधिक हो सकता है ।

(iii) यदि बल और विस्थापन परस्पर लंबवत् हैं तो कार्य शून्य होगा, क्योंकि $\theta = \pi/2$ rad (= 90°), $\cos (\pi/2) = 0$ ।

किसी चिकनी क्षैतिज मेज पर गतिमान पिंड के लिए गुरुत्वाकर्षण बल mg कोई कार्य नहीं करता है क्योंकि यह विस्थापन के लंबवत् कार्य कर रहा है । पृथ्वी के परितः चंद्रमा की कक्षा लगभग वृत्ताकार है । यदि हम चंद्रमा की कक्षा को पूर्ण रूप से वृत्ताकार मान लें, तो पृथ्वी का गुरुत्वाकर्षण बल कोई कार्य नहीं करता है क्योंकि चंद्रमा का तात्कालिक विस्थापन स्पर्शरेखीय है जबकि पृथ्वी का बल त्रिज्यीय (केंद्र की ओर) है, अर्थात् $\theta = \pi/2$ ।

कार्य धनात्मक व ऋणात्मक दोनों प्रकार का हो सकता है । यदि θ, 90° और 180° के मध्य है तो समीकरण में $\cos\theta$ का मान ऋणात्मक होगा । अनेक उदाहरणों में घर्षण बल, विस्थापन का विरोध करता है और $\theta = 180°$ होता है । ऐसी दशा में घर्षण बल द्वारा किया गया कार्य ऋणात्मक होता है ($\cos 180° = -1$) ।

समीकरण (6.4) से स्पष्ट है कि कार्य और ऊर्जा की विमाएं समान हैं $[ML^2T^{-2}]$ । ब्रिटिश भौतिकविद जेम्स प्रेसकॉट जूल (1818-1869) के सम्मान में इनका SI मात्रक 'जूल' कहलाता है । चूंकि कार्य एवं ऊर्जा व्यापक रूप से भौतिक धारणाओं के रूप में प्रयोग किए जाते हैं, अतः ये वैकल्पिक मात्रकों से भरपूर हैं और उनमें से कुछ सारणी 6.1 में सूचीबद्ध हैं ।

सारणी 6.1 : कार्य/ऊर्जा के वैकल्पिक मात्र (जूल में)

अर्ग	10^{-7} J
इलेक्ट्रॉन वोल्ट (eV)	1.6×10^{-19} J
कैलोरी (cal)	4.186 J
किलोवाट-घंटा (kWh)	3.6×10^{6} J

▶ ***उदाहरण 6.2*** कोई साइकिल सवार ब्रेक लगाने पर फिसलता हुआ 10 m दूर जाकर रुकता है । इस प्रक्रिया की अवधि में, सड़क द्वारा साइकिल पर लगाया गया बल 200 N है जो उसकी गति के विपरीत है । (a) सड़क द्वारा साइकिल पर कितना कार्य किया गया ? (b) साइकिल द्वारा सड़क पर कितना कार्य किया गया ?

हल

(a) यहां विरोधी बल और साइकिल के विस्थापन के मध्य कोण 180° (या π rad) है। अतः सड़क द्वारा किया गया कार्य अर्थात् विरोधी बल

$$W_r = Fd\cos\theta = 200 \times 10 \times \cos\pi = -2000 \text{ J}$$

कार्य-ऊर्जा प्रमेय के अनुसार, इस ऋणात्मक कार्य के कारण ही साइकिल रुक जाती है ।

(b) न्यूटन के गति के तृतीय नियमानुसार साइकिल द्वारा सड़क पर लगाया गया बल सड़क द्वारा साइकिल पर लगाए बल के बराबर परंतु विपरीत दिशा में होगा । इसका परिमाण 200 N है । तथापि, सड़क का विस्थापन नहीं होता है । अतः साइकिल द्वारा सड़क पर किया गया कार्य शून्य होगा । ◀

इस उदाहरण से हमें यह पता चलता है कि यद्यपि पिंड B द्वारा A पर लगाया गया बल, पिंड A द्वारा पिंड B पर लगाए गए बल के बराबर तथा विपरीत दिशा में है (न्यूटन का गति का तीसरा नियम) । तथापि यह आवश्यक नहीं है कि पिंड B द्वारा A पर किया गया कार्य, पिंड A द्वारा B पर किए गए कार्य के बराबर तथा विपरीत दिशा में हो ।

6.4 गतिज ऊर्जा

जैसा कि पहले उल्लेख किया गया है, यदि किसी पिंड का द्रव्यमान m और वेग **v** है तो इसकी गतिज ऊर्जा,

$$\left\{K = \frac{1}{2}m\mathbf{v}.\mathbf{v} = \frac{1}{2}mv^2\right\} \qquad (6.5)$$

गतिज ऊर्जा एक अदिश राशि है ।

किसी पिंड की गतिज ऊर्जा, उस पिंड द्वारा किए गए कार्य की माप होती है जो वह अपनी गति के कारण कर सकता है। यह अनुभाग 6.2 में अभिव्यक्त कार्य-ऊर्जा प्रमेय से स्पष्ट है। हालांकि इस धारणा का अंतर्ज्ञान काफी समय से है । तीव्र गति से बहने वाली जल की धारा की गतिज ऊर्जा का उपयोग अनाज पीसने के लिए किया जाता है । मल्लाही जहाज पवन की गतिज ऊर्जा का प्रयोग करते हैं । इंजन में पिस्टन की गतिज ऊर्जा कार को आगे चलाती है । सारणी 6.2 में विभिन्न पिंडों की गतिज ऊर्जाएं सूचीबद्ध हैं ।

सारणी 6.2 विशिष्ट गतिज ऊर्जाएं (K)

पिंड	द्रव्यमान (kg)	चाल (m s^{-1})	K (J)
कार	2000	25	6.3×10^5
धावक (ऐथलीट)	70	10	3.5×10^3
गोली	5×10^{-2}	200	10^3
10 m की ऊंचाई से गिरता पत्थर	1	14	10^2
अंतिम वेग से गिरती वर्षा की बूंद	3.5×10^{-5}	9	1.4×10^{-3}
वायु का अणु	$\simeq 10^{-26}$	500	$\simeq 10^{-21}$

▶ **उदाहरण 6.3** किसी प्राक्षेपिक प्रदर्शन में एक पुलिस अधिकारी 50 g द्रव्यमान की गोली को नरम परतदार लकड़ी (प्लाइवुड) पर 200 m s^{-1} की चाल से फायर करता है । नरम लकड़ी को भेदने के पश्चात् गोली की गतिज ऊर्जा प्रारंभिक ऊर्जा की 10% रह जाती है । लकड़ी से निकलते समय गोली की चाल क्या होगी ?

हल गोली की प्रारंभिक गतिज ऊर्जा

$$= \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} \times 0.50 \times (200)^2 = 1000 \text{ J}$$

गोली की अंतिम गतिज ऊर्जा = 0.1 × 1000 = 100 J । यदि गोली की नरम लकड़ी को भेदने के पश्चात् चाल v_f है तो,

$$\frac{1}{2} m v_f^2 = 100 \text{ J}$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2 \times 100 \text{ J}}{m}}$$

$$= \sqrt{\frac{200 \text{ J}}{0.05 \text{ kg}}} = 63.2 \text{ m s}^{-1}$$

नरम लकड़ी को भेदने के पश्चात् गोली की चाल लगभग 68% कम हो गई है (90% नहीं) । ◀

6.5 परिवर्ती बल द्वारा किया गया कार्य

अचर बल दुष्प्राप्य है । अधिकतर परिवर्ती बल के उदाहरण ही देखने को मिलते हैं । चित्र 6.2 एकविमीय परिवर्ती बल का आलेख है ।

यदि विस्थापन Δx सूक्ष्म है तब हम बल $F(x)$ को भी लगभग नियत ले सकते हैं और तब किया गया कार्य

$$\Delta W = F(x) \Delta x$$

इसे चित्र 6.2(a) में समझाया गया है । चित्र 6.2 (a) में क्रमिक आयताकार क्षेत्रफलों का योग करने पर हमें कुल किया गया कार्य प्राप्त होता है जिसे इस प्रकार लिखा जाता है :

$$W \cong \sum_{x_i}^{x_f} F(x) \Delta x \qquad (6.6)$$

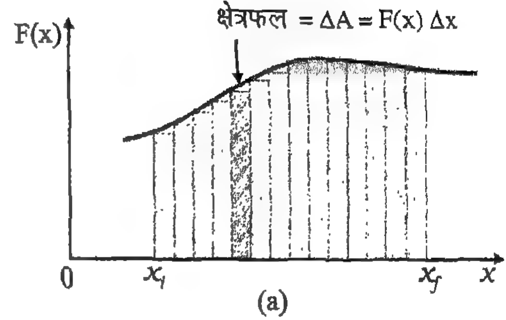
जहां संकेत 'Σ' का अर्थ है संकलन-फल (योगफल), जबकि 'x_i' वस्तु की आरंभिक स्थिति और 'x_f' वस्तु की अंतिम स्थिति को निरूपित करता है ।

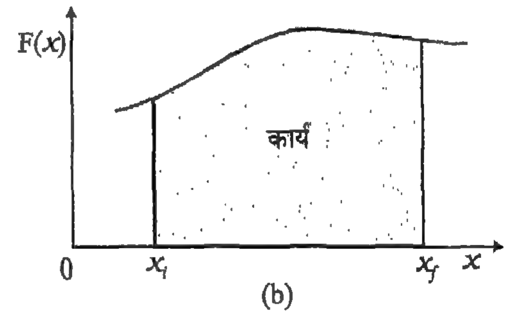
यदि विस्थापनों को अति सूक्ष्म मान लिया जाए तब योगफल में पदों की संख्या असीमित रूप से बढ़ जाती है लेकिन योगफल एक निश्चित मान के समीप पहुंच जाता है जो चित्र 6.2(b) में वक्र के नीचे के क्षेत्रफल के समान होता है । अतः किया गया कार्य

$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_i}^{x_f} F(x) \Delta x$$

$$= \int_{x_i}^{x_f} F(x) \mathrm{d}x \qquad (6.7)$$

जहां 'lim' का अर्थ है 'योगफल की सीमा' जबकि Δx नगण्य रूप से सूक्ष्म मानों की ओर अग्रसर है । इस प्रकार परिवर्ती बल के लिए किए गए कार्य को बल का विस्थापन पर सीमांकित समाकलन, के रूप में व्यक्त कर सकते हैं (परिशिष्ट A भी देखें)

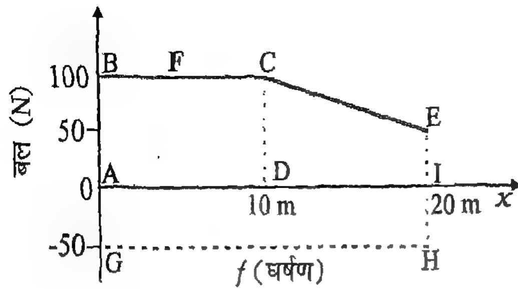




चित्र 6.2 *(a) परिवर्ती बल $F(x)$ द्वारा सूक्ष्म विस्थापन Δx में किया गया कार्य $\Delta W = F(x)\Delta x$ छायांकित आयत से निरूपित है। (b) $\Delta x \to 0$ के लिए सभी आयतों के क्षेत्रफलों को जोड़ने पर, वक्र द्वारा आच्छादित क्षेत्रफल, बल $F(x)$ द्वारा किए गए कार्य के ठीक बराबर है ।*

▶ **उदाहरण 6.4** कोई स्त्री रेलवे प्लेटफार्म पर खुरदरी सतह वाले संदूक को खिसकाती है । वह 10 m की दूरी तक 100 N का बल आरोपित करती है । उसके पश्चात्, उत्तरोत्तर वह थक जाती है और उसके द्वारा आरोपित बल रेखीय रूप से घटकर 50 N हो जाता है । संदूक को कुल 20 m की दूरी तक खिसकाया जाता है । स्त्री द्वारा संदूक पर आरोपित बल और घर्षण बल जो कि 50 N है, को आलेखित कीजिए । दोनों बलों द्वारा 20 m तक किए गए कार्य का परिकलन कीजिए ।

हल चित्र 6.3 में आरोपित बल का आलेख प्रदर्शित किया गया है।



चित्र 6.3 किसी स्त्री द्वारा आरोपित बल F और विरोधी घर्षण बल f का आलेख ।

$x = 20$ m पर $F = 50$ N($\neq 0$) है । हमें घर्षण बल f दिया गया है जिसका परिमाण है

$|f| = 50$ N

यह गति का विरोध करता है और आरोपित बल F के विपरीत दिशा में कार्य करता है । इसलिए, इसे बल-अक्ष की ऋणात्मक दिशा की ओर प्रदर्शित किया गया है ।

स्त्री द्वारा किया गया कार्य $W_F \rightarrow$(आयत ABCD + समलंब CEID) का क्षेत्रफल

$$= 100 \times 10 + \frac{1}{2}(100 + 50) \times 10$$

$$= 1000 + 750$$

$$= 1750 \text{ J}$$

घर्षण बल द्वारा किया गया कार्य $W_F \rightarrow$आयत AGHI का क्षेत्रफल

$$W_f = (-50) \times 20$$

$$= -1000 \text{ J}$$

यहां क्षेत्रफल का बल-अक्ष के ऋणात्मक दिशा की ओर होने से, क्षेत्रफल का चिह्न ऋणात्मक है । ◄

6.6 परिवर्ती बल के लिए कार्य-ऊर्जा प्रमेय

हम कार्य-ऊर्जा प्रमेय को सिद्ध करने के लिए कार्य और गतिज ऊर्जा की धारणाओं से भलीभांति परिचित हैं । यहां हम कार्य-ऊर्जा प्रमेय के एकविमीय पक्ष तक ही विचार को सीमित करेंगे । गतिज ऊर्जा परिवर्तन की दर है :

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

$$= m\frac{dv}{dt}v$$

$$= Fv \text{ (न्यूटन के दूसरे नियमानुसार } = m\frac{dv}{dt} = F)$$

$$= F\frac{dx}{dt}$$

अत: $dK = F dx$

प्रारंभिक स्थिति x_i से अंतिम स्थिति x_f तक समाकलन करने पर,

$$\int_{K_i}^{K_f} dK = \int_{x_i}^{x_f} F\, dx$$

जहां x_i और x_f के संगत K_i और K_f क्रमशः प्रारंभिक एवं अंतिम गतिज ऊर्जाएं हैं ।

या $$K_f - K_i = \int_{x_i}^{x_f} F\, dx \qquad (6.8)$$

समीकरण (6.7) से प्राप्त होता है

$$K_f - K_i = W \qquad (6.8a)$$

इस प्रकार परिवर्ती बल के लिए कार्य-ऊर्जा प्रमेय सिद्ध होती है ।

हालांकि कार्य-ऊर्जा प्रमेय अनेक प्रकार के प्रश्नों को हल करने में उपयोगी है परंतु यह न्यूटन के द्वितीय नियम की पूर्णरूपेण गतिकीय सूचना का समावेश नहीं करती है । सरल शब्दों में, यह न्यूटन के द्वितीय नियम का **अदिश रूप** है । इसमें कालिक पक्ष (समय-सूचना) स्पष्ट रूप से निहित नहीं है ।

► ***उदाहरण 6.5*** m (=1kg) द्रव्यमान का एक गुटका क्षैतिज सतह पर $v_i = 2$ m s^{-1} की चाल से चलते हुए $x = 0.10$ m से $x = 2.01$m के खुरदरे हिस्से में प्रवेश करता है । गुटके पर लगने वाला मंदक बल (F_r) इस क्षेत्र में x के व्युत्क्रमानुपाती है,

$$F_r = \frac{-k}{x} \quad 0.1 < x < 2.01 \text{ m}$$

$$= 0 \quad x < 0.1 \text{ m और } x > 2.01 \text{ m के लिए}$$

जहां $k = 0.5$ J । गुटका जैसे ही खुरदरे हिस्से को पार करता है, इसकी अंतिम गतिज ऊर्जा और चाल v_f की गणना कीजिए ।

हल समीकरण (6.8) से

$$K_f = K_i + \int_{0.1}^{2.01} \frac{(-k)}{x} dx$$

$$= \frac{1}{2}mv_i^2 - k\,ln(x)\Big|_{0.1}^{2.01}$$

$$= \frac{1}{2}mv_i^2 - k\,ln\left(\frac{2.01}{0.1}\right)$$

$$= 2 - 0.5\, ln\,(20.1)$$

$$= 2 - 1.5 = 0.5 \text{ J}$$

$$v_f = \sqrt{\frac{K_f}{m}} = 1\text{ms}^{-1}$$

ध्यान दीजिए कि ln आधार e पर किसी संख्या का प्राकृतिक लघुगणक है, न कि आधार 10 पर किसी संख्या का [$ln\, X = \log_e X = 2.303 \log_{10} X$] ◀

6.7 स्थितिज ऊर्जा की अभिधारणा

यहां 'स्थितिज' शब्द किसी कार्य को करने की संभावना या क्षमता को व्यक्त करता है। स्थितिज ऊर्जा की धारणा 'संग्रहित' ऊर्जा से संबंधित है। किसी खिंचे हुए तीर-कमान के तार (डोरी) की ऊर्जा स्थितिज ऊर्जा होती है। जब इसे ढीला छोड़ा जाता है तो तीर तीव्र चाल से दूर चला जाता है। पृथ्वी के भूपृष्ठ पर भ्रंश रेखाएं संपीडित कमानियों के सदृश होती हैं। उनकी स्थितिज ऊर्जा बहुत अधिक होती है। जब ये भ्रंश रेखाएं फिर से समायोजित हो जाती हैं तो भूकंप आता है। किसी भी पिंड की स्थितिज ऊर्जा (संचित ऊर्जा) उसकी स्थिति या अभिविन्यास के कारण होती है। पिंड को मुक्त रूप से छोड़ने पर इसमें संचित ऊर्जा, गतिज ऊर्जा के रूप में निर्मुक्त होती है। आइए, अब हम स्थितिज ऊर्जा की धारणा को एक निश्चित रूप देते हैं।

पृथ्वी की सतह के समीप m द्रव्यमान की एक गेंद पर आरोपित गुरुत्वाकर्षण बल mg को अचर माना जा सकता है। यहां समीपता से तात्पर्य यह है कि गेंद की पृथ्वी की सतह से ऊंचाई h, पृथ्वी की त्रिज्या R_E की तुलना में अति सूक्ष्म है ($h << R_E$), अतः हम पृथ्वी के पृष्ठ पर g के मान में परिवर्तन की उपेक्षा कर सकते हैं।* माना कि गेंद को बिना कोई गति प्रदान किए h ऊंचाई तक ऊपर उठाया जाता है। अतः बाह्य कारक द्वारा गुरुत्वाकर्षण बल के विरुद्ध किया गया कार्य mgh होगा। यह कार्य, स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित हो जाता है। किसी पिण्ड की h ऊंचाई पर गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा उसी पिण्ड को उसी ऊंचाई तक उठाने में गुरुत्वाकर्षण बल द्वारा किए गए कार्य के ऋणात्मक मान के बराबर होता है।

$$V(h) = m g h$$

यदि h को परिवर्ती लिया जाता है तो यह सरलता से देखा जा सकता है कि गुरुत्वाकर्षण बल F, h के सापेक्ष $V(h)$ के ऋणात्मक अवकलज के समान है

$$F = -\frac{d}{dh}V(h) = -mg$$

यहां ऋणात्मक चिह्न प्रदर्शित करता है कि गुरुत्वाकर्षण बल नीचे की ओर है। जब गेंद को छोड़ा जाता है तो यह बढ़ती हुई चाल से नीचे आती है। पृथ्वी की सतह से संघट्ट से पूर्व इसकी चाल शुद्धगतिकी संबंध द्वारा निम्न प्रकार दी जाती है

$$v^2 = 2gh$$

इसी समीकरण को निम्न प्रकार से भी लिखा जा सकता है :

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

जो यह प्रदर्शित करता है कि जब पिण्ड को मुक्त रूप से छोड़ा जाता है तो पिंड की h ऊंचाई पर गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा पृथ्वी पर पहुंचने तक स्वतः ही गतिज ऊर्जा में परिवर्तित हो जाती है।

प्राकृतिक नियमानुसार, स्थितिज ऊर्जा की धारणा केवल उन्हीं बलों की श्रेणी में लागू होती है जहां बल के विरुद्ध किया गया कार्य, ऊर्जा के रूप में संचित हो जाता है और जो बाह्य कारक के हट जाने पर स्वतः गतिज ऊर्जा के रूप में दिखाई पड़ती है। गणितानुसार स्थितिज ऊर्जा $V(x)$ को (सरलता के लिए एक-विमा में) परिभाषित किया जाता है यदि $F(x)$ बल को निम्न रूप में लिखा जाता है :

$$F(x) = -\frac{dV}{dx}$$

यह निरूपित करता है कि

$$\int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx = -\int_{V_i}^{V_f} dV = V_i - V_f$$

किसी संरक्षी बल द्वारा किया गया कार्य पिण्ड की केवल आरंभिक तथा अंतिम स्थिति पर निर्भर करता है। पिछले अध्याय में हमने आनत समतल से संबंधित उदाहरणों का अध्ययन किया। यदि m द्रव्यमान का कोई पिण्ड h ऊंचाई के चिकने (घर्षणरहित) आनत तल के शीर्ष से विरामावस्था से छोड़ा जाता है तो आनत समतल के अधस्तल (तली) पर इसकी चाल, आनति (झुकाव) कोण का ध्यान रखे बिना $\sqrt{2gh}$ होती है। इस प्रकार यहां पर पिण्ड mgh गतिज ऊर्जा प्राप्त कर लेता है। यदि किया गया कार्य या गतिज ऊर्जा दूसरे कारकों, जैसे पिण्ड के वेग या उसके द्वारा चले गए विशेष पथ की लंबाई पर निर्भर करता है तब यह बल असंरक्षी होता है।

कार्य या गतिज ऊर्जा के सदृश स्थितिज ऊर्जा की विमा $[ML^2T^{-2}]$ और SI मात्रक जूल (J) है। याद रखिए कि संरक्षी बल के लिए, स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन ΔV बल द्वारा किए गए ऋणात्मक कार्य के बराबर होता है।

$$\Delta V = -F(x)\,\Delta x \qquad (6.9)$$

इस अनुभाग में गिरती हुई गेंद के उदाहरण में हमने देखा कि किस प्रकार गेंद की स्थितिज ऊर्जा उसकी गतिज ऊर्जा में परिवर्तित

*गुरुत्वीय त्वरण g के मान में ऊंचाई के साथ परिवर्तन पर विचार गुरुत्वाकर्षण (अध्याय 8) में करेंगे।

हो गई थी । यह यांत्रिकी में संरक्षण के महत्त्वपूर्ण सिद्धांत की ओर संकेत करता है जिसे हम अब परखेंगे ।

6.8 यांत्रिक ऊर्जा का संरक्षण

सरलता के लिए, हम इस महत्त्वपूर्ण सिद्धांत का एकविमीय गति के लिए निदर्शन कर रहे हैं । मान लीजिए कि किसी पिण्ड का संरक्षी बल F के कारण विस्थापन Δx होता है । कार्य-ऊर्जा प्रमेय से, किसी बल F के लिए

$$\Delta K = F(x)\,\Delta x$$

संरक्षी बल के लिए स्थितिज ऊर्जा फलन $V(x)$ को निम्न रूप से परिभाषित किया जा सकता है :

$$-\Delta V = F(x)\Delta x$$

उपरोक्त समीकरण निरूपित करती है कि

$$\Delta K + \Delta V = 0$$

$$\Delta(K + V) = 0 \qquad (6.10)$$

इसका अर्थ है कि किसी पिण्ड की गतिज और स्थितिज ऊर्जाओं का योगफल, $K + V$ अचर होता है । इससे तात्पर्य है कि संपूर्ण पथ x_i से x_f के लिए

$$K_i + V(x_i) = K_f + V(x_f) \qquad (6.11)$$

यहां राशि $K + V(x)$, निकाय की कुल यांत्रिक ऊर्जा कहलाती है । पृथक रूप से, गतिज ऊर्जा K और स्थितिज ऊर्जा $V(x)$ एक स्थिति से दूसरी स्थिति तक परिवर्तित हो सकती है परंतु इनका योगफल अचर रहता है । उपरोक्त विवेचन से शब्द 'संरक्षी बल' की उपयुक्तता स्पष्ट होती है ।

आइए, अब हम संक्षेप में संरक्षी बल की विभिन्न परिभाषाओं को दोहराते हैं ।

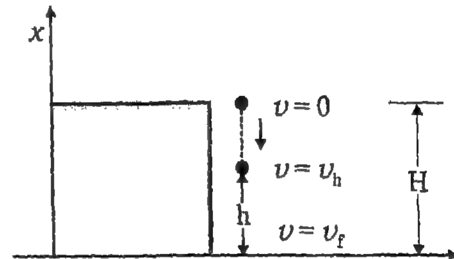
- कोई बल $F(x)$ संरक्षी है यदि इसे समीकरण (6.9) के प्रयोग द्वारा अदिश राशि $V(x)$ से प्राप्त कर सकते हैं । त्रिविमीय व्यापकीकरण के लिए सदिश अवकलज विधि का प्रयोग करना पड़ता है जो इस पुस्तक के विवेचना क्षेत्र से बाहर है ।*
- संरक्षी बल द्वारा किया गया कार्य केवल सिरे के बिंदुओं पर निर्भर करता है जो निम्न संबंध से स्पष्ट है :

  $W = K_f - K_i = V(x_i) - V(x_f)$
- तीसरी परिभाषा के अनुसार, इस बल द्वारा बंद पथ में किया गया कार्य शून्य होता है ।

यह एक बार फिर समीकरण (6.11) से स्पष्ट है, क्योंकि $x_i = x_f$ है ।

अतः यांत्रिक ऊर्जा-संरक्षण नियम के अनुसार ***किसी भी निकाय की कुल यान्त्रिक ऊर्जा अचर रहती है यदि उस पर कार्य करने वाले बल संरक्षी हैं ।***

उपरोक्त विवेचना को अधिक मूर्त बनाने के लिए, एक बार फिर गुरुत्वाकर्षण बल के उदाहरण पर विचार करते हैं और स्प्रिंग बल के उदाहरण पर अगले अनुभाग में विचार करेंगे । चित्र 6.4 H ऊंचाई की किसी चट्टान से गिराई, m द्रव्यमान की गेंद का चित्रण करता है ।



चित्र 6.4 H ऊंचाई की किसी चट्टान से गिराई गई, m द्रव्यमान की गेंद की स्थितिज ऊर्जा का गतिज ऊर्जा में रूपांतरण ।

गेंद की निदर्शित ऊंचाई, शून्य (भूमितल), h और H के संगत कुल यांत्रिक ऊर्जाएं क्रमशः E_o, E_h और E_H हैं

$$E_H = m\,g\,H \qquad (6.11a)$$

$$E_h = mgh + \frac{1}{2}mv_h^2 \qquad (6.11b)$$

$$E_o = mgh + \frac{1}{2}mv_f^2 \qquad (6.11c)$$

अचर बल, त्रिविम-निर्भर बल $F(x)$ का एक विशेष उदाहरण है । अतः यांत्रिक ऊर्जा संरक्षित है । इस प्रकार

$$E_H = E_0$$

अथवा, $mgH = \frac{1}{2}mv_f^2$

$$v_f = \sqrt{2gH}$$

उपरोक्त परिणाम अनुभाग 6.7 में मुक्त रूप से गिरते हुए पिण्ड के वेग के लिए प्राप्त किया गया था ।

इसके अतिरिक्त

$$E_H = E_h$$

जो इंगित करता है कि

$$v_h^2 = 2\,g\,(H - h) \qquad (6.11d)$$

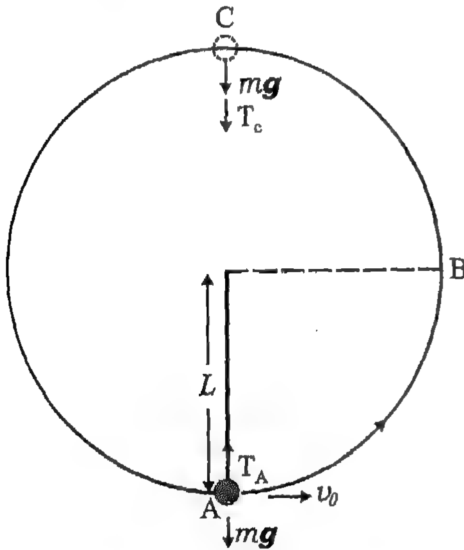
उपरोक्त परिणाम, शुद्धगतिकी का एक सुविदित परिणाम है ।

---

* द्विविमीय अथवा त्रिविमीय विवेचना में संरक्षी बल की धारणा अधिक प्रतिबंधित और सार्थक है क्योंकि शुद्ध रूप से त्रिविम-निर्भर सभी बल द्विविमीय और त्रिविमीय संरक्षी नहीं हैं । एकविमीय कोई बल F जो x पर निर्भर है, संरक्षी है । फिर भी एक ही विमा में घर्षण बल संरक्षी नहीं है क्योंकि यह x के अतिरिक्त वेग v के चिह्न पर भी निर्भर करता है ।

H ऊंचाई पर, पिण्ड की ऊर्जा केवल स्थितिज ऊर्जा है । यह h ऊंचाई पर आंशिक रूप से गतिज ऊर्जा में रूपांतरित हो जाती है तथा भूमि तल पर पूर्णरूपेण गतिज ऊर्जा में रूपांतरित हो जाती है । इस प्रकार उपरोक्त उदाहरण, यांत्रिक ऊर्जा के संरक्षण के सिद्धांत को स्पष्ट करता है ।

उदाहरण 6.6 कोई m द्रव्यमान का गोलक L लंबाई की हल्की डोरी से लटका हुआ है । इसके निम्नतम बिंदु A पर क्षैतिज वेग v_0 इस प्रकार लगाया जाता है कि यह ऊर्ध्वाधर तल में अर्धवृत्ताकार प्रक्षेप्य पथ को इस प्रकार तय करता है कि डोरी केवल उच्चतम बिंदु C पर ढीली होती है जैसा कि चित्र 6.5 में दिखाया गया है । निम्न राशियों के लिए व्यंजक प्राप्त कीजिए : (*a*) v_0, (*b*) बिंदुओं B तथा C पर गोलक की चाल, तथा (*c*) बिंदु B तथा C पर गतिज ऊर्जाओं का अनुपात $\frac{K_B}{K_C}$ गोलक के बिंदु C पर पहुंचने के बाद पथ की प्रकृति पर टिप्पणी कीजिए ।



चित्र 6.5

हल (*a*) यहां गोलक पर लगने वाले दो बाह्य बल हैं–गुरुत्व बल और डोरी में तनाव (T) । दूसरा (पिछला) बल कोई कार्य नहीं करता है क्योंकि गोलक का विस्थापन हमेशा डोरी के लंबवत् है । अत: गोलक की स्थितिज ऊर्जा केवल गुरुत्वाकर्षण बल से संबंधित है । निकाय की संपूर्ण यांत्रिक ऊर्जा E अचर है। हम निकाय की स्थितिज ऊर्जा निम्नतम बिंदु A पर शून्य ले लेते हैं । अत: बिंदु A पर

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 \qquad (6.12)$$

$$T_A - mg = \frac{m v_0^2}{L}$$ [न्यूटन के गति के द्वितीय नियमानुसार]

यहां T_A, बिंदु A पर डोरी का तनाव है । उच्चतम बिंदु C पर डोरी ढीली हो जाती है; अत: यहां बिंदु C पर डोरी का तनाव $T_C = 0$ । अत: बिंदु C पर हमें प्राप्त होता है

$$E = \frac{1}{2} m v_c^2 + 2 m g L \qquad (6.13)$$

$$m g = \frac{m v_c^2}{L} \text{ [न्यूटन के द्वितीय नियमानुसार]} \qquad (6.14)$$

जहां v_c बिंदु C पर गोलक की चाल है । समीकरण (6.13) व (6.14) से प्राप्त होता है

$$E = \frac{5}{2} mgL$$

इसे बिंदु A पर ऊर्जा से समीकृत करने पर

$$\frac{5}{2} m g L = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$v_0 = \sqrt{5gL}$$

(b) समीकरण (6.14) से यह स्पष्ट है कि

$$v_c = \sqrt{gL}$$

अत: बिंदु B पर ऊर्जा है

$$E = \frac{1}{2} m v_B^2 + mgL$$

इसे बिंदु A पर ऊर्जा के व्यंजक के बराबर रखने पर और (a) के परिणाम $v^2_0 = 5gL$ प्रयोग में लाने पर हमें प्राप्त होता है ।

$$E = \frac{1}{2} m v_B^2 + mgL = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$= \frac{5}{2} mgL$$

$$\therefore v_B \sqrt{3gL}$$

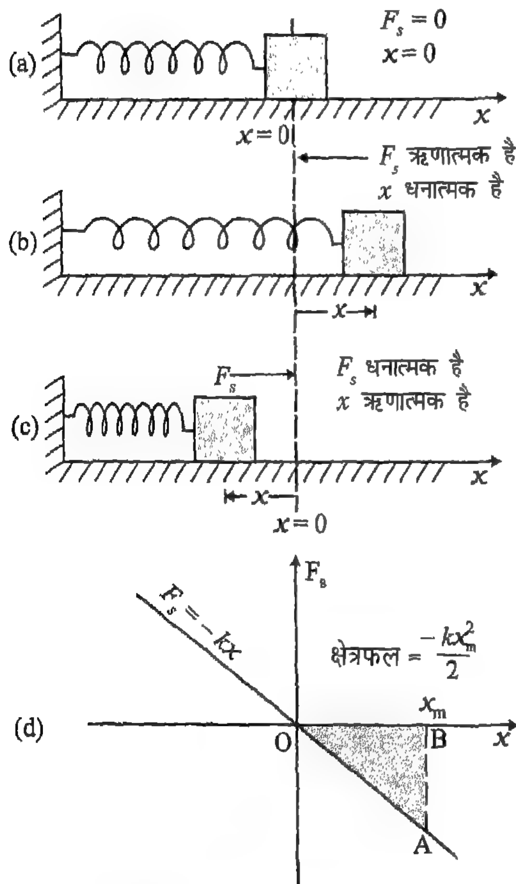
(c) बिंदु B व C पर गतिज ऊर्जाओं का अनुपात

$$\frac{K_B}{K_C} = \frac{\frac{1}{2} m v_B^2}{\frac{1}{2} m v_C^2} = \frac{3}{1}$$

बिंदु C पर डोरी ढीली हो जाती है और गोलक का वेग बाईं ओर को एवं क्षैतिज हो जाता है । यदि इस क्षण पर डोरी को काट दिया जाए तो गोलक एक क्षैतिज प्रक्षेप की भांति प्रक्षेप्य गति ठीक उसी प्रकार दर्शाएगा जैसा कि खड़ी चट्टान से क्षैतिज दिशा में किसी पत्थर को फेंकने पर होता है । अन्यथा गोलक लगातार अपने वृत्ताकार पथ पर गति करता रहेगा और परिक्रमण को पूर्ण करेगा । ◂

6.9 किसी स्प्रिंग की स्थितिज ऊर्जा

कोई स्प्रिंग-बल एक परिवर्ती-बल का उदाहरण है जो संरक्षी होता है।



चित्र 6.6 किसी स्प्रिंग के मुक्त सिरे से जुड़े हुए गुटके पर स्प्रिंग-बल का निदर्शन

(a) जब माध्य स्थिति से विस्थापन x शून्य है तो स्प्रिंग बल F_s भी शून्य है ।

(b) खिंचे हुए स्प्रिंग के लिए $x > 0$ और $F_s < 0$

(c) संपीडित स्प्रिंग के लिए $x < 0$ और $F_s > 0$

(d) F_s तथा x के बीच खींचा गया आलेख । छायांकित त्रिभुज का क्षेत्रफल स्प्रिंग-बल द्वारा किए गए कार्य को निरूपित करता है । F_s और x के विपरीत चिह्नों के कारण, किया गया कार्य ऋणात्मक है, $W_s = -\frac{1}{2}kx_m^2$

चित्र 6.6 स्प्रिंग से संलग्न किसी गुटके को दर्शाता है जो किसी चिकने क्षैतिज पृष्ठ पर विरामावस्था में है । स्प्रिंग का दूसरा सिरा किसी दृढ़ दीवार से जुड़ा है । स्प्रिंग हल्का है और द्रव्यमान-रहित माना जा सकता है । किसी आदर्श स्प्रिंग में, स्प्रिंग-बल F_s, गुटके का अपनी साम्यावस्था स्थिति से विस्थापन x के समानुपाती होता है । गुटके का साम्यावस्था से विस्थापन धनात्मक (चित्र 6.6b) या ऋणात्मक (चित्र 6.6c) हो सकता है । स्प्रिंग के लिए बल का नियम, हुक का नियम कहलाता है और गणितीय रूप में इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है :

$$F_s = -kx$$

जहां नियतांक k एक स्प्रिंग नियतांक है जिसका मात्रक $N\,m^{-1}$ है । यदि k का मान बहुत अधिक है, तब स्प्रिंग को दृढ़ कहा जाता है । यदि k का मान कम है, तब इसे नर्म (मृदु) कहा जाता है ।

मान लीजिए कि हम गुटके को बाहर की तरफ, जैसा कि चित्र 6.6(b) में दिखाया गया है, धीमी अचर चाल से खींचते हैं। इसे प्राप्त करने के लिए हमें कोई बल F, परिमाण में बल F_s के बराबर परंतु विपरीत दिशा में लगाना चाहिए । यदि स्प्रिंग का खिंचाव x_m है तो स्प्रिंग-बल द्वारा किया कार्य

$$W_s = \int_0^{x_m} F_s \mathrm{d}x = -\int_0^{x_m} kx\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{kx_m^2}{2} \qquad (6.15)$$

इस व्यंजक को हम चित्र 6.6(d) में दिखाए गए त्रिभुज से भी प्राप्त कर सकते हैं । ध्यान दीजिए कि बाह्य खिंचाव बल द्वारा किया गया कार्य

$$W = +\frac{1}{2}kx_m^2 \qquad (6.16)$$

यदि स्प्रिंग का विस्थापन x_c (<0) से संपीडित किया जाता है तब भी उपरोक्त व्यंजक सत्य है । यदि स्प्रिंग की गति **स्थैतिककल्प** है अर्थात् बहुत धीमी है तो स्प्रिंग-बल $W_s = -\frac{kx_c^2}{2}$ कार्य करता है जबकि बाह्य बल $W = \frac{kx_c^2}{2}$ कार्य करता है ।

यदि गुटके को इसके आरंभिक विस्थापन x_i से अंतिम विस्थापन x_f तक विस्थापित किया जाता है तो स्प्रिंग-बल द्वारा किया गया कार्य

$$W_s = -\int_{x_i}^{x_f} kx\,\mathrm{d}x$$

$$W_s = \frac{kx_i^2}{2} - \frac{kx_f^2}{2} \qquad (6.17)$$

अत: स्प्रिंग-बल द्वारा किया गया कार्य केवल सिरे के बिंदुओं पर निर्भर करता है । विशेष रूप से जब गुटके को स्थिति x_i से खीचा गया हो और वापस x_i स्थिति तक आने दिया गया हो तो

$$W_s = -\int_{x_i}^{x_f} kx\,dx = \frac{kx_i^2}{2} - \frac{kx_i^2}{2} \qquad (6.18)$$

$\therefore W_s = 0$

अत: स्प्रिंग बल द्वारा किसी चक्रीय प्रक्रम में किया गया कार्य शून्य होता है । हमने यहां स्पष्टतया निदर्शन कर दिया है कि (i) स्प्रिंग बल केवल स्थिति पर निर्भर करता है जैसा कि हुक द्वारा पहले कहा गया है $(F_s = -kx)$;
(ii) यह बल कार्य करता है जो किसी पिण्ड की आरंभिक एवं अंतिम स्थितियों पर निर्भर करता है; उदाहरणार्थ, समीकरण (6.17) । अत: स्प्रिंग बल एक **संरक्षी बल** है ।

जब गुटका साम्यावस्था में है अर्थात् माध्य स्थिति से उसका विस्थापन शून्य है तब स्प्रिंग की स्थितिज ऊर्जा $V(x)$ को हम शून्य मानते हैं । किसी खिंचाव (या संपीडन) x के लिए उपरोक्त विश्लेषण सुझाता है कि

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 \qquad (6.19)$$

इसे सुविधापूर्वक सत्यापित किया जा सकता है कि $-\frac{dV}{dx} = -k_x$ जो कि स्प्रिंग बल है । जब m द्रव्यमान के गुटके को चित्र 6.6 के अनुसार x_m तक खींचा जाता है और फिर विरामावस्था से छोड़ा जाता है, तब इसकी समूची यांत्रिक ऊर्जा स्वेच्छा से चुनी गई किसी भी स्थिति x पर निम्नलिखित रूप में दी जाएगी, जहां x का मान $-x_m$ से $+x_m$ के मध्य है :

$$\frac{1}{2}k\,x_m^2 = \frac{1}{2}k\,x^2 + \frac{1}{2}m\,v^2$$

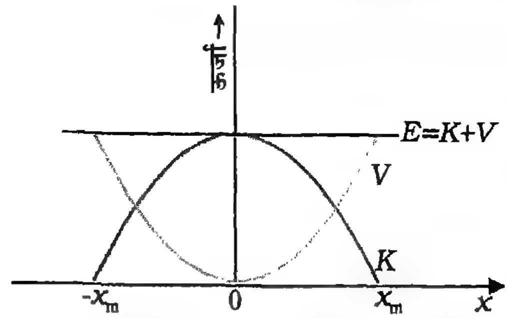
जहां हमने यांत्रिक ऊर्जा के संरक्षण नियम का प्रयोग किया है । इसके अनुसार गुटके की चाल v_m और गतिज ऊर्जा साम्यावस्था $x = 0$ पर अधिकतम होगी, अर्थात्

$$\frac{1}{2}m\,v_m^2 = \frac{1}{2}k\,x_m^2$$

या, $$v_m = \sqrt{\frac{k}{m}}\,x_m$$

ध्यान दीजिए कि k/m की विमा $[T^{-2}]$ है और यह समीकरण विमीय रूप से सही है । यहां निकाय की गतिज ऊर्जा, स्थितिज ऊर्जा में, और स्थितिज ऊर्जा, गतिज ऊर्जा में परिवर्तित हो जाती है, तथापि कुल यांत्रिक ऊर्जा नियत रहती है । चित्र 6.7 में इसका ग्राफीय निरूपण किया गया है ।

> **उदाहरण 6.7** कार दुर्घटना को दिखाने के लिए (अनुकार) मोटरकार निर्माता विभिन्न स्प्रिंग नियतांकों के स्प्रिंगों का फ्रेम चढ़ाकर चलती हुई कारों के संघट्ट का अध्ययन करते हैं । मान लीजिए किसी प्रतीकात्मक अनुरूपण में कोई 1000 kg द्रव्यमान की कार एक चिकनी सड़क पर 18 km/h की चाल से चलते हुए, क्षैतिज लगाए गए फ्रेम पर चढ़ाए गए स्प्रिंग से संघट्ट करती है जिसका स्प्रिंग नियतांक 6.25×10^3 N m^{-1} है । स्प्रिंग का अधिकतम संपीडन क्या होगा ?



चित्र 6.7 किसी स्प्रिंग से जुड़े हुए गुटके की स्थितिज ऊर्जा V और गतिज ऊर्जा K के परवलयिक आलेख जो हुक के नियम का पालन करते हैं । ये एक-दूसरे के पूरक हैं अर्थात् इनमें जब एक घटता है तो दूसरा बढ़ता है, परंतु कुल यांत्रिक ऊर्जा E = K + V हमेशा अचर रहती है ।

हल कार की गतिज ऊर्जा अधिकतम संपीडन पर संपूर्ण रूप से स्प्रिंग की स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तित हो जाती है । गतिमान कार की गतिज ऊर्जा :

$$K = \frac{1}{2}\,m\,v^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 10^3 \times 5 \times 5$$

$$K = 1.25 \times 10^4 \text{ J}$$

जहां कार की चाल 18 km h^{-1} को इसके SI मान 5 m s^{-1} में परिवर्तित कर दिया गया है । [**यहां यह ध्यान रखने योग्य है कि 36 km h^{-1} = 10 m s^{-1}**] । यांत्रिक ऊर्जा-संरक्षण नियम के अनुसार अधिकतम संपीडन x_m पर स्प्रिंग की स्थितिज ऊर्जा (V), गतिशील कार की गतिज ऊर्जा (K) के बराबर होती है ।

अत: $$V = \frac{1}{2}\,k\,x_m^2$$

$$= 1.25 \times 10^4 \text{ J}$$

हल करने पर हम प्राप्त करते हैं कि $x_m = 2.00$ m

ध्यान दें कि यहां इस स्थिति को हमने आदर्श रूप में प्रस्तुत किया है । यहां स्प्रिंग को द्रव्यमानरहित माना है और सड़क का घर्षण नगण्य लिया है । यह एक ऐसी स्थिति है जो पहियों को लुढ़काने के बजाय उन्हें फिसलने पर मजबूर कर देगी । ◄

हम संरक्षी बलों पर कुछ टिप्पणी करते हुए इस अनुभाग से निम्न निष्कर्ष निकालते है :

(i) उपरोक्त विवेचना में समय के संबंध में कोई सूचना नहीं है । इस उदाहरण में हम संपीडन का परिकलन कर सकते हैं लेकिन उस समय अंतराल का परिकलन नहीं कर सकते जिसमें यह संपीडन हुआ है । अत: कालिक सूचना प्राप्त

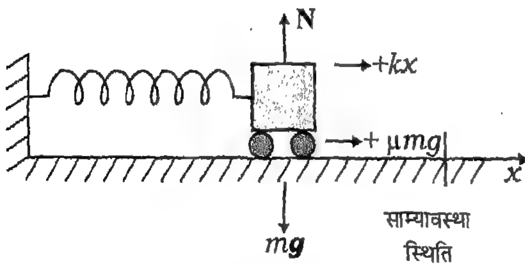
करने के लिए, इस निकाय के लिए न्यूटन के द्वितीय नियम के हल की आवश्यकता है ।

(ii) सभी बल संरक्षी नहीं हैं । उदाहरणार्थ, घर्षण एक असंरक्षी बल है । इस स्थिति में, ऊर्जा-संरक्षण नियम में किंचित परिवर्तन करना पड़ेगा । इसे उदाहरण 6.8 में स्पष्ट किया गया है ।

(iii) घर्षण बल की उपस्थिति में स्थितिज ऊर्जा का शून्य स्वेच्छा से लिया गया है जिसे सुविधानुसार निश्चित कर लिया जाता है । स्प्रिंग-बल के लिए, $x = 0$ पर हम $V = 0$ लेते हैं, अर्थात् बिना खिंचे स्प्रिंग की स्थितिज ऊर्जा शून्य होती है । नियत गुरुत्वाकर्षण बल mg के लिए हम पृथ्वी की सतह पर $V = 0$ लेते हैं । अध्याय 8 में हम देखेंगे कि गुरुत्वाकर्षण के सार्वत्रिक नियमानुसार बल के लिए, शून्य गुरुत्वाकर्षण स्रोत से अनन्त दूरी पर सर्वोत्तम रूप से परिभाषित होती है तथापि, किसी विवेचना में स्थितिज ऊर्जा के लिए एक बार शून्य की स्थिति निश्चित करने के पश्चात्, शुरू से अंत तक विवेचना में उसी नियम का पालन करना चाहिए ।

उदाहरण 6.8 उदाहरण 6.7 में घर्षण गुणांक μ का मान 0.5 लेकर कमानी के अधिकतम संपीडन का परिकलन कीजिए ।

हल स्प्रिंग बल और घर्षण बल, दोनों ही संपीडन का विरोध करने में संयुक्त रूप से कार्य करते हैं ।



चित्र 6.8 किसी कार पर आरोपित बल ।

अत: यहां हम यांत्रिक ऊर्जा-संरक्षण के सिद्धांत के बजाय कार्य-ऊर्जा प्रमेय का प्रयोग करते हैं ।

गतिज ऊर्जा में परिवर्तन है :

$$\Delta K = K_f - K_i$$

$$= 0 - \frac{1}{2} m v^2$$

कुल बल द्वारा किया गया कार्य :

$$W = -\frac{1}{2} k x_m^2 - \mu m g x_m$$

ΔK और W को समीकृत करने पर हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} k x_m^2 + \mu m g x_m$$

यहां $\mu mg = 0.5 \times 10^3 \times 10 = 5 \times 10^3$ N ($g = 10\,m\,s^{-2}$ लेने पर) । उपरोक्त समीकरण को व्यवस्थित करने पर हमें अज्ञात x_m के लिए निम्न द्विघातीय समीकरण प्राप्त होती है :

$$k x_m^2 + 2 \mu m g x_m - m v^2 = 0$$

अथवा, $$x_m = \frac{-\mu mg + [\mu^2 m^2 g^2 + m k v^2]^{1/2}}{k}$$

जहां हमने x_m धनात्मक होने के कारण इसका धनात्मक वर्गमूल ले लिया है । आंकिक मानों को समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं

$$x_m = 1.35 \text{ m}$$

जो आशानुसार उदाहरण 6.7 में प्राप्त परिणाम से कम है ।

यदि मान लें कि पिंड पर लगने वाले दोनों बलों में एक संरक्षी बल F_c और दूसरा असंरक्षी बल F_{nc} है तो यांत्रिक ऊर्जा-संरक्षण के सूत्र में किंचित् परिवर्तन करना पड़ेगा । कार्य-ऊर्जा प्रमेय से :

$$(F_c + F_{nc})\, \Delta x = \Delta K$$

परंतु $$F_c\, \Delta x = -\Delta V$$

अत: $$\Delta(K + V) = F_{nc}\, \Delta x$$

$$\Delta E = F_{nc}\, \Delta x$$

जहां E कुल यांत्रिक ऊर्जा है । समस्त पथ पर यह निम्न रूप ले लेती है

$$E_f - E_i = W_{nc}$$

जहा W_{nc} असंरक्षी बल द्वारा किसी पथ पर किया गया कुल कार्य है । ध्यान दीजिए कि संरक्षी बल की भांति W_{nc} भी i से f तक एक विशेष पथ पर निर्भर करता है । ◄

6.10 ऊर्जा के विभिन्न रूप : ऊर्जा-संरक्षण का नियम

पिछले अनुभाग में हमने यांत्रिक ऊर्जा की विवेचना की और यह पाया कि इसे दो भिन्न श्रेणियों में विभाजित किया जा सकता है । पहली गति पर आधारित है अर्थात् गतिज ऊर्जा, और दूसरी संरूपण अथवा स्थिति पर आधारित अर्थात् स्थितिज ऊर्जा । ऊर्जा बहुत से रूपों में प्राप्त होती है जिनको एक रूप से दूसरे रूप में कई विधियों द्वारा रूपान्तरित किया जाता है जो प्राय: हमें भी अस्पष्ट हो सकती हैं ।

6.10.1 ऊष्मा

हम पहले ही देख चुके हैं कि घर्षण बल को संरक्षी बलों की श्रेणी से हटा दिया गया है । लेकिन कार्य, घर्षण बल से संबंधित है । कोई m द्रव्यमान का गुटका रुक्ष क्षैतिज पृष्ठ पर v_0 चाल से फिसलता हुआ x_0 दूरी चलकर रुक जाता है । x_0 पर गतिज घर्षण बल f द्वारा किया गया कार्य $-fx_0$ है । कार्य-ऊर्जा प्रमेय से $\frac{1}{2}mv_0^2 = f\,x_0$ प्राप्त होता है । यदि हम अपने विषय-क्षेत्र को यांत्रिकी तक ही सीमित रखें तो हम कहेंगे कि गुटके की गतिज ऊर्जा, घर्षण बल के कारण क्षयित हो गई है । मेज और गुटके का परीक्षण करने पर हमें पता चलेगा कि इनका ताप मामूली-सा बढ़ गया है । घर्षण बल द्वारा किया गया कार्य क्षयित नहीं हुआ है अपितु ऊष्मीय ऊर्जा के रूप में मेज और गुटके को हस्तान्तरित हो गया है जो गुटके और मेज की आंतरिक ऊर्जा को बढ़ा देता है । शीतकाल में हम अपनी हथेलियों को आपस में जोर से रगड़कर ऊष्मा उत्पन्न करते हैं । हम बाद में देखेंगे कि आंतरिक ऊर्जा प्रायः अणुओं की निरंतर यादृच्छिक गति से संबंधित है । ऊष्मीय ऊर्जा के स्थानान्तरण की परिमाणात्मक धारणा इस लक्षण से प्राप्त की जा सकती है कि 1 kg जल 10° C ठंडा होने पर 42000 J ऊर्जा मुक्त करता है।

6.10.2 रासायनिक ऊर्जा

मानव जाति ने महानतम् तकनीकी सफलता प्राप्त की जब यह पता लगा कि अग्नि को कैसे प्रज्वलित और नियंत्रित किया जाता है । हमने दो फ्लिन्ट पत्थरों को आपस में रगड़ना (यांत्रिक ऊर्जा), उन्हें गर्म होने देना और पत्तियों के ढेर को सुलगाना (रासायनिक ऊर्जा) सीखा जिसके कारण हम सतत् ऊष्मा प्राप्त कर पाए । माचिस की एक तीली जब विशेष रूप से तैयार की गई रासायनिक सतह पर रगड़ी जाती है तो एक चमकीली ज्वाला के रूप में प्रज्वलित होती है । जब सुलगाई गई माचिस की तीली पटाखे में लगाई जाती है तो उसके परिणामस्वरूप ध्वनि एवं प्रकाश ऊर्जाओं का भव्य प्रदर्शन होता है ।

रासायनिक ऊर्जा, रासायनिक अभिक्रिया में भाग लेने वाले अणुओं की भिन्न-भिन्न बंधन ऊर्जाओं के कारण उत्पन्न होती है । एक स्थिर रासायनिक यौगिक की ऊर्जा इसके पृथक-पृथक अंशों की अपेक्षा कम होती है । रासायनिक अभिक्रिया मुख्यतः परमाणुओं की पुनः व्यवस्था है । यदि अभिकारकों की कुल ऊर्जा, उत्पादों की ऊर्जा से अधिक है तो ऊष्मा मुक्त होती है अर्थात् अभिक्रिया **ऊष्माक्षेपी** होती है । यदि इसके विपरीत सत्य है तो ऊष्मा अवशोषित होगी अर्थात् अभिक्रिया **ऊष्माशोषी** होगी । कोयले में कार्बन होता है और इसके 1 kg के दहन से 3×10^7 J ऊर्जा मुक्त होती है ।

रासायनिक ऊर्जा उन बलों से संबंधित होती है जो पदार्थों को स्थायित्व प्रदान करते है । ये बल परमाणुओं को अणुओं में और अणुओं को पॉलीमेरिक शृंखला इत्यादि में बाँध देते हैं । कोयला, कुकिंग गैस, लकड़ी और पैट्रोलियम के दहन से उत्पन्न रासायनिक ऊर्जा हमारे दैनिक अस्तित्व के लिए अनिवार्य है ।

6.10.3 विद्युत्-ऊर्जा

विद्युत् धारा के प्रवाह के कारण विद्युत् बल्ब उद्दीप्त होते हैं, पंखे घूमते हैं और घंटियां बजती हैं । आवेशों के आकर्षण-प्रतिकर्षण संबंधी नियमों और विद्युत् धारा के विषय में हम बाद में सीखेंगे । ऊर्जा विद्युत धारा से भी संबद्ध है । एक भारतीय शहरी परिवार औसतन 500 J/s ऊर्जा का उपभोग करता है ।

6.10.4 द्रव्यमान-ऊर्जा तुल्यता

उन्नीसवीं शताब्दी के अंत तक भौतिकविदों का विश्वास था कि प्रत्येक भौतिक एवं रासायनिक प्रक्रम में, विलगित निकाय का द्रव्यमान संरक्षित रहता है । द्रव्य अपनी प्रावस्था परिवर्तित कर सकता है । उदाहरणार्थ, हिमानी बर्फ पिघलकर एक प्रवाही नदी के रूप में बह सकती है लेकिन द्रव्य न तो उत्पन्न किया जा सकता है और न ही नष्ट । तथापि अल्बर्ट आइंस्टाइन (1879-1955) ने प्रदर्शित किया कि द्रव्यमान और ऊर्जा एक-दूसरे के तुल्य होते हैं और निम्नलिखित समीकरण द्वारा संबंधित होते हैं :

$$E = m\,c^2 \tag{6.20}$$

जहां c, निर्वात में प्रकाश की चाल है और लगभग 3×10^8 m s^{-1} के बराबर है । अतः मात्र एक किलोग्राम द्रव्य के ऊर्जा में परिवर्तन से संबंधित एक आश्चर्यचकित कर देने वाली ऊर्जा की मात्रा है

$$E = 1 \times (3 \times 10^8)^2\, J = 9 \times 10^{16}\, J$$

यह एक बहुत बड़े पैमाने पर विद्युत् उत्पन्न करने वाले बिजली घर के वार्षिक उत्पादन के तुल्य है ।

6.10.5 नाभिकीय ऊर्जा

एक ओर जहां मानव जाति द्वारा निर्मित अत्यन्त विनाशकारी नाभिकीय आयुध, विखंडन एवं संलयन बम उपरोक्त तुल्यता [समीकरण (6.20)] संबंध की अभिव्यक्ति है, वहीं दूसरी ओर सूर्य द्वारा उत्पादित जीवन-पोषण करने वाली ऊर्जा की व्याख्या भी उपरोक्त समीकरण पर ही आधारित है । इसमें हाइड्रोजन (^1_1H) के चार हल्के नाभिकों के संलयन द्वारा एक हीलियम नाभिक बनता है जिसका द्रव्यमान हाइड्रोजन के चारों नाभिकों के कुल द्रव्यमानों से कम होता है । यह द्रव्यमान-अंतर Δm, जिसे द्रव्यमान क्षति कहते हैं, ऊर्जा ($\Delta m\,c^2$) का स्रोत है । विखंडन में एक भारी अस्थायी नाभिक, जैसे यूरेनियम ($^{235}_{92}U$), एक न्यूट्रॉन की बमबारी द्वारा हल्के नाभिकों में विभक्त हो जाता है । इस प्रक्रम में भी अंतिम द्रव्यमान, आरंभिक द्रव्यमान से कम होता है और यह द्रव्यमान-क्षति ऊर्जा में रूपांतरित हो जाती है । इस ऊर्जा का उपयोग नियंत्रित नाभिकीय विखंडन अभिक्रिया पर आधारित नाभिकीय शक्ति संयंत्रों द्वारा विद्युत् ऊर्जा उपलब्ध कराने में किया जाता है । वहीं दूसरी ओर, इसे अनियंत्रित नाभिकीय विखंडन अभिक्रिया पर आधारित विनाशकारी नाभिकीय आयुधों के निर्माण में भी प्रयोग किया जा सकता है । सही अर्थ में किसी

सारणी 6.3 विभिन्न परिघटनाओं से संबद्ध सन्निकट ऊर्जा

वर्णन	ऊर्जा (J)
बिग-बैंग से निर्मुक्त ऊर्जा	10^{68}
आकाशगंगा द्वारा अपने जीवनकाल में उत्सर्जित रेडियो ऊर्जा	10^{55}
आकाशगंगा की घूर्णन ऊर्जा	10^{52}
सुपरनोवा विस्फोटन में निर्मुक्त ऊर्जा	10^{44}
महासागर की हाइड्रोजन के संलयन में निर्मुक्त ऊर्जा	10^{34}
पृथ्वी की घूर्णन ऊर्जा	10^{29}
पृथ्वी पर आपतित वार्षिक सौर ऊर्जा	5×10^{24}
पृथ्वी के पृष्ठ के निकट वार्षिक पवन ऊर्जा क्षय	10^{22}
मानव द्वारा विश्व में प्रयोग की गई वार्षिक ऊर्जा	3×10^{20}
ज्वार-भाटा द्वारा वार्षिक ऊर्जा क्षय	10^{20}
15 मेगाटन संलयन बम द्वारा निर्मुक्त ऊर्जा	10^{17}
किसी बड़े विद्युत् उत्पादक संयन्त्र की निर्गत ऊर्जा	10^{16}
तड़ित झंझा की ऊर्जा	10^{15}
1000 kg कोयले के दहन से निर्मुक्त ऊर्जा	3×10^{10}
किसी बड़े जेट विमान की गतिज ऊर्जा	10^{9}
1 लिटर गैसोलिन के दहन से निर्मुक्त ऊर्जा	3×10^{7}
किसी वयस्क मानव की दैनिक खाद्य ग्रहण क्षमता	10^{7}
मानव-हृदय द्वारा प्रति स्पंदन किया गया कार्य	0.5
किसी पुस्तक के पृष्ठ को पलटने में किया गया कार्य	10^{-3}
पिस्सु का फुदकना (फ्ली हॉप)	10^{-7}
किसी न्यूरान (तंत्रि कोशिका) विसर्जन में आवश्यक ऊर्जा	10^{-10}
किसी नाभिक में प्रोटॉन की विशिष्ट ऊर्जा	10^{-13}
किसी परमाणु में इलेक्ट्रॉन की विशिष्ट ऊर्जा	10^{-18}
डी.एन.ए. के एक आबंध को तोड़ने के लिए आवश्यक ऊर्जा	10^{-20}

रासायनिक अभिक्रिया में मुक्त ऊर्जा ΔE को द्रव्यमान-क्षति $\Delta m = \Delta E/c^2$ से भी संबद्ध किया जा सकता है। तथापि, किसी रासायनिक अभिक्रिया में द्रव्यमान-क्षति, नाभिकीय अभिक्रिया में होने वाली द्रव्यमान-क्षति से काफी कम होती है। सारणी 6.3 में भिन्न-भिन्न घटनाओं और परिघटनाओं से संबद्ध कुल ऊर्जाओं को सूचीबद्ध किया गया है।

▶ ***उदाहरण 6.9*** सारणी 6.1 से 6.3 तक का परीक्षण कीजिए और बताइए (a) डी.एन.ए. के एक आबंध को तोड़ने के लिए आवश्यक ऊर्जा (इलेक्ट्रॉन-वोल्ट में); (b) वायु के एक अणु की गतिज ऊर्जा (10^{-21}J)(इलेक्ट्रॉन-वोल्ट में) (c) किसी वयस्क मानव का दैनिक आहार (किलो कैलोरी में)।

हल (a) डी.एन.ए. के एक आबंध को तोड़ने के लिए आवश्यक ऊर्जा है :

$$\frac{10^{-20}\,\text{J}}{1.6\times10^{-19}\,\text{J/eV}} \simeq 0.1\text{eV}$$

जहां प्रतीक '$\simeq$' से अर्थ है 'लगभग'।

ध्यान दीजिए 0.1eV = 100 meV (100 मिलि इलेक्ट्रॉन-वोल्ट)

(b) वायु के अणु की गतिज ऊर्जा है :

$$\frac{10^{-21}\,\text{J}}{1.6\times10^{-19}\,\text{J/eV}} \simeq 0.01\text{eV}$$

यह 10 meV के सदृश है।

(c) वयस्क मानव की औसत दैनिक भोजन की खपत है :

$$\frac{10^{7}\,\text{J}}{4186\,\text{J/kcal}} = 2389\ \text{kcal} \simeq 2400\ \text{kcal}$$

यहां हम समाचार-पत्रों और पत्रिकाओं की सामान्य भ्रांति की ओर ध्यान दिलाते हैं। ये भोजन की मात्रा का कैलोरी में उल्लेख करते हैं और हमें 2400 कैलोरी से कम खुराक लेने का सुझाव देते हैं। जो उन्हें कहना चाहिए वह किलो कैलोरी (kcal) है, न कि कैलोरी। 2400 कैलोरी प्रतिदिन उपभोग करने वाला व्यक्ति शीघ्र भूखों मर जाएगा! 1 भोजन कैलोरी सामान्यतः 1 किलो-कैलोरी ही है। ◀

6.10.6 ऊर्जा-संरक्षण का सिद्धांत

हमने यह देखा है कि किसी भी निकाय की कुल यांत्रिक ऊर्जा संरक्षित रहती है यदि इस पर कार्य करने वाले बल संरक्षी हैं। यदि कार्यरत कुछ बल असंरक्षी हैं तो यांत्रिक ऊर्जा का कुछ अंश दूसरे रूपों; जैसे-ऊष्मा, प्रकाश और ध्वनि ऊर्जाओं में

रूपान्तरित हो जाता है । तथापि ऊर्जा के सभी रूपों का ध्यान रखने पर हम पाते हैं कि विलगित निकाय की कुल ऊर्जा परिवर्तित नहीं होती । ऊर्जा एक रूप से दूसरे रूप में रूपांतरित हो सकती है परंतु किसी विलगित निकाय की कुल ऊर्जा नियत रहती है। ऊर्जा न तो उत्पन्न की जा सकती है और न ही नष्ट ।

चूंकि संपूर्ण विश्व को एक विलगित निकाय के रूप में देखा जा सकता है अतः विश्व की कुल ऊर्जा अचर है । यदि विश्व के एक हिस्से में ऊर्जा की क्षति होती है तो दूसरे हिस्से में समान मात्रा में ऊर्जा वृद्धि होनी चाहिए ।

ऊर्जा-संरक्षण सिद्धांत को सिद्ध नहीं किया जा सकता है । तथापि, इस सिद्धांत के उल्लंघन की कोई स्थिति सामने नहीं आई है । संरक्षण की अभिधारणा और विभिन्न रूपों में ऊर्जा का रूपांतरण भौतिकी, रसायन विज्ञान और जीवन विज्ञान आदि, विज्ञान की विभिन्न शाखाओं को आपस में संबद्ध कर देती है। यह वैज्ञानिक खोजों में एकीकरण और स्थायित्व के तत्व को प्रदान करता है। अभियांत्रिकी (इंजीनियरी) की दृष्टि से सभी इलेक्ट्रॉनिक, संप्रेषण और यांत्रिकी आधारित यंत्र, ऊर्जा-रूपांतरण के किसी न किसी रूप पर निर्भर करते हैं ।

6.11 शक्ति

बहुधा केवल यह जानना ही पर्याप्त नहीं है कि किसी पिंड पर कार्य किया गया अपितु यह जानना भी आवश्यक है कि यह कार्य किस दर से किया गया है । हम कहते हैं कि व्यक्ति शारीरिक रूप से स्वस्थ है यदि वह केवल किसी भवन के चार तल तक चढ़ ही नहीं जाता है अपितु वह इन पर तेजी से चढ़ जाता है। अतः **शक्ति** को उस समय-दर से परिभाषित करते हैं जिससे कार्य किया गया या ऊर्जा स्थानांतरित हुई । किसी बल की औसत शक्ति उस बल द्वारा किए गए कार्य W और उसमें लगे समय t के अनुपात से परिभाषित करते हैं । अतः

$$P_{av} = \frac{W}{t}$$

तात्क्षणिक शक्ति को औसत शक्ति के सीमान्त मान के रूप में परिभाषित करते हैं जबकि समय शून्य की ओर अग्रसर हो रहा होता है, अर्थात्

$$P = \frac{dW}{dt} \qquad (6.21)$$

जहां विस्थापन $d\mathbf{r}$ में बल $\mathbf{F}$ द्वारा किया गया कार्य $dW = \mathbf{F}.d\mathbf{r}$ होता है । अतः तात्क्षणिक शक्ति को निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं :

$$P = \mathbf{F}.\frac{d\mathbf{r}}{dt}$$
$$= \mathbf{F}.\mathbf{v} \qquad (6.22)$$

जहां $\mathbf{v}$ तात्क्षणिक वेग है जबकि बल $\mathbf{F}$ है ।

कार्य और ऊर्जा की भांति शक्ति भी एक अदिश राशि है । इसका SI मात्रक वाट (W) और विमा $[ML^2T^{-3}]$ है । 1W का मान $1 J s^{-1}$ के बराबर होता है । अठारहवीं शताब्दी में भाप इंजन के प्रवर्तकों में से एक प्रवर्तक जेम्स वॉट के नाम पर शक्ति का मात्रक वाट (W) रखा गया है ।

शक्ति का बहुत पुराना मात्रक अश्व शक्ति है ।

1 अश्व शक्ति (hp) = 746 W

यह मात्रक आज भी कार, मोटरबाईक इत्यादि की निर्गत क्षमता को व्यक्त करने के लिए प्रयुक्त होता है ।

जब हम विद्युत् उपकरण; जैसे-विद्युत् बल्ब, हीटर और प्रशीतक आदि खरीदते हैं तो हमें मात्रक वाट से भी व्यवहार करना होता है । एक 100 वाट का बल्ब 10 घंटे में एक किलोवाट-घंटा विद्युत् ऊर्जा की खपत करता है ।

अर्थात् 100 (वाट) × 10 (घंटे)
= 1000 वाट-घंटा
= 1 किलोवाट-घंटा (k Wh)
= 10^3 (W) × 3600 (s)
= 3.6×10^6 J

विद्युत्-ऊर्जा की खपत के लिए मूल्य, मात्रक kWh में चुकाया जाता है जिसे साधारणतया 'यूनिट' के नाम से पुकारते हैं । ध्यान दें कि kWh ऊर्जा का मात्रक है, न कि शक्ति का ।

> ***उदाहरण 6.10*** कोई लिफ्ट जिसका कुल द्रव्यमान (लिफ्ट + यात्रियों का) 1800 kg है, ऊपर की ओर $2 m s^{-1}$ की अचर चाल से गतिमान है । 4000 N का घर्षण बल इसकी गति का विरोध करता है । लिफ्ट को मोटर द्वारा प्रदत्त न्यूनतम शक्ति का आकलन कीजिए ।

हल लिफ्ट पर लगने वाला अधोगामी बल

$$F = mg + F_f = 1800 \times 10 + 4000 = 22000 \text{ N}$$

इस बल को संतुलित करने के लिए मोटर द्वारा पर्याप्त शक्ति की आपूर्ति की जानी चाहिए ।

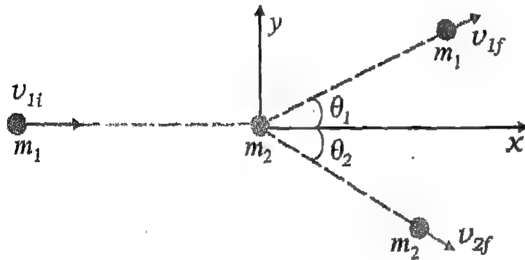
अतः $P = \mathbf{F}.\mathbf{v} = 22000 \times 2 = 44000 \text{ W} = 59 \text{ hp}$ ◄

6.12 संघट्ट

भौतिकी में हम गति एवं परिवर्तन का अध्ययन करते हैं । साथ ही साथ हम ऐसी भौतिक राशियों की खोज करते हैं जो किसी भौतिक प्रक्रम में परिवर्तित नहीं होती हैं । ऊर्जा-संरक्षण एवं संवेग-संरक्षण के नियम इसके अच्छे उदाहरण हैं । इस अनुभाग में, हम इन नियमों का बहुधा सामने आने वाली परिघटनाओं, जिन्हें संघट्ट कहते हैं, में प्रयोग करेंगे । प्रायः हम समाचार-पत्रों में पढ़ते हैं कि दो वाहनों में टक्कर हुई और परिणामस्वरूप

अनावश्यक रूप से मानव जीवन और अंगों को क्षति पहुंची। विभिन्न खेलों; जैसे–बिलियर्ड, मारबल या कैरम आदि में संघट्ट एक अनिवार्य घटक है। अब हम किन्हीं दो द्रव्यमानों का आदर्श रूप में प्रस्तुत संघट्ट का अध्ययन करेंगे।

मान लीजिए कि दो द्रव्यमान m_1 व m_2 हैं जिसमें कण m_1 चाल v_{1i} से गतिमान है जहां अधोलिखित 'i' आरंभिक चाल को निरूपित करता है। दूसरा द्रव्यमान m_2 भी गति में हो सकता है। फिर भी हम एक निर्देश फ्रेम का चयन कर सकते हैं जिसमें द्रव्यमान m_2 विरामावस्था में है और इस फ्रेम में कार्यरत है। इस फ्रेम में द्रव्यमान m_1, दूसरे द्रव्यमान m_2 से जो विरामावस्था में है, संघट्ट करता है जो चित्र 6.9 में चित्रित किया गया है।



चित्र 6.9 किसी द्रव्यमान m_1 का अन्य स्थिर द्रव्यमान m_2 से संघट्ट।

संघट्ट के पश्चात् द्रव्यमान m_1 व m_2 प्रतीयमानतः यादृच्छिक दिशाओं में गति करते हैं। तथापि सभी कुछ यादृच्छिक नहीं है और हम देखेंगे कि द्रव्यमानों, उनके वेगों और निर्देश फ्रेम के सापेक्ष कोणों में निश्चित संबंध है जो उन्हें आपस में जोड़ता है।

6.12.1 प्रत्यास्थ एवं अप्रत्यास्थ संघट्ट

सभी संघट्टों में निकाय का कुल रेखीय संवेग नियत रहता है अर्थात् निकाय का आरंभिक संवेग उसके अंतिम संवेग के बराबर होता है। इसे निम्न प्रकार से सिद्ध किया जा सकता है। जब दो पिंड संघट्ट करते हैं तो संघट्ट समय Δt में कार्यरत परस्पर आवेगी बल, उनके परस्पर संवेगों में परिवर्तन लाने का कारण होते हैं। अर्थात्

$$\Delta \mathbf{p}_1 = \mathbf{F}_{12}\Delta t$$
$$\Delta \mathbf{p}_2 = \mathbf{F}_{21}\Delta t$$

जहां $\mathbf{F}_{12}$ दूसरे पिंड द्वारा पहले पिंड पर आरोपित बल है। इसी तरह $\mathbf{F}_{21}$ पहले पिंड द्वारा दूसरे पिंड पर आरोपित बल है। न्यूटन के गति के तृतीय नियमानुसार $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ होता है। यह दर्शाता है कि

$$\Delta \mathbf{p}_1 + \Delta \mathbf{p}_2 = 0$$

यदि बल संघट्ट समय Δt के दौरान जटिल रूप से परिवर्तित हो रहे हों तो भी उपरोक्त परिणाम सत्य हैं। चूंकि न्यूटन का तृतीय नियम प्रत्येक क्षण पर सत्य है अतः पहले पिंड पर आरोपित कुल आवेग, दूसरे पिंड पर आरोपित आवेग के बराबर परंतु विपरीत दिशा में होगा।

दूसरी ओर निकाय की कुल गतिज ऊर्जा आवश्यक रूप से संरक्षित नहीं रहती है। संघट्ट के दौरान टक्कर और विकृति, ऊष्मा और ध्वनि उत्पन्न करते हैं। आरंभिक गतिज ऊर्जा का कुछ अंश ऊर्जा के दूसरे रूपों में रूपान्तरित हो जाता है। यदि उपरोक्त दोनों द्रव्यमानों को जोड़ने वाली 'स्प्रिंग' बिना किसी ऊर्जा-क्षति के अपनी मूल आकृति प्राप्त कर लेती है, जो पिंडों की आरंभिक गतिज ऊर्जा उनकी अंतिम गतिज ऊर्जा के बराबर होगी परंतु संघट्ट काल Δt के दौरान अचर नहीं रहती। इस प्रकार के संघट्ट को **प्रत्यास्थ संघट्ट** कहते हैं। दूसरी ओर यदि विकृति दूर नहीं होती है और दोनों पिंड संघट्ट के पश्चात् आपस में सटे रहकर गति करें तो इस प्रकार के संघट्ट को **पूर्णतः अप्रत्यास्थ संघट्ट** कहते हैं। इसके अतिरिक्त मध्यवर्ती स्थिति आमतौर पर देखने को मिलती है जब विकृति आंशिक रूप से कम हो जाती है और प्रारंभिक गतिज ऊर्जा की आंशिक रूप से क्षति हो जाती है। इसे समुचित रूप से **अप्रत्यास्थ संघट्ट** कहते हैं।

6.12.2 एकविमीय संघट्ट

सर्वप्रथम हम किसी पूर्णतः अप्रत्यास्थ संघट्ट की स्थिति का अध्ययन करते हैं। चित्र 6.9 में

$$\theta_1 = \theta_2 = 0$$

$$m_1 v_{1i} = (m_1+m_2)v_f \qquad \text{(संवेग संरक्षण के नियम से)}$$

$$v_f = \frac{m_1}{(m_1+m_2)} v_{1i} \qquad (6.23)$$

संघट्ट में गतिज ऊर्जा की क्षतिः

$$\Delta K = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_f^2$$

$$= \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 - \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{(m_1+m_2)} v_{1i}^2 \qquad \text{[समीकरण (6.23) द्वारा]}$$

$$= \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 \left[1 - \frac{m_1}{m_1+m_2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} v_{1i}^2$$

जो कि अपेक्षानुसार एक धनात्मक राशि है।

आइए, अब प्रत्यास्थ संघट्ट की स्थिति का अध्ययन करते हैं। उपरोक्त नामावली के प्रयोग के साथ $\theta_1 = \theta_2 = 0$ लेने पर, रेखीय संवेग एवं गतिज ऊर्जा के संरक्षण की समीकरण निम्न है :

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \qquad (6.24)$$

$$m_1 v_{1i}^2 = m_1 v_{1f}^2 + m_2 v_{2f}^2 \quad (6.25)$$

समीकरण (6.24) और समीकरण (6.25) से हम प्राप्त करते हैं

$$m_1 v_{1i}(v_{2f} - v_{1i}) = m_1 v_{1f}(v_{2f} - v_{1f})$$

अथवा,

$$v_{2f}(v_{1i} - v_{1f}) = v_{1i}^2 - v_{1f}^2$$

अथवा, $= (v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f})$

अत: $v_{2f} = v_{1i} + v_{1f}$ (6.26)

इसे समीकरण (6.24) में प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं

$$v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} v_{1i} \quad (6.27)$$

तथा

$$v_{2f} = \frac{2 m_1 v_{1i}}{m_1 + m_2} \quad (6.28)$$

इस प्रकार 'अज्ञात राशियां' (v_{1f}, v_{2f}), ज्ञात राशियों $\{m_1, m_2, v_{1i}\}$ के पदों में प्राप्त हो गई हैं। आइए, अब उपरोक्त विश्लेषण से विशेष दशाओं में रुचिकर निष्कर्ष प्राप्त करते हैं।

दशा I : यदि दोनों द्रव्यमान समान हैं, अर्थात् $m_1 = m_2$, तब

$$v_{1f} = 0,\ v_{2f} = v_{1i}$$

अर्थात् प्रथम द्रव्यमान विरामावस्था में आ जाता है और संघट्ट के पश्चात् दूसरा द्रव्यमान, प्रथम द्रव्यमान (जो पहले स्थिर था) का आरंभिक वेग प्राप्त कर लेता है।

दशा II : यदि एक पिंड का द्रव्यमान दूसरे पिंड के द्रव्यमान से बहुत अधिक है, अर्थात् $m_2 >> m_1$, तब

$$v_{1f} \simeq -v_{1i},\ v_{2f} \simeq 0$$

भारी द्रव्यमान स्थिर रहता है जबकि हल्के द्रव्यमान का वेग उत्क्रमित हो जाता है।

उदाहरण 6.11 गतिशील न्यूट्रॉनों का मंदन : किसी नाभिकीय रिऐक्टर में तीव्रगामी न्यूट्रॉन (विशिष्ट रूप से वेग $10^7\ \text{m s}^{-1}$) को $10^3\ \text{m s}^{-1}$ के वेग तक मंदित कर दिया जाना चाहिए ताकि नाभिकीय विखंडन अभिक्रिया में न्यूट्रॉन की यूरेनियम के समस्थानिक $^{235}_{92}U$ से अन्योन्यक्रिया करने की प्रायिकता उच्च हो जाए। सिद्ध कीजिए कि न्यूट्रॉन एक हल्के नाभिक, जैसे ड्यूटीरियम या कार्बन जिसका द्रव्यमान न्यूट्रॉन के द्रव्यमान का मात्र कुछ गुना (लगभग बराबर) है, से प्रत्यास्थ संघट्ट करने में अपनी अधिकांश गतिज ऊर्जा की क्षति कर देता है। ऐसे पदार्थ प्राय: भारी जल (D_2O) अथवा ग्रेफाइट, जो न्यूट्रॉनों की गति को मंद कर देते हैं, 'मंदक' कहलाते हैं।

हल न्यूट्रॉन की प्रारंभिक गतिज ऊर्जा है

$$K_{1i} = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2$$

जबकि समीकरण (6.27) से इसकी अंतिम गतिज ऊर्जा है

$$K_{1f} = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 v_{1i}^2$$

क्षयित आंशिक गतिज ऊर्जा है

$$f_1 = \frac{K_{1f}}{K_{1i}} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2$$

जबकि विमंदक नाभिक K_{2f}/K_{1i} द्वारा भिन्नात्मक गतिज ऊर्जा वृद्धि है।

$$f_2 = 1 - f_1 \quad \text{(प्रत्यास्थ संघट्ट)}$$

$$f_2 = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$$

उपरोक्त परिणाम को समीकरण (6.28) से प्रतिस्थापित करके भी सत्यापित किया जा सकता है।

ड्यूटीरियम के लिए, $m_2 = 2 m_1$ और हम प्राप्त करते हैं $f_1 = 1/9$, जबकि $f_2 = 8/9$ है। अत: न्यूट्रॉन की लगभग 90% ऊर्जा ड्यूटीरियम को हस्तांतरित हो जाती है। कार्बन के लिए, $f_1 = 71.6\%$ और $f_2 = 28.4\%$ है। हालांकि, व्यवहार में, सीधा संघट्ट विरले ही होने के कारण यह संख्या काफी कम होती है। ◀

6.12.3 द्विविमीय संघट्ट

चित्र 6.9 स्थिर द्रव्यमान m_2 से गतिमान द्रव्यमान m_1 का संघट्ट का चित्रण करता है। इस प्रकार के संघट्ट में रेखीय संवेग संरक्षित रहता है। चूंकि संवेग एक सदिश राशि है, अत: यह तीन दिशाओं $\{x, y, z\}$ के लिए तीन समीकरण प्रदर्शित करता है। संघट्ट के पश्चात् m_1 तथा m_2 के अंतिम वेग की दिशाओं के आधार पर समतल का निर्धारण कीजिए और मान लीजिए कि यह x-y समतल है। रेखीय संवेग के z- घटक का संरक्षण यह दर्शाता है कि संपूर्ण संघट्ट x-y समतल में है। x-घटक और y-घटक की समीकरण निम्न हैं :

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta_1 + m_2 v_{2f} \cos\theta_2 \quad (6.29)$$

$$0 = m_1 v_{1f} \sin\theta_1 - m_2 v_{2f} \sin\theta_2 \quad (6.30)$$

अधिकतर स्थितियों में यह माना जाता है कि $\{m_1, m_2, m_{1i}\}$ ज्ञात है। अत: संघट्ट के पश्चात्, हमें चार अज्ञात राशियां $\{v_{1f}, v_{2f}, \theta_1$ और $\theta_2\}$ प्राप्त होती हैं जबकि हमारे पास मात्र दो समीकरण हैं। यदि $\theta_1 = \theta_2 = 0$, हम पुन: एकविमीय संघट्ट के लिए समीकरण (6.24) प्राप्त कर लेते हैं।

अब यदि संघट्ट प्रत्यास्थ है तो,

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \quad (6.31)$$

यह हमें समीकरण (6.29) व (6.30) के अलावा एक और समीकरण देता है लेकिन अभी भी हमारे पास सभी अज्ञात राशियों

का पता लगाने के लिए एक समीकरण कम है । अतः प्रश्न को हल करने के लिए, चार अज्ञात राशियों में से कम से कम एक और राशि, मान लीजिए θ_1, ज्ञात होनी चाहिए । उदाहरणार्थ, कोण θ_1 का निर्धारण संसूचक को कोणीय रीति में x-अक्ष से y-अक्ष तक घुमा कर किया जा सकता है । राशियों $\{m_1, m_2, V_{1i}, \theta_1\}$ के ज्ञात मान से हम समीकरण (6.29)-(6.31) का प्रयोग करके $\{v_{1f}, v_{2f}, \theta_2\}$ का निर्धारण कर सकते हैं ।

▶ *उदाहरण 6.12* मान लीजिए कि चित्र 6.9 में चित्रित संघट्ट बिलियर्ड की समान द्रव्यमान ($m_1 = m_2$) वाली दो गेंदों के मध्य हुआ है जिसमें प्रथम गेंद क्यू (डण्डा) कहलाती है और द्वितीय गेंद 'लक्ष्य' कहलाती है । खिलाड़ी लक्ष्य गेंद को $\theta_2 = 37°$ के कोण पर कोने में लगी थैली में गिराना चाहता है । यहां मान लीजिए कि संघट्ट प्रत्यास्थ है तथा घर्षण और घूर्णन गति महत्त्वपूर्ण नहीं हैं । कोण θ_1 ज्ञात कीजिए ।

हल चूंकि द्रव्यमान समान हैं अतः संवेग संरक्षण के नियमानुसार,

$$\mathbf{v}_{1i} = \mathbf{v}_{1f} + \mathbf{v}_{2f}$$

समीकरण के दोनों पक्षों का वर्ग करने पर प्राप्त होता है

$$\mathbf{v}_{1i}^2 = (\mathbf{v}_{1f} + \mathbf{v}_{2f}) \cdot (\mathbf{v}_{1f} + \mathbf{v}_{2f})$$

$$= v_{1f}^2 + v_{2f}^2 + 2\mathbf{v}_{1f} \cdot \mathbf{v}_{2f}$$

$$\{ = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 + 2v_{1f} v_{2f} \cos(\theta_1 + 37°) \} \quad (6.32)$$

चूंकि संघट्ट प्रत्यास्थ है और द्रव्यमान $m_1 = m_2$ है, गतिज ऊर्जा के संरक्षण, समीकरण (6.31) से हमें प्राप्त होता है

$$v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 \quad (6.33)$$

उपरोक्त दोनों समीकरणों (6.32) और (6.33) की तुलना करने पर,

$\cos(\theta_1 + 37°) = 0$

अतः $\theta_1 + 37° = 90°$

अथवा, $\theta_1 = 53°$

इससे सिद्ध होता है कि जब द्रव्यमान के दो पिंड जिनमें से एक स्थिर है, पृष्ठसर्पी प्रत्यास्थ संघट्ट करते है तो संघट्ट के पश्चात्, दोनों एक-दूसरे से समकोण बनाते हुए गति करेंगे । ◀

सारांश

1. कार्य-ऊर्जा प्रमेय के अनुसार, किसी पिंड की गतिज ऊर्जा में परिवर्तन उस पर आरोपित कुल बल द्वारा किया गया कार्य है ।

$$K_f - K_i = W_{net}$$

2. कोई बल संरक्षी कहलाता है यदि (a) उसके द्वारा किसी पिंड पर किया गया कार्य पथ पर निर्भर न करके केवल सिरे के बिंदुओं $\{x_i, x_j\}$ पर निर्भर करता है, अथवा (b) बल द्वारा किया गया कार्य शून्य होता है, जब पिंड के लिए जो स्वेच्छा से किसी ऐसे बंद पथ में स्वतः अपनी प्रारंभिक स्थिति पर वापस आ जाता है ।

3. एकविमीय संरक्षी बल के लिए हम स्थितिज ऊर्जा फलन $V(x)$ को इस प्रकार परिभाषित सकते हैं

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$$

अथवा, $$V_i - V_f = \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx$$

4. यांत्रिक ऊर्जा-संरक्षण के सिद्धांत के अनुसार, यदि किसी पिंड पर कार्यरत बल संरक्षी हैं जो पिंड की कुल यांत्रिक ऊर्जा अचर रहती है ।

5. m द्रव्यमान के किसी कण की पृथ्वी की सतह से x ऊंचाई पर गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा $V(x) = m g x$ होती है, जहां ऊंचाई के साथ g के मान में परिवर्तन उपेक्षणीय है ।

6. k बल-नियतांक वाले स्प्रिंग, जिसमें खिंचाव x है, की प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा होती है :

$$V(x) = \frac{1}{2} k x^2$$

भौतिक राशि	प्रतीक	विमा	मात्रक	टिप्पणी
कार्य	W	$[ML^2T^{-2}]$	जूल (J)	$W = F.d$
गतिज ऊर्जा	K	$[ML^2T^{-2}]$	जूल (J)	$K = \frac{1}{2}mv^2$
स्थितिज ऊर्जा	$V(x)$	$[ML^2T^{-2}]$	जूल (J)	$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$
यांत्रिक ऊर्जा	E	$[ML^2T^{-2}]$	जूल (J)	$E = K + V$
स्प्रिंग नियतांक	k	$[MT^{-2}]$	न्यूटन/मीटर ($N\ m^{-1}$)	$F = -kx$ $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$
शक्ति	P	$[ML^2T^{-3}]$	वाट (W)	$P = F.v$ $P = \frac{dW}{dt}$

विचारणीय विषय

1. वाक्यांश "किए गए कार्य का परिकलन कीजिए" अधूरा है। हमें विशेष बल या बलों के समूह द्वारा किसी पिंड का निश्चित विस्थापन करने में किए गए कार्य का स्पष्ट उल्लेख करना चाहिए (अथवा संदर्भ देते हुए स्पष्टतया इंगित करना चाहिए)।
2. किया गया कार्य एक अदिश राशि है। यह भौतिक राशि धनात्मक या ऋणात्मक हो सकती है, जबकि द्रव्यमान और गतिज ऊर्जा धनात्मक अदिश राशियां हैं। किसी पिंड पर घर्षण या श्यान बल द्वारा किया गया कार्य ऋणात्मक होता है।
3. न्यूटन के तृतीय नियमानुसार, किन्हीं दो पिंडों के मध्य परस्पर एक-दूसरे पर आरोपित बलों का योग शून्य होता है।
$$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0$$
परंतु दो बलों द्वारा किए गए कार्य का योग सदैव शून्य नहीं होता है, अर्थात्
$$W_{12} + W_{21} \neq 0$$
तथापि, कभी-कभी यह सत्य भी हो सकता है।
4. कभी-कभी किसी बल द्वारा किए गए कार्य की गणना तब भी की जा सकती है जबकि बल की ठीक-ठीक प्रकृति का ज्ञान न भी हो। उदाहरण 6.1 से यह स्पष्ट है, जहां कार्य-ऊर्जा प्रमेय का ऐसी स्थिति में प्रयोग किया गया है।
5. कार्य-ऊर्जा प्रमेय न्यूटन के द्वितीय नियम से स्वतन्त्र नहीं है। कार्य-ऊर्जा प्रमेय को न्यूटन के द्वितीय नियम के अदिश रूप में देखा जा सकता है। यांत्रिक ऊर्जा के संरक्षण के सिद्धांत को, संरक्षी बलों के लिए कार्य-ऊर्जा प्रमेय के एक महत्त्वपूर्ण परिणाम के रूप में समझा जा सकता है।
6. कार्य-ऊर्जा प्रमेय सभी जड़त्वीय फ्रेमों में लागू होती है। इसे अजड़त्वीय फ्रेमों में भी लागू किया जा सकता है यदि विचारणीय पिंड पर आरोपित कुल बलों के परिकलन में छद्म बल के प्रभाव को भी सम्मिलित कर लिया जाए।
7. संरक्षी बलों के अधीन किसी पिंड की स्थितिज ऊर्जा हमेशा किसी नियतांक तक अनिश्चित रहती है। उदाहरणार्थ, किसी पिंड की स्थितिज ऊर्जा किस बिंदु पर शून्य लेनी है, यह केवल स्वेच्छा से चयन किए गए बिंदु पर निर्भर करता है। जैसे गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा mgh की स्थिति में स्थितिज ऊर्जा के लिए शून्य बिंदु पृथ्वी के पृष्ठ पर लिया गया है। स्प्रिंग के लिए जिसकी ऊर्जा $\frac{1}{2}kx^2$ है, स्थितिज ऊर्जा के लिए शून्य बिंदु, दोलायमान द्रव्यमान की माध्य स्थिति पर लिया गया है।
8. यांत्रिकी में स्थितिज ऊर्जा प्रत्येक बल से संबद्ध नहीं होती है। उदाहरणार्थ, घर्षण बल द्वारा किसी बंद पथ में किया गया कार्य शून्य नहीं है और न ही घर्षण से स्थितिज ऊर्जा को संबद्ध किया जा सकता है।
9. किसी संघट्ट के दौरान (a) संघट्ट के प्रत्येक क्षण में पिंड का कुल रेखीय संवेग संरक्षित रहता है, (b) गतिज ऊर्जा संरक्षण (चाहे संघट्ट प्रत्यास्थ ही हो) संघट्ट की समाप्ति के पश्चात् ही लागू होता है और संघट्ट के प्रत्येक क्षण के लिए लागू नहीं होता है। वास्तव में, संघट्ट करने वाले दोनों पिंड विकृत हो जाते हैं और क्षण भर के लिए एक दूसरे के सापेक्ष विरामावस्था में आ जाते हैं।

अभ्यास

6.1 किसी वस्तु पर किसी बल द्वारा किए गए कार्य का चिह्न समझना महत्त्वपूर्ण है । सावधानीपूर्वक बताइए कि निम्नलिखित राशियां धनात्मक हैं या ऋणात्मक :

(a) किसी व्यक्ति द्वारा किसी कुएं में से रस्सी से बँधी बाल्टी को रस्सी द्वारा बाहर निकालने में किया गया कार्य ।

(b) उपर्युक्त स्थिति में गुरुत्वीय बल द्वारा किया गया कार्य ।

(c) किसी आनत तल पर फिसलती हुई किसी वस्तु पर घर्षण द्वारा किया गया कार्य ।

(d) किसी खुरदरे क्षैतिज तल पर एकसमान वेग से गतिमान किसी वस्तु पर लगाए गए बल द्वारा किया गया कार्य ।

(e) किसी दोलायमान लोलक को विरामावस्था में लाने के लिए वायु के प्रतिरोधी बल द्वारा किया गया कार्य ।

6.2 2 kg द्रव्यमान की कोई वस्तु जो आरंभ में विरामावस्था में है, 7 N के किसी क्षैतिज बल के प्रभाव से एक मेज पर गति करती है । मेज का गतिज-घर्षण गुणांक 0.1 है । निम्नलिखित का परिकलन कीजिए और अपने परिणामों की व्याख्या कीजिए ।

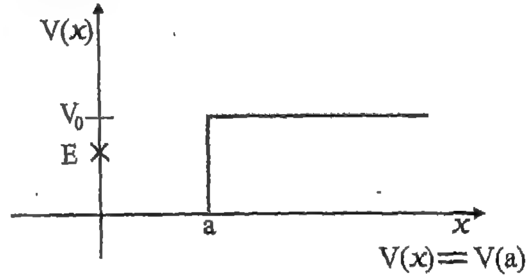
(a) लगाए गए बल द्वारा 10 s में किया गया कार्य ।

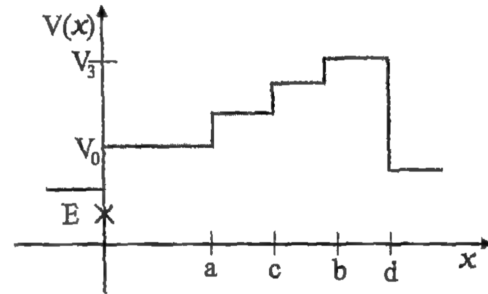
(b) घर्षण द्वारा 10 s में किया गया कार्य ।

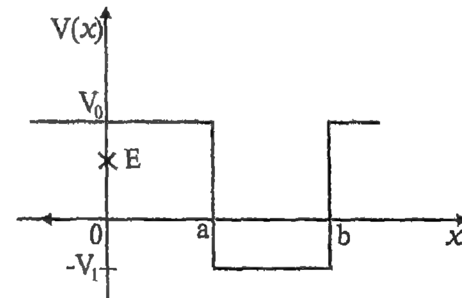
(c) वस्तु पर कुल बल द्वारा 10 s में किया गया कार्य ।

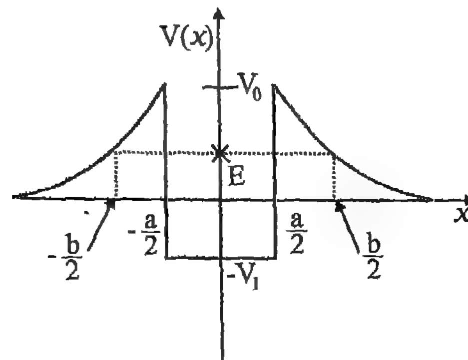
(d) वस्तु की गतिज ऊर्जा में 10 s में परिवर्तन ।

6.3 चित्र 6.11 में कुछ एकविमीय स्थितिज ऊर्जा-फलनों के उदाहरण दिए गए हैं । कण की कुल ऊर्जा कोटि-अक्ष पर क्रॉस द्वारा निर्देशित की गई है । प्रत्येक स्थिति में, कोई ऐसे क्षेत्र बताइए, यदि कोई हैं तो, जिनमें दी गई ऊर्जा के लिए, कण को नहीं पाया जा सकता । इसके अतिरिक्त, कण की कुल न्यूनतम ऊर्जा भी निर्देशित कीजिए । कुछ ऐसे भौतिक संदर्भों के विषय में सोचिए जिनके लिए ये स्थितिज ऊर्जा आकृतियां प्रासंगिक हों ।



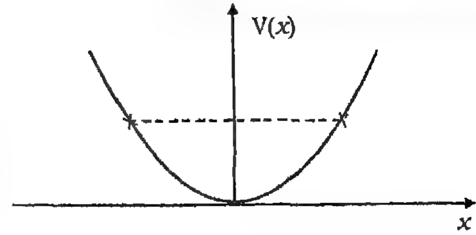






चित्र 6.11

6.4 रेखीय सरल आवर्त गति कर रहे किसी कण का स्थितिज ऊर्जा फलन $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$ है, जहां k दोलक का बल नियतांक है। $k = 0.5\ N\ m^{-1}$ के लिए $V(x)$ व x के मध्य ग्राफ चित्र 6.12 में दिखाया गया है। यह दिखाइए कि इस विभव के अंतर्गत गतिमान कुल 1J ऊर्जा वाले कण को अवश्य ही 'वापिस आना' चाहिए जब यह $x = \pm 2$ m पर पहुंचता है।



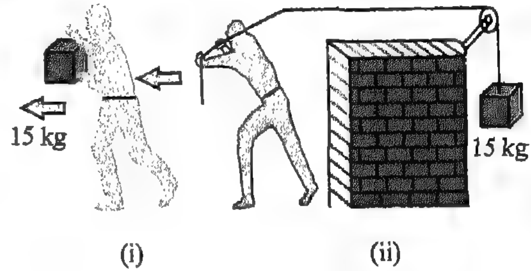
चित्र 6.12

6.5 निम्नलिखित का उत्तर दीजिए:

(a) किसी राकेट का बाह्य आवरण उड़ान के दौरान घर्षन के कारण जल जाता है। जलने के लिए आवश्यक ऊष्मीय ऊर्जा किसके व्यय पर प्राप्त की गई–राकेट या वातावरण ?

(b) धूमकेतु सूर्य के चारों ओर बहुत ही दीर्घवृत्तीय कक्षाओं में घूमते हैं। साधारणतया धूमकेतु पर सूर्य का गुरुत्वीय बल धूमकेतु के लंबवत् नहीं होता है। फिर भी धूमकेतु की संपूर्ण कक्षा में गुरुत्वीय बल द्वारा किया गया कार्य शून्य होता है। क्यों ?

(c) पृथ्वी के चारों ओर बहुत ही क्षीण वायुमण्डल में घूमते हुए किसी कृत्रिम उपग्रह की ऊर्जा धीरे-धीरे वायुमण्डलीय प्रतिरोध (चाहे यह कितना ही कम क्यों न हो) के विरुद्ध क्षय के कारण कम होती जाती है फिर भी जैसे-जैसे कृत्रिम उपग्रह पृथ्वी के समीप आता है तो उसकी चाल में लगातार वृद्धि क्यों होती है ?



चित्र 6.13

(d) चित्र 6.13(i) में एक व्यक्ति अपने हाथों में 15kg का कोई द्रव्यमान लेकर 2 m चलता है। चित्र 6.13(ii) में वह उतनी ही दूरी अपने पीछे रस्सी को खींचते हुए चलता है। रस्सी घिरनी पर चढ़ी हुई है और उसके दूसरे सिरे पर 15 kg का द्रव्यमान लटका हुआ है। परिकलन कीजिए कि किस स्थिति में किया गया कार्य अधिक है ?

6.6 सही विकल्प को रेखांकित कीजिए :

(a) जब कोई संरक्षी बल किसी वस्तु पर धनात्मक कार्य करता है तो वस्तु की स्थितिज ऊर्जा बढ़ती है/घटती है/अपरिवर्ती रहती है।

(b) किसी वस्तु द्वारा घर्षण के विरुद्ध किए गए कार्य का परिणाम हमेशा इसकी इसकी गतिज/स्थितिज ऊर्जा में क्षय होता है।

(c) किसी बहुकण निकाय के कुल संवेग-परिवर्तन की दर निकाय के बाह्य बल/आंतरिक बलों के जोड़ के अनुक्रमानुपाती होती है।

(d) किन्हीं दो पिंडों के अप्रत्यास्थ संघट्ट में वे राशियां, जो संघट्ट के बाद नहीं बदलती हैं; निकाय की कुल गतिज ऊर्जा/कुल रेखीय संवेग/कुल ऊर्जा हैं।

6.7 बतलाइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तर के लिए कारण भी दीजिए।

(a) किन्हीं दो पिंडों के प्रत्यास्थ संघट्ट में, प्रत्येक पिंड का संवेग व ऊर्जा संरक्षित रहती है।

(b) किसी पिंड पर चाहे कोई भी आंतरिक व बाह्य बल क्यों न लग रहा हो, निकाय की कुल ऊर्जा सर्वदा संरक्षित रहती है।

(c) प्रकृति में प्रत्येक बल के लिए किसी बंद लूप में, किसी पिंड की गति में किया गया कार्य शून्य होता है।

(d) किसी अप्रत्यास्थ संघट्ट में, किसी निकाय की अंतिम गतिज ऊर्जा, आरंभिक गतिज ऊर्जा से हमेशा कम होती है।

6.8 निम्नलिखित का उत्तर ध्यानपूर्वक, कारण सहित दीजिए :

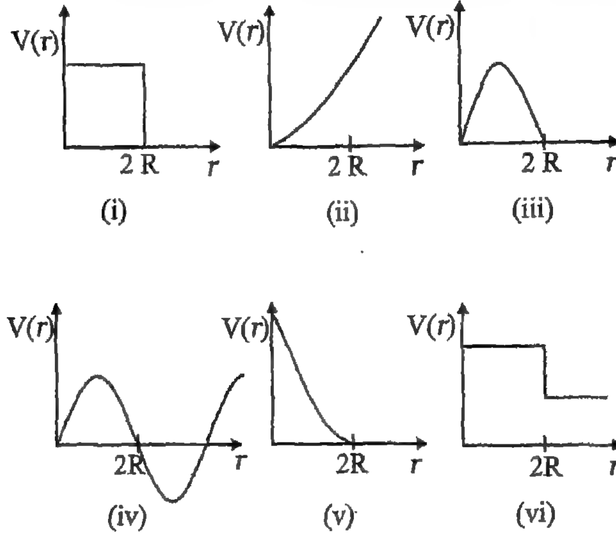
(a) किन्हीं दो बिलियर्ड-गेंदों के प्रत्यास्थ संघट्ट में, क्या गेंदों के संघट्ट की अल्पावधि में (जब वे संपर्क में होती हैं) कुल गतिज ऊर्जा संरक्षित रहती है।

(b) दो गेंदों के किसी प्रत्यास्थ संघट्ट की लघु अवधि में क्या कुल रेखीय संवेग संरक्षित रहता है ?

(c) किसी अप्रत्यास्थ संघट्ट के लिए प्रश्न (a) व (b) के लिए आपके उत्तर क्या हैं ?

(d) यदि दो बिलियर्ड-गेंदों की स्थितिज ऊर्जा केवल उनके केंद्रों के मध्य, पृथक्करण-दूरी पर निर्भर करती है तो संघट्ट प्रत्यास्थ होगा या अप्रत्यास्थ ? (ध्यान दीजिए कि यहां हम संघट्ट के दौरान बल के संगत स्थितिज ऊर्जा की बात कर रहे हैं, ना कि गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा की ।

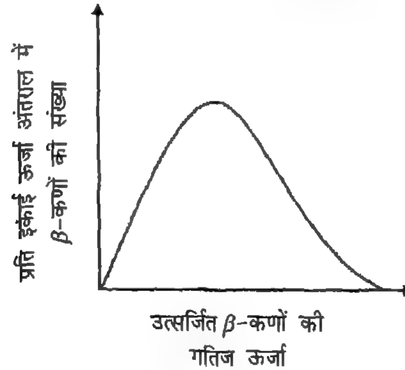
6.9 नीचे दिए गए चित्र 6.14 में दिए गए स्थितिज ऊर्जा वक्रों में से कौन-सा वक्र संभवतः दो बिलियर्ड-गेंदों के प्रत्यास्थ संघट्ट का वर्णन नहीं करेगा ? यहां r गेंदों के केंद्रों के मध्य की दूरी है और प्रत्येक गेंद का अर्धव्यास R है ।



चित्र 6.14

6.10 विरामावस्था में किसी मुक्त न्यूट्रॉन के क्षय पर विचार कीजिए $n \rightarrow p + e^-$

प्रदर्शित कीजिए कि इस प्रकार के द्विपिंड क्षय से नियत ऊर्जा का कोई इलेक्ट्रॉन अवश्य उत्सर्जित होना चाहिए, और इसलिए यह किसी न्यूट्रॉन या किसी नाभिक के β- क्षय में प्रेक्षित सतत ऊर्जा वितरण का स्पष्टीकरण नहीं दे सकता (चित्र 6.15) ।



चित्र 6.15

[**नोट**: इस अभ्यास का हल उन कई तर्कों में से एक है जिन्हें डब्ल्यु पॉली द्वारा β-क्षय के क्षय उत्पादों में किसी तीसरे कण के अस्तित्व का पूर्वानुमान करने के लिए दिया गया था । यह कण न्यूट्रिनों के नाम से जाना जाता है । अब हम जानते हैं कि यह निजी प्रचक्रण 1/2 का कोई कण है (जैसे e^-, p या n)। लेकिन यह उदासीन है या द्रव्यमानरहित या (इलेक्ट्रॉन के द्रव्यमान की तुलना में) इसका द्रव्यमान अत्यधिक कम है और जो द्रव्य के साथ दुर्बलता से परस्पर क्रिया करता है । न्यूट्रॉन की उचित क्षय-प्रक्रिया इस प्रकार है :

$n = p + e^- + \bar{\nu}$]

6.11 कोई पिंड जो विरामावस्था में है, अचर त्वरण से एकविमीय गति करता है । इसको किसी समय दी गई शक्ति अनुक्रमानुपाती है

(i) $t^{1/2}$ (ii) t (iii) $t^{3/2}$ (iv) t^2

6.12 एक पिंड अचर शक्ति के स्रोत के प्रभाव से एक ही दिशा में गतिमान है । इसका t समय में विस्थापन, अनुक्रमानुपाती है

(i) $t^{1/2}$ (ii) t (iii) $t^{3/2}$ (iv) t^2

6.13 किसी पिंड पर नियत बल लगाकर उसे किसी निर्देशांक प्रणाली के अनुसार z - अक्ष के अनुदिश गति करने के लिए बाध्य किया गया है जो इस प्रकार है

$$\mathbf{F} = (-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}})\ \mathrm{N}$$

जहां $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ क्रमशः x-, y- एवं z- अक्ष के अनुदिश बल के एकांक सदिश हैं । इस वस्तु को z-अक्ष के अनुदिश 4 m की दूरी तक गति कराने के लिए आरोपित बल द्वारा किया गया कार्य कितना होगा ?

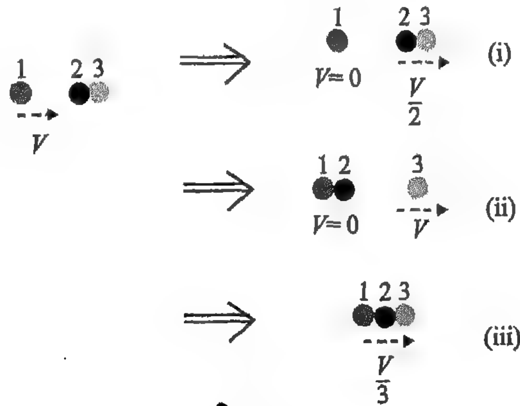
6.14 किसी अंतरिक्ष किरण प्रयोग में एक इलेक्ट्रॉन और एक प्रोटॉन की खोज होती है जिसमें पहले कण की गतिज ऊर्जा 10 keV है और दूसरे कण की गतिज ऊर्जा 100 keV है । इनमें कौन-सा तीव्रगामी है, इलेक्ट्रॉन या प्रोटॉन ? इनकी चालों का अनुपात ज्ञात कीजिए । (इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान $= 9.11\times10^{-31}$ kg, प्रोटॉन का द्रव्यमान $= 1.67\times10^{-27}$ kg, 1 eV $= 1.60\times10^{-19}$J)

6.15 2 mm त्रिज्या की वर्षा की कोई बूंद 500 m की ऊंचाई से पृथ्वी पर गिरती है । यह अपनी आरंभिक ऊंचाई के आधे हिस्से तक (वायु के श्यान प्रतिरोध के कारण) घटते त्वरण के साथ गिरती है और अपनी अधिकतम (सीमान्त) चाल प्राप्त कर लेती है, और उसके बाद एकसमान चाल से गति करती है । वर्षा की बूंद पर उसकी यात्रा के पहले व दूसरे अर्ध भागों में गुरुत्वीय बल द्वारा किया गया कार्य कितना होगा ? यदि बूंद की चाल पृथ्वी तक पहुंचने पर 10 m s^{-1} हो तो संपूर्ण यात्रा में प्रतिरोधी बल द्वारा किया गया कार्य कितना होगा ?

6.16 किसी गैस-पात्र में कोई अणु 200 m s^{-1} की चाल से अभिलंब के साथ 30° का कोण बनाता हुआ दीवार से टकराकर पुनः उसी चाल से वापस लौट जाता है । क्या इस संघट्ट में संवेग संरक्षित है ? यह संघट्ट प्रत्यास्थ है या अप्रत्यास्थ ?

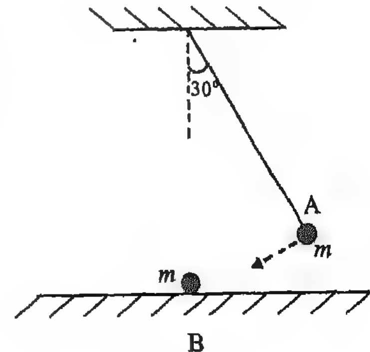
6.17 किसी भवन के भूतल पर लगा कोई पंप 30 m^3 आयतन की पानी की टंकी को 15 मिनट में भर देता है । यदि टंकी पृथ्वी तल से 40 m ऊपर हो और पंप की दक्षता 30% हो तो पंप द्वारा कितनी विद्युत् शक्ति का उपयोग किया गया ?

6.18 दो समरूपी बॉल-बियरिंग एक-दूसरे के संपर्क में हैं और किसी घर्षणरहित मेज पर विरामावस्था में हैं । इनके साथ समान द्रव्यमान का कोई दूसरा बॉल-बियरिंग, जो आरंभ में V चाल से गतिमान है, सम्मुख संघट्ट करता है । यदि संघट्ट प्रत्यास्थ है तो संघट्ट के पश्चात् निम्नलिखित (चित्र 6.16) में से कौन-सा परिणाम संभव है ?



चित्र 6.16

6.19 किसी लोलक के गोलक A को जो ऊर्ध्वाधर से 30° का कोण बनाता है, छोड़े जाने पर मेज पर, विरामावस्था में रखे दूसरे गोलक B से टकराता है जैसा कि चित्र 6.17 में प्रदर्शित है । ज्ञात कीजिए कि संघट्ट के पश्चात् गोलक कितना ऊंचा उठता है ? गोलकों के आकारों की उपेक्षा कीजिए और मान लीजिए कि संघट्ट प्रत्यास्थ है ।



चित्र 6.17

6.20 किसी लोलक के गोलक को चित्र 6.17 में प्रदर्शित क्षैतिज अवस्था A से छोड़ा गया है । यदि लोलक की लंबाई 1.5 m है तो निम्नतम बिंदु B पर आने पर गोलक की चाल क्या होगी ? यह दिया गया है कि इसकी आरंभिक ऊर्जा का 5% अंश वायु प्रतिरोध के विरुद्ध क्षय हो जाता है ।

6.21 300 kg द्रव्यमान की कोई ट्रॉली, 25 kg रेत का बोरा लिए हुए किसी घर्षणरहित पथ पर 27 km h^{-1} की एकसमान चाल से गतिमान है । कुछ समय पश्चात् बोरे में किसी छिद्र से रेत 0.05 kg s^{-1} की दर से निकलकर ट्रॉली के फर्श पर रिसने लगती है । रेत का बोरा खाली होने के पश्चात ट्रॉली की चाल क्या होगी ?

6.22 0.5 kg द्रव्यमान का एक कण वेग $v = a\,x^{3/2}$ से सरल रेखीय गति करता है जहां $a = 5\ m^{-1/2}s^{-1}$ है। $x = 0$ से $x = 2$ m तक इसके विस्थापन में कुल बल द्वारा किया गया कार्य कितना होगा ?

6.23 किसी पवनचक्की के ब्लेड, क्षेत्रफल A के वृत्त जितना क्षेत्रफल पार करते हैं । (a) यदि हवा v वेग से वृत्त के लंबवत् दिशा में बहती है तो t समय में इससे गुजरने वाली वायु का द्रव्यमान क्या होगा ? (b) वायु की गतिज ऊर्जा क्या होगी ? (c) मान लीजिए कि पवनचक्की हवा की 25% ऊर्जा को विद्युत् ऊर्जा में रूपान्तरित कर देती है । यदि $A = 30\ m^2$, और $v = 36$ km h^{-1} और वायु का घनत्व 1.2 kg m^{-3} है तो उत्पन्न विद्युत् शक्ति का परिकलन कीजिए ।

6.24 कोई व्यक्ति वजन कम करने के लिए 10 kg द्रव्यमान को 0.5 m की ऊंचाई तक 1000 बार उठाता है । मान लीजिए कि प्रत्येक बार द्रव्यमान को नीचे लाने में खोई हुई ऊर्जा क्षयित हो जाती है । (a) वह गुरुत्वाकर्षण बल के विरुद्ध कितना कार्य करता है ? (b) यदि वसा $3.8 \times 10^7 J$ ऊर्जा प्रति किलोग्राम आपूर्ति करती हो जो कि 20% दक्षता की दर से यांत्रिक ऊर्जा में परिवर्तित हो जाती है तो वह कितनी वसा खर्च कर डालेगा ?

6.25 कोई बड़ा परिवार 8 kW विद्युत्-शक्ति का उपभोग करता है । (a) किसी क्षैतिज सतह पर सीधे आपतित होने वाली सौर ऊर्जा की औसत दर 200 W m^{-2} है । यदि इस ऊर्जा का 20% भाग लाभदायक विद्युत् ऊर्जा में रूपान्तरित किया जा सकता है तब 8 kW की विद्युत् आपूर्ति के लिए कितने क्षेत्रफल की आवश्यकता होगी ? (b) इस क्षेत्रफल की तुलना किसी विशिष्ट भवन की छत के क्षेत्रफल से कीजिए ।

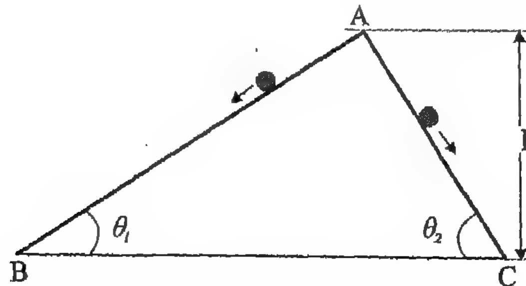
6.26 किसी प्राणि के दिल की धड़कन की दर (प्रति मिनट धड़कनों की संख्या) उसकी अभिलाक्षणिक लंबाई L के व्युत्क्रमानुपाती होती है । (a) क्या आप इसकी व्याख्या कर सकते हैं ? (b) किसी मानव का लघु-पुच्छ वानर के सापेक्ष अनुमाप लगभग 2.5 है । वानर के दिल की धड़कनों की दर क्या है ? मान लीजिए कि मानव के दिल की धड़कनों की दर 70 प्रति मिनट है।

6.27 कोई स्नायु लगभग 10^5 तंत्रिका कोशिकाओं को उद्दीपित करता है। इस प्रक्रम में व्यय ऊर्जा का आकलन कीजिए। (संकेत : सारणी 6.4 देखिए)

अतिरिक्त अभ्यास

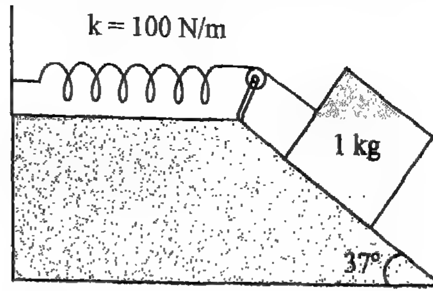
6.28 0.012 kg द्रव्यमान की कोई गोली 70 m s^{-1} की क्षैतिज चाल से चलते हुए 0.4 kg द्रव्यमान के लकड़ी के गुटके से टकराकर गुटके के सापेक्ष तुरंत ही विरामावस्था में आ जाती है । गुटके को छत से पतली तारों द्वारा लटकाया गया है । परिकलन कीजिए कि गुटका किस ऊंचाई तक ऊपर उठता है ? गुटके में पैदा हुई ऊष्मा की मात्रा का भी अनुमान लगाइए ।

6.29 दो घर्षणरहित आनत पथ, जिनमें से एक की ढाल अधिक है और दूसरे की ढाल कम है, बिंदु A पर मिलते हैं । जहां बिंदु A से प्रत्येक पथ पर एक-एक पत्थर को विरामावस्था से नीचे सरकाया जाता है (चित्र 6.18) । क्या ये पत्थर एक ही समय पर नीचे पहुंचेंगे ? क्या वे वहां एक ही चाल से पहुंचेंगे व्याख्या कीजिए । यदि $\theta_1 = 30^\circ$, $\theta_2 = 60^\circ$ और $h = 10$ m दिया है तो दोनों पत्थरों की चाल एवं उनके द्वारा नीचे पहुंचने में लिए गए समय क्या हैं ?



चित्र 6.18

6.30 किसी रुक्ष आनत तल पर रखा हुआ 1 kg द्रव्यमान का गुटका किसी 100 N m^{-1} स्प्रिंग नियतांक वाले स्प्रिंग से दिए गए चित्र 6.19 के अनुसार जुड़ा है । गुटके को स्प्रिंग की बिना खिंची स्थिति में, विरामावस्था से छोड़ा जाता है । गुटका विरामावस्था में आने से पहले आनत तल पर 10 cm नीचे खिसक जाता है । गुटके और आनत तल के मध्य घर्षण गुणांक ज्ञात कीजिए । मान लीजिए कि स्प्रिंग का द्रव्यमान उपेक्षणीय है और घिरनी घर्षणरहित है ।



चित्र 6.19

6.31 x-अक्ष के अनुदिश मुक्त रूप से गति कर सकने वाले 2 kg द्रव्यमान के कण का स्थितिज ऊर्जा फलन निम्न है :

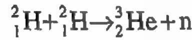
$$U(x)=\left(\frac{x}{b}\right)^4-5\left(\frac{x}{b}\right)^2 \text{ J}$$

जहां $b = 1$m है । इस विभव का आलेख खींचिए और इसके अंतिम बिंदुओं को निर्धारित कीजिए । इसके अतिरिक्त उन क्षेत्रों का अभिज्ञान करिए जहां कण पाया जा सकता है, और वहां इसकी अधिकतम चाल ज्ञात कीजिए जबकि कुल यांत्रिक ऊर्जा का मान दिया है (i) 36 J, (ii) – 4 J

6.32 0.3 kg द्रव्यमान का कोई बोल्ट 7 m s^{-1} की एकसमान चाल से नीचे आ रही किसी लिफ्ट की छत से गिरता है । यह लिफ्ट के फर्श से टकराता है (लिफ्ट की लंबाई = 3 m) और वापस नहीं लौटता है । टक्कर द्वारा कितनी ऊष्मा उत्पन्न हुई ? यदि लिफ्ट स्थिर होती तो क्या आपका उत्तर इससे भिन्न होता ?

6.33 200 kg द्रव्यमान की कोई ट्रॉली किसी घर्षणरहित पथ पर 36 km h^{-1} की एकसमान चाल से गतिमान है । 20 kg द्रव्यमान का कोई बच्चा ट्रॉली के एक सिरे से दूसरे सिरे तक (10 m दूर) ट्रॉली के सापेक्ष 4 m s^{-1} की चाल से ट्रॉली की गति की विपरीत दिशा में दौड़ता है और ट्रॉली से बाहर कूद जाता है । ट्रॉली की अंतिम चाल क्या है ? बच्चे के दौड़ना आरंभ करने के समय से ट्रॉली ने कितनी दूरी तय की ?

6.34 निम्नलिखित नाभिकीय संलयन अभिक्रिया में उत्सर्जित ऊर्जा की मात्रा का अनुमान लगाइए :

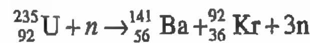


$${}^2_1\text{H}+{}^2_1\text{H}\rightarrow{}^3_2\text{He}+\text{n}$$

(${}^2_1$H : ड्यूटीरियम, ${}^3_2$He : हीलियम का समस्थानिक), दिया गया है

$M({}^3_2\text{He}) = 3.0160$ u, $M_n = 1.0087$ u, और $M({}^2_1\text{H}) = 2.0141$ u, जहां 1u = 1.661×10^{-27} kg है । अपने उत्तर को MeV में व्यक्त कीजिए ।

6.35 जब मंद गति न्यूट्रॉन, ${}^{235}_{92}$U वाले किसी लक्ष्य से संघट्ट करते हैं तो संभव (विखंडन) अभिक्रिया निम्न है :



$${}^{235}_{92}\text{U}+n\rightarrow{}^{141}_{56}\text{Ba}+{}^{92}_{36}\text{Kr}+3\text{n}$$

निम्नलिखित आंकड़ों का प्रयोग करते हुए निर्मुक्त ऊर्जा की मात्रा का आकलन कीजिए :

$M({}^{235}\text{U}) = 235.04$ u, $M({}^{141}\text{Ba}) = 140.91$u, $M({}^{92}\text{Kr}) = 91.926$ u, $M_n = 1.0087$ u

संलयन अभिक्रिया में निर्मुक्त ऊर्जा (प्रश्न 6.34) भारी नाभिक के विखंडन प्रक्रिया में निर्मुक्त ऊर्जा से काफी कम होती है। इसके बावजूद क्या कारण है कि हाइड्रोजन बम (नाभिकीय संलयन पर आधारित), परमाणु बम (नाभिकीय विखंडन पर आधारित) की अपेक्षा काफी अधिक शक्तिशाली होता है ?

6.36 नाभिक ^{57}Fe, 14.4 keV ऊर्जा की कोई γ- किरण उत्सर्जित करता है । यदि नाभिक का द्रव्यमान 56.935 u है तो नाभिक की प्रतिक्षेप ऊर्जा का परिकलन कीजिए । आप यह देखेंगे कि किसी नाभिक की प्रतिक्षेप ऊर्जा उसके द्रव्यमान की व्युत्क्रमानुपाती है । अब यदि ^{57}Fe जैसा कोई नाभिक किसी जालक (लैटिस) में अंतःस्थापित हो तो γ- उत्सर्जन के कारण प्रतिक्षेप संवेग को लगभग संपूर्ण क्रिस्टल द्वारा बांट लिया जाता है । इसके परिणामस्वरूप प्रतिक्षेप ऊर्जा काफी कम हो जाती है और क्षय की संपूर्ण ऊर्जा (प्रतिक्षेप के कारण बिना किसी हानि के) γ- किरण की ऊर्जा में रूपान्तरित हो जाती है । यह प्रतिक्षेपहीन उत्सर्जन का सिद्धांत है जो मॉसबौर स्पेक्ट्रम विज्ञान में प्रयोग किया जाता है जिसकी खोज सन् 1958 में हुई थी और अब यह उच्च विभेदन नाभिकीय स्पेक्ट्रमी अध्ययनों का एक महत्वपूर्ण साधन है ।

6.37 विवेचना कीजिए कि यदि हम गति को एक त्वरित निर्देश फ्रेम में मान लेते हैं तो कार्य-ऊर्जा प्रमेय किस प्रकार परिवर्तित होगी ?

निम्नलिखित दो प्रश्न गणक/परिकलक पर आधारित हैं :

6.38 2 kg का कोई कण मूल बिंदु से प्रारंभ करके धनात्मक x- अक्ष के अनुदिश गति करता है । इस पर आरोपित कुल बल (न्यूटन में) को 1 m के अंतराल पर मापा गया है जो क्रमशः इस प्रकार है : (27.9, 28.3, 30.9, 34.0, 34.5, 46.9, 48.2, 50.0, 63.5, 13.6, 12.2, 32.7, 46.6 और 27.0) N । इस अंतराल में कण पर कुल कितना कार्य किया गया है ?

6.39 0.5 kg द्रव्यमान का कोई कण किसी बल $F(x)$ के प्रभाव से x- अक्ष के अनुदिश $x = 5$ m से $x = 17.2$ m तक गति करता है, जबकि $F = \dfrac{200}{2x + x^3}$ N

इस विस्थापन के दौरान आरोपित बल द्वारा किए गए कार्य का (कम से कम 5% परिशुद्धता के साथ) अनुमान लगाइए ।

परिशिष्ट 6.1 गमन पाद में उपमुक्त शक्ति

नीचे दी गई सारणी में 60 kg द्रव्यमान के वयस्क मानव द्वारा विभिन्न दैनिक क्रियाकलापों में उपमुक्त शक्ति (लगभग) सूचीबद्ध की गई है ।

सारणी 6.4 कुछ क्रियाकलापों में उपमुक्त शक्ति (लगभग)

क्रियाकलाप	शक्ति (W)
शयन	75
मंद गति से सैर	200
साइकिल चलाते हुए	500
हृदय स्पंद	1.2

'यान्त्रिक कार्य का अर्थ दैनिक बोलचाल में प्रचलित शब्द 'कार्य' के अर्थ से भिन्न है । यदि कोई स्त्री सिर पर भारी बोझा लिए खड़ी है तो वह थक जाएगी परंतु इस प्रक्रिया में स्त्री ने कोई 'यांत्रिक कार्य' नहीं किया है । इसका अर्थ यह बिल्कुल नहीं है कि मानव द्वारा *साधारण कार्यकलापों में किए गए कार्य का आकलन कर पाना संभव* नहीं है ।

विचार कीजिए कि कोई व्यक्ति अचर चाल v_0 से पैदल सैर कर रहा है । उसके द्वारा किए गए यांत्रिक कार्य का आकलन, कार्य-ऊर्जा प्रमेय द्वारा सरलता से किया जा सकता है । मान लीजिए

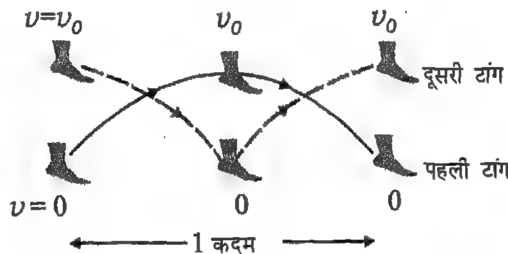
(i) गमन पाद (पैदल सैर) में किया गया मुख्य कार्य प्रत्येक कदम के साथ टांगों के त्वरण और मंदन का है (चित्र 6.10 देखिए) ।

(ii) वायु प्रतिरोध नगण्य है ।

(iii) टांगों को गुरुत्व बल के विरुद्ध उठाने में किया गया थोड़ा-सा कार्य नगण्य है ।

(iv) गमन पाद (सैर) में हाथों का हिलाना जो एक आम बात है, न के बराबर है ।

जैसा कि हम चित्र 6.10 में देख सकते हैं कि प्रत्येक कदम भरने में टांग विरामावस्था से किसी चाल $v = v_0$ (जो गमन पाद की चाल के लगभग समान है) तक लाई जाती है और फिर विरामावस्था में लाई जाती है ।



चित्र 6.10 गमन पाद में किसी एक लंबे डग (कदम) का निदर्शन जबकि एक टांग पृथ्वी की सतह से अधिकतम दूर और दूसरी टांग पृथ्वी पर है और विलोमतः ।

अतः कार्य-ऊर्जा प्रमेय से प्रत्येक लंबा डग (कदम) भरने में प्रत्येक टांग द्वारा किया गया कार्य $m_l v_0^2$ होगा । यहां m_l टांग की मांसपेशियों द्वारा पैर को विरामावस्था से चाल v_0 तक लाने में व्यय की गई ऊर्जा $m_l v_0^2/2$ है जबकि पूरक टांग की मांसपेशियों द्वारा दूसरे पैर को चाल v_0 से विरामावस्था में लाने में व्यय की गई अतिरिक्त ऊर्जा $m_l v_0^2/2$ है । अतः दोनों टांगों द्वारा एक कदम भरने में किया गया कार्य है (चित्र 6.10 का सावधानीपूर्वक अध्ययन करें)

$$W_s = 2m_l v_0^2 \qquad (6.34)$$

मान लीजिए $m_l = 10$ kg और धीमी गति से 9 मिनट में 1 मील दौड़ना, अर्थात् SI मात्रक में, $v_0 = 3$ m s^{-1}। अतः

$$W_s = 180 \text{ जूल/कदम}$$

यदि हम एक कदम में तय किए गए पथ की लंबाई 2 m लेते हैं तब कोई व्यक्ति 3 m s^{-1} की चाल से 1.5 कदम प्रति सेकंड भरता है । इस प्रकार व्यय शक्ति

$$P = 180 \frac{\text{जूल}}{\text{कदम}} \times 1.5 \text{ कदम/सेकंड}$$
$$= 270 \text{ W}$$

यहां हमें ध्यान रखना चाहिए कि व्यय शक्ति का आकलन वास्तविक मान से काफी कम है क्योंकि इस विधि में शक्ति-हानि के विभिन्न कारकों जैसे हाथों का हिलना, वायु प्रतिरोध आदि, की उपेक्षा कर दी गई है । इसके अतिरिक्त एक दिलचस्प बात यह है कि हमने अपेक्षित विभिन्न बलों को भी गणना में कोई महत्त्व नहीं दिया है । बलों में से मुख्यतः घर्षण बल और शरीर की अन्य मांसपेशियों द्वारा टांग पर लगने वाले बलों का आकलन कर पाना कठिन है । घर्षण यहां 'कोई' कार्य नहीं करता है और हम कार्य-ऊर्जा प्रमेय का प्रयोग करके मांसपेशियों द्वारा किए गए 'कार्य' के आकलन के अत्यंत कठिन कार्य से बाहर निकल आए। इसी प्रकार, हम पहिये के लाभ भी देख सकते हैं । पहिया मानव को बिना किसी शुरुआत और विराम के निर्विघ्न गति प्रदान करता है ।

अध्याय 7

कणों के निकाय तथा घूर्णी गति

7.1 भूमिका

पिछले अध्यायों में हमने अध्ययन तो आदर्श बिंदु कणों के विषय में किया था तथापि अध्ययन से प्राप्त परिणामों को परिमित आकार के पिण्डों पर भी लागू कर दिया था । दैनिक जीवन में, जितने भी पिण्ड हमारे संपर्क में आते हैं, गणितीय दृष्टिकोण से उनमें से कोई भी 'बिंदु' नहीं होता । हम जानते हैं कि कोई पिण्ड कई भागों से मिलकर बनता है, अतः स्वाभाविक रूप से हम निम्नलिखित प्रश्नों को पूछ सकते हैं । किसी पिण्ड के साथ 'बिंदु कण' की भांति व्यवहार करना कब उचित होता है ? जब किसी पिण्ड का केवल कुछ ही भाग बाह्य बल का अनुभव करता है, तब वे कौन-से बल हैं जो उस पिण्ड के विभिन्न भाग एक-दूसरे पर आरोपित करते हैं ? जब हम स्थिति, वेग तथा त्वरण जैसी अवधारणाओं का उपयोग करते हैं, तब क्या हमें अपने मस्तिष्क में यह विचार नहीं रखना चाहिए कि एक ही पिण्ड के लिए इनके मान पिण्ड के विभिन्न भागों के लिए भिन्न-भिन्न हो सकते हैं ?

इस अध्याय में हम कुछ इसी प्रकार के प्रश्नों का उत्तर देने का प्रयास करेंगे । आरंभ में हम अपने दैनिक जीवन का एक सरल उदाहरण, जैसे किसी 'किवाड़ को खोलना' लेते हैं । इस प्रकरण में हम किवाड़ में लगे हैंडिल पर बाह्य बल आरोपित करते हैं । वास्तव में, बल लगाने पर हैंडिल उखड़कर हमारे हाथ में नहीं आता, क्योंकि उस पर किवाड़ के शेष भागों द्वारा लगाए गए बल भी कार्यरत रहते हैं । इसी प्रकार किवाड़ पर उन कब्जों द्वारा लगाए गए बल भी कार्य करते हैं जो उस किवाड़ को भवन के शेष भाग से जोड़े रखते हैं । यद्यपि किवाड़ के विभिन्न भागों पर ये बल कार्यरत रहते हैं, फिर भी किवाड़ की आकृति अपरिवर्तित रहती है, क्योंकि बाह्य बल आरोपित होने पर किवाड़ में आंतरिक बल भी कार्य करना आरंभ कर देता है । ऐसा पिण्ड जो बाह्य बल की उपस्थिति में अपनी आकृति बनाए रखता है 'दृढ़ पिण्ड' कहलाता है । इस अध्याय के अधिकांश भागों में हम इसी प्रकार के दृढ़ पिण्डों के विषय में अध्ययन करेंगे । किवाड़ जैसे पिण्डों की गतियां, एक ही पिण्ड के विभिन्न भागों के भिन्न-भिन्न त्वरण होने के कारण, देखने में तो जटिल प्रतीत हो सकती हैं, परंतु याद रखिए, किसी दृढ़ पिण्ड के विभिन्न भागों की गतियां एक-दूसरे से कभी स्वतंत्र नहीं होतीं। वास्तव में हम यह देखेंगे कि दृढ़ पिण्ड मात्र दो प्रकार की गतियां ही कार्यान्वित कर सकते हैं। ये बिना मुड़े अपनी स्थिति में परिवर्तन कर सकते हैं जिसे हम 'विस्थापन' अथवा रैखिक गति कहते हैं । दूसरे प्रकार की गति किसी अक्ष के परितः घूर्णन करना है । इन दोनों गतियों में ही पिण्ड अपनी आकृति में कोई परिवर्तन नहीं करता।

पिण्ड के कणों के सभी युग्मों के बीच की दूरियां अपरिवर्तित रहती हैं । अतः इस प्रकार के दृढ़ पिण्डों में हमें केवल दो बातों को ही समझना आवश्यक होता है – दृढ़ पिण्ड पर कार्यरत किसी बाह्य बल के कारण उस पिण्ड में उत्पन्न विस्थापन तथा घूर्णन । यह उस प्रकरण की तुलना में एक सरल कार्य है जिसमें हम किसी दृढ़ पिण्ड के ऐसे सभी भागों जो एक-दूसरे पर बल आरोपित करते हैं, की पृथक्-पृथक् गतियों को समझने का प्रयास करते हैं ।

इस अध्याय में हम कणों के ऐसे निकायों पर भी विचार करेंगे जो दृढ़ पिण्ड नहीं हैं । उदाहरण के लिए, पृथ्वी-चंद्रमा निकाय जिसमें दो पिण्ड होते हैं जो परस्पर एक-दूसरे पर बल आरोपित करते हैं तथा जिनके बीच की दूरी भी परिवर्तित होती है (यद्यपि दूरी में यह परिवर्तन अत्यधिक नहीं है) । ऐसी परिस्थितियों में हम यह देखेंगे कि इस प्रकार के कणों के निकाय के कुछ गुणों का परिकलन किया जा सकता है, जो उस निकाय की गति को समझने में हमारे लिए अत्यंत लाभकारी होते हैं । ऊर्जा तथा संवेग से हम सभी भलीभांति परिचित हैं परंतु इस अध्याय में हमारा संपर्क एक अन्य महत्त्वपूर्ण गुण से होगा जो किसी निकाय की समस्त घूर्णी गति की माप होता है । इसे 'कोणीय संवेग' कहते हैं ।

7.2 घूर्णी संतुलन तथा आघूर्ण का सिद्धांत

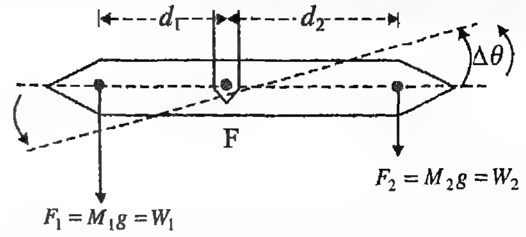
शब्द 'संतुलन' (equilibrium) लैटिन भाषा के शब्द 'Libra', जिसका अर्थ 'तुला' है, से संबंधित है । सामान्य तुला से तो हम सभी भलीभांति परिचित हैं जिसमें कोई दण्ड किसी निश्चित बिंदु के परितः घूमता है । इस निश्चित बिंदु के दोनों ओर समान दूरियों पर दण्ड पर दो पिण्ड (अपने भारों के कारण) अधोमुखी बल आरोपित करते हैं । प्राचीन काल से ही तुला का उपयोग करने वाले यह जानते हैं कि जब तुला किसी भी दिशा में नहीं घूमती, तब दोनों बल बराबर होते हैं । सभी सभ्यताओं द्वारा व्यापार में इसी तथ्य का उपयोग होता रहा है ।

जहां तक हमें ज्ञात है यूनान देश के वैज्ञानिक आर्कीमिडीज़ ने यह प्रश्न पूछा तथा इसका उत्तर भी दिया "क्या होता है जब ये दो दूरियां असमान होती हैं ?" (चित्र 7.1 में इन दूरियों को d_1 तथा d_2 द्वारा दर्शाया गया है) । प्राथमिक विज्ञान पाठ्यक्रमों में यही सीखते हैं, कि दण्ड पर लगे दो पिण्ड संतुलन की अवस्था में होते हैं अर्थात् आलंब F के परितः इनका कोई घूर्णन नहीं होता जबकि इनके भार W_1 तथा W_2 शर्त $W_1d_1 = W_2d_2$ का पालन करते हैं । इसे कभी-कभी "उत्तोलक का सिद्धांत" भी कहते हैं :

भार × भारभुजा = आयास × आयास भुजा

$$W_1d_1 = W_2d_2$$

अब हम अध्याय 6 में वर्णित 'स्थितिज ऊर्जा' की अवधारणा का उपयोग उत्तोलक के सिद्धांत को समझने में करेंगे । आइए, हम यह कल्पना करते हैं कि उत्तोलक वामावर्त दिशा में किसी छोटे कोण $\Delta\theta$ से घूमता है (चित्र 7.1) । द्रव्यमान M_2 ऊपर की ओर $d_2\Delta\theta$ दूरी तक जाता है तथा द्रव्यमान M_1 नीचे की ओर



चित्र 7.1 असमान बलों के साथ असमान भुजाओं वाले उत्तोलक का संतुलन ।

$d_1\,\Delta\theta$ दूरी तक जाते हैं । इस प्रकार दोनों द्रव्यमानों की कुल स्थितिज ऊर्जा V में होने वाला परिवर्तन,

$$V_{final} - V_{Initial} = \Delta V = -M_1gd_1\Delta\theta + M_2gd_2\Delta\theta$$

$$= (F_2d_2 - F_1d_1)\Delta\theta \qquad (7.1)$$

मान लीजिए $M_1gd_1 > M_2gd_2$ अर्थात् बाईं ओर का पिण्ड अपेक्षाकृत भारी है । तब हम $\Delta\theta$ के धनात्मक मान के साथ अर्थात् वामावर्त घूर्णन द्वारा, स्थितिज ऊर्जा को कम कर सकते हैं । इसी प्रकार, यदि $M_1gd_1 < M_2gd_2$ है, तो दक्षिणावर्त घूर्णन स्थितिज ऊर्जा को कम कर देता है । उस प्रकरण में जिसमें $d_1 = d_2$ होता है, उपरोक्त निकाय किसी साधारण तुला के तुल्य हो जाता है । उसमें अधिक द्रव्यमान का पिण्ड नीचे की ओर गति करता है । केवल उस प्रकरण में, जब $M_2gd_2 = M_1gd_1$ होता है, तब स्थितिज ऊर्जा में होने वाला परिवर्तन $\Delta\theta$ के आनुपातिक नहीं होता । संतुलन की स्थिति में यह सत्य होता है । उन प्रकरणों में भी, जिनमें बल गुरुत्वाकर्षण के कारण नहीं होते, हम संतुलन के लिए समान शर्त का पालन करते हैं, तथा इसे इस रूप में लिखते हैं:

$$F_1d_1 = F_2d_2 \qquad (7.2)$$

ध्यान दीजिए कि घूर्णी संतुलन की अवस्था में दो राशियों का गुणनफल सम्मिलित है : (i) बल तथा (ii) बल की क्रिया रेखा के उस निश्चित बिंदु जिसके परितः पिण्ड घूर्णन करता है, से लंबवत् दूरी । राशियां F_1d_1 तथा F_2d_2 जिनसे हमने आपका अभी परिचय कराया है, इतनी अधिक महत्त्वपूर्ण हैं कि इनको एक विशेष नाम तथा विधिवत् परिभाषा दी गई है ।

ये राशियां बलों F_1 तथा F_2 की आलंब F के परितः घूर्णन की प्रवृत्तियों को निर्दिष्ट करती हैं (चित्र 7.1) । आरोपित बल तथा इस बल की क्रिया रेखा के उस बिंदु, जिसके परितः पिण्ड घूर्णन करने के लिए स्वतंत्र है, से लंबवत् दूरी का गुणनफल, इस बिंदु के परितः **बल आघूर्ण** कहलाता है । यदि किसी बल की घूर्णन की प्रवृत्ति वामावर्त है, तो इस प्रवृत्ति (अर्थात् बल आघूर्ण) को धनात्मक माना जाता है । इसके विपरीत दक्षिणावर्त बल आघूर्ण को ऋणात्मक माना जाता है ।

ध्यान देने योग्य बात यह है कि दक्षिणावर्त अथवा वामावर्त को परिभाषित करते समय हमें वह पार्श्व निश्चित करना होता है जिधर से हमें आरोपित बलों को देखना है । व्यापक रूप में,

कोई पिण्ड रैखिक एवं घूर्णी दोनों गतियां कर सकता है। संतुलन के लिए दो शर्तों की संतुष्टि होना आवश्यक है : (i) रैखिक संतुलन के लिए पिण्ड पर कार्यरत सभी बलों का बीजगणितीय योग शून्य होना चाहिए, तथा (ii) घूर्णी संतुलन के लिए संदर्भ बिंदु के परित: पिण्ड पर कार्यरत सभी बलों के बल-आघूर्णों का बीजगणितीय योग शून्य होना चाहिए। ऊपर दी गई बल आघूर्ण की परिभाषा को हम "किसी बिंदु के परित: बल द्वारा आरोपित ऐंठन (बल आघूर्ण)" भी कह सकते हैं तथा इसे प्रतीक τ से दर्शाते हैं।

आइए, अब हम ऐसे दो बलों के विषय में विचार करते हैं जो परिमाण में बराबर, परंतु दिशाओं में विपरीत हैं तथा किसी पिण्ड पर साथ-साथ कार्य कर रहे हैं। यदि इन दोनों बलों की क्रिया रेखा समान है तो उस पिण्ड पर कार्यरत नेट बल शून्य है। इस अवस्था में यह पिण्ड रैखिक संतुलन में होगा। इसके विपरीत, यदि बलों के इस युगल (युग्म) की क्रिया रेखाएं समान नहीं हैं तो पिण्ड केवल घूर्णी गति करेगा, उसमें कोई रैखिक गति नहीं होगी। बलों के ऐसे युग्म को 'बलयुग्म' कहते हैं। ***कोई बलयुग्म किसी पिण्ड पर कोई नेट बल आरोपित नहीं करता, तथापि यह एक बल आघूर्ण (ऐंठन) आरोपित करता है।*** किसी बलयुग्म का आघूर्ण उस बलयुग्म के किसी एक बल तथा दोनों बलों की क्रिया रेखाओं के बीच की लंबवत् दूरी, जिसे 'बलयुग्म की भुजा' कहते हैं, के गुणनफल के बराबर होता है। किसी बलयुग्म का एक रोचक गुण यह है कि इसका बल आघूर्ण (ऐंठन) आलंब की स्थिति पर निर्भर नहीं करता।

हम यह भी देख सकते हैं कि जब दण्ड (चित्र 7.1) संतुलन में नहीं होता, तब बल आघूर्ण अथवा ऐंठन का एक सरल भौतिक अर्थ होता है। बलों द्वारा दण्ड पर किया गया कार्य निम्न होता है:

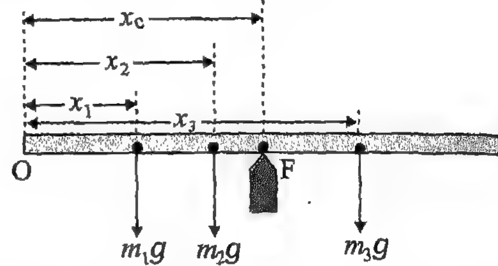
$$\Delta W = M_1 g d_1 \Delta\theta - M_2 g d_2 \Delta\theta = (F_1 d_1 - F_2 d_2)\Delta\theta \quad (7.3)$$

ध्यान दीजिए, $\Delta W = -\Delta V$। बाह्य बलों द्वारा दोनों पिण्डों (द्रव्यमानों) पर जो भी कार्य किया जाता है, अपनी स्थितिज ऊर्जा में कमी के रूप में स्वयं प्रदर्शित हो जाता है। समीकरण (7.3) किसी एकल कण के लिए समीकरण "ΔW= बल × विस्थापन" के तुल्य रूप है। यदि बलों का कोई निकाय किसी पिण्ड पर, जो किसी बिंदु के परित: कोण $\Delta\theta$ द्वारा घूर्णन कर रहा है, कार्यरत है, तब हम यह देखते हैं कि

ΔW = किसी दृढ़ पिण्ड की घूर्णन गति में किया गया कार्य
= बलों के आघूर्णों का बीजगणितीय योग × $\Delta\theta$
= कुल ऐंठन × कोणीय विस्थापन

इस प्रकार घूर्णी गति में, "बल आघूर्ण (ऐंठन) द्वारा किया गया कार्य बल आघूर्ण (ऐंठन) तथा कोणीय विस्थापन के गुणनफल के बराबर होता है"।

अब हम आघूर्णों के नियम का प्रयोग किसी हल्के (आदर्श रूप से द्रव्यमानरहित) दण्ड पर करते हैं जिस पर m_1, m_2...आदि N द्रव्यमान (दण्ड के किसी मूल बिंदु O के सापेक्ष) x_1, x_2... आदि स्थितियों पर अवस्थित हैं। मान लीजिए आलंब (एक निश्चित बिंदु जिसके परित: दण्ड स्वतंत्रतापूर्वक घूर्णन गति करता है।) की स्थिति x_c है जिस पर दण्ड घूर्णी संतुलन में है। इसका अर्थ यह हुआ कि यदि दण्ड को x_c पर टिकाएं (चित्र 7.2), तो वह संतुलन की स्थिति में होगा।



चित्र 7.2 *x_c पर टिके किसी हल्के दण्ड का संतुलन जिस पर m_1, m_2... आदि कई द्रव्यमान x_1, x_2... आदि स्थितियों पर लटके हुए हैं।*

चूंकि दण्ड आलंब के परित: संतुलन में है, अत: आलंब के परित: आघूर्णों का योग शून्य के बराबर है। अत:

$$m_1 g\,(x_1 - x_c) + m_2 g\,(x_2 - x_c) + \dots + m_N g\,(x_N - x_c) = 0$$

$$x_c \sum m_i = \sum m_i x_i; \quad x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$$

यह विशेष बिंदु जिस पर द्रव्यमानों के निकाय को संतुलित किया जा सकता है, निकाय का 'गुरुत्व केंद्र' कहलाता है। उदाहरणार्थ, दो समान द्रव्यमानों, m, के लिए हमें समीकरण (7.4) से गुरुत्व केंद्र की स्थिति x_c प्राप्त होती है :

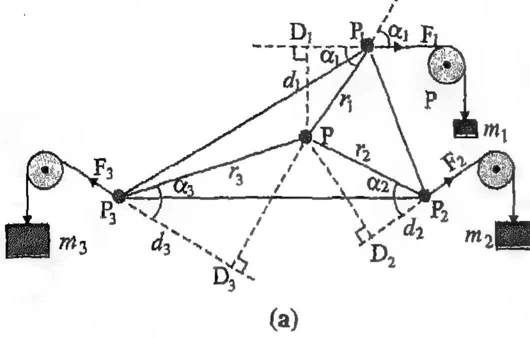
$$x_c = \frac{m x_1 + m x_2}{m + m} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

यह एक सुप्रसिद्ध तथा सहज बोध परिणाम है कि "किसी हल्के (आदर्श रूप से द्रव्यमानरहित) दण्ड पर लटका दो समान द्रव्यमानों का युगल अपने मध्य बिंदु पर संतुलित होगा"।

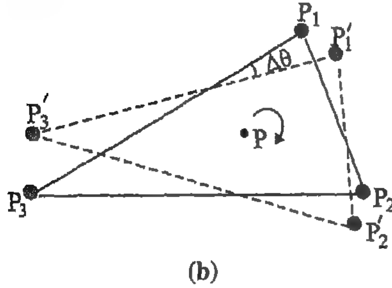
अब तक हमने केवल उन्हीं बलों पर विचार किया जो एक दूसरे के समान्तर थे, क्योंकि वे सभी गुरुत्व बल के कारण थे। परंतु ऐसी प्रायोगिक व्यवस्था भी संभव है जिसमें किसी दृढ़ पिण्ड पर बाटों के प्रयोग द्वारा, उसके विभिन्न बिंदुओं पर विभिन्न दिशाओं में बल आरोपित किए जा सकते हैं। चित्र 7.3 में एक हल्का (द्रव्यमानरहित) त्रिभुजाकार पटल दर्शाया गया है जो बिंदु P पर धुराग्र है तथा ऊर्ध्वाधर तल में घूर्णन करने के लिए स्वतंत्र है। इसके तीनों शीर्षों पर कार्यरत तीन बलों F_1, F_2 तथा F_3 को जिन्हें घिरनियों से गुजरने वाली ऐसी डोरियों द्वारा जिनके सिरों पर तीन बाट बँधे हैं द्वारा, सामान्य दिशाओं में आरोपित किया गया है। इस प्रकरण में भी हमारी घूर्णी संतुलन की शर्त ज्ञात करने की सामान्य विधि भलीभांति कार्य करती है। एक

लघु विस्थापन $\Delta\theta$ की कल्पना कीजिए। अब हम पिण्ड पर कार्यरत बाह्य बलों द्वारा किए गए कार्य का परिकलन करते हैं। चित्र 7.3 की ज्यामिती से यह स्पष्ट है कि P_1 पर कार्यरत बल द्वारा किया गया कार्य

$$\Delta W_1 = F_1\Delta\theta \times r_1 \sin\alpha_1 = F_1 d_1 \Delta\theta = T_1\Delta\theta$$



(a)



(b)

चित्र 7.3 (a) बिंदु P पर धुराग्र ऊर्ध्वाधर तल में घूर्णन के लिए स्वतंत्र कोई हल्का (द्रव्यमानरहित) त्रिभुजाकार पटल $P_1P_2P_3$। पटल के तीन शीर्षों P_1P_2 तथा P_3 पर क्रमशः तीन बल F_1, F_2 तथा F_3 कार्यरत हैं। ध्यान दीजिए, यहां $PP_1 = r_1$, $PP_2 = r_2$ तथा $PP_3 = r_3$; $P_1D_1 = d_1$, $P_2D_2 = d_2$ तथा $P_3D_3 = d_3$ है। (b) पटल को धुराग्र बिंदु P के परितः किसी लघु कोण $\Delta\theta$ पर घुमाया गया है।

स्पष्ट रूप से पिछला व्यंजक "ऐंठन (बल आघूर्ण) × कोणीय विस्थापन" के रूप में है। जैसे ही पटल घूमता है, हमें उस पटल के तीनों शीर्षों पर आरोपित तीनों बलों द्वारा किए कार्यों को जोड़ना चाहिए। चूंकि पिण्ड 'दृढ़ पिण्ड' है, अतः इसके सभी कणों के कोणीय विस्थापन समान होंगे। इन बलों द्वारा किया गया कुल कार्य,

$$\Delta W = \Delta\theta \sum_{i=1}^{3} F_i r_i \sin\alpha_i = \sum_{i=1}^{3} F_i d_i \Delta\theta = \sum_{i=1}^{3} T_i \Delta\theta$$

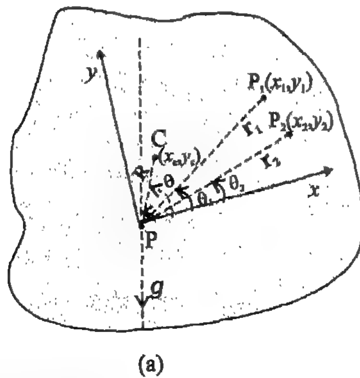
$$\Delta W = \Delta\theta \sum_{i=1}^{3} F_i r_i \sin\alpha_i$$

बलों द्वारा किया गया कार्य, ΔW, घिरनियों से होकर लटके द्रव्यमानों, जिनके द्वारा बल आरोपित होता है, की स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन, $-\Delta V$, के बराबर है। संतुलन की यह शर्त है कि स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन शून्य होना चाहिए, अर्थात्, $\Delta V = 0$। इसका अर्थ यह है कि पिण्ड के विभिन्न भागों पर कार्यरत सभी बलों के बल आघूर्णों का योग शून्य होना चाहिए। अतः घूर्णी संतुलन के लिए

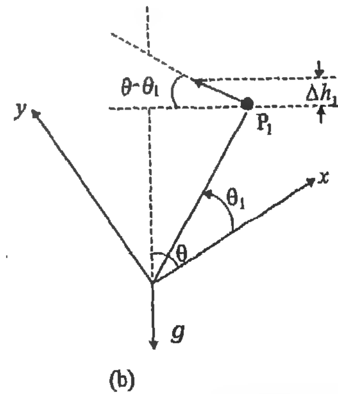
$$\sum F_i d_i = \sum T_i = 0$$

7.3 गुरुत्व केंद्र

हमने अभी गुरुत्व केंद्र के एक अत्यंत सरल उदाहरण (किसी दृढ़ छड़ पर एक साथ लटके द्रव्यमान) पर विचार किया। परंतु गुरुत्व केंद्र के बोध को किसी अनियमित आकृति के पिण्ड पर भी अनुप्रयुक्त किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, अनियमित आकृति के किसी पटल (गत्ते के टुकड़े) पर विचार कीजिए। यदि कोई आलपिन इस टुकड़े में क्षैतिजतः इस प्रकार धँसाएं कि यह टुकड़ा आलपिन के परितः ऊर्ध्वाधर तल में घूर्णन कर सके। तब हम यह पाएंगे कि गत्ते पर पिन की केवल एक ही 'विशेष अवस्थिति' है, जिस पर इसे किसी भी दिक्विन्यास में संतुलित किया जा सकता है। इस विशेष बिंदु को **गुरुत्व केंद्र** कहते हैं (चित्र 7.4a)।



(a)



(b)

चित्र 7.4 (a) $\Delta\theta$ घूर्णन के अधीन किसी प्ररूपी द्रव्यमान m_1 की गति। (a) अपने भार के अंतर्गत किसी निश्चित बिंदु C के परितः घूर्णन करने के लिए स्वतंत्र कोई समतली पिण्ड। यदि C गुरुत्व केंद्र है, तो यह पिण्ड हर स्थिति में संतुलन में है। (b) किसी धुराग्र के परितः घूर्णन करने के लिए स्वतंत्र कोई दृढ़ पिण्ड।

अब हम किसी ऐसे दृढ़ पिण्ड के घूर्णी संतुलन पर विचार करेंगे। जो ऊर्ध्वाधर तल में अवस्थित बिंदुओं P_1, P_2, P_3 आदि पर अवस्थित द्रव्यमान m_1, m_2, m_3... से मिलकर बना है। मान लीजिए यह पिण्ड किसी बिंदु P के परितः घूर्णन करने के लिए स्वतंत्र है। इस बिंदु, जिसके निर्देशांक (0,0) हैं, को हम मूल-बिंदु के रूप में चुनते हैं। P_1, P_2 आदि बिंदुओं के निर्देशांक (x_1, y_1), (x_2, y_2) आदि हैं। इसकी ज्यामिति चित्र 7.4b में दर्शाई गई है। इन बिंदुओं की बिंदु P से दूरियां क्रमशः $r_1, r_2......r_n$ हैं।

x-अक्ष से PP_1, PP_2 आदि द्वारा बनाए गए कोणों को θ_1, θ_2...... आदि द्वारा व्यक्त करते हैं। चित्र 7.4(b) में दिखाई गई ज्यामिति में, हम यह देखते हैं कि $x_1 = r_1 \cos\theta_1, y_1 = r_1 \sin\theta_1$.... आदि। हमने पिण्ड में किसी सामान्य दिशा में x- तथा y- अक्षों को चुना है। गुरुत्वीय त्वरण g की दिशा x- अक्ष से θ कोण बनाते हुए दर्शाई गई है।

हम पहले स्थितिज ऊर्जा का परिकलन करते हैं। हम गुरुत्वीय विभव का शून्य मूल बिंदु P पर चुनते हैं। तब द्रव्यमान m_1 की स्थितिज ऊर्जा $m_1 g h_1$ है, यहां h_1 बिंदु P_1 की P से ऊंचाई है। चित्र 7.4(b) से

$$h_1 = r_1 \cos(\theta - \theta_1)$$
$$= \cos\theta_x r_1 \cos\theta_1 + \sin\theta_x r_1 \sin\theta_1$$
$$= x_1 \cos\theta + y_1 \sin\theta$$

समस्त पिण्ड की स्थितिज ऊर्जा V सभी कणों के इसी प्रकार के व्यंजकों को जोड़कर प्राप्त की जा सकती है। अतः

$$V = g \cos\theta \sum m_i x_i + g \sin\theta \sum m_i y_i$$

अब हम दो राशियों x_c तथा y_c को परिभाषित करते हैं, जो कि हमारे द्वारा पहले किसी दण्ड पर स्थित किसी कण के गुरुत्व केंद्र को परिभाषित (समीकरण 7.4) करने के समान ही हैं।

$$x_i \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \qquad y_i \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} \qquad (7.5)$$

समीकरण (7.5) द्वारा परिभाषित बिंदु $C(x_i, y_i)$ को हम अपने समतल (जो कि द्रव्यमान बिंदुओं $P_1, P_2 .... P_N$ का कोई दो-विमीय संचयन है।) का गुरुत्व केंद्र कहते हैं। हम दूरी $PC = R$ तथा x अक्ष से PC द्वारा बनाए गए कोण को α द्वारा व्यक्त करते हैं। चित्र से $x_c = R\cos\alpha$ तथा $y_c = R\sin\alpha$। पिण्ड की स्थितिज ऊर्जा को अब हम गुरुत्व केंद्र तथा कुल द्रव्यमान $M = \Sigma\, m_i$ के पदों में व्यक्त कर सकते हैं,

$$V = Mg\,(x_c \cos\theta + y_c \sin\theta)$$
$$= Mg\,R\cos(\theta - \alpha)$$
$$= Mgh_c \qquad (7.6)$$

हमने यहां पर मूल बिंदु से गुरुत्व केंद्र की ऊंचाई को प्रतीक h_c द्वारा व्यक्त किया है। यहां हम यह पाते हैं कि यह स्थितिज ऊर्जा गुरुत्व केंद्र $C = (x_c, y_c)$ पर अवस्थित द्रव्यमान M के किसी एकल कण की स्थितिज ऊर्जा के समान ही है। यह एक अत्यन्त उपयोगी परिणाम है। यदि हम किसी एकसमान गुरुत्वीय क्षेत्र (जैसे पृथ्वी के निकट) में किसी जटिल पिण्ड की स्थितिज ऊर्जा के विषय में जानना चाहते हैं, तो हमें केवल उसके गुरुत्व केंद्र की ऊंचाई की जानकारी ही काफी होती है। हमें पृथक्-पृथक् कणों के बारे में विचार करने की कोई आवश्यकता नहीं होती है। अब हम, बिंदु P के परितः घूर्णन करते हुए इस पिण्ड के घूर्णी संतुलन का परीक्षण करेंगे। पहले हम बिंदु P को पिण्ड के गुरुत्व केंद्र C पर चुनते हैं। तब जैसे ही हम इस पिण्ड को घुमाते हैं तो, गुरुत्व केंद्र स्थिर रहता है तथा स्थितिज ऊर्जा में कोई परिवर्तन नहीं होता। अतः हमें इस पिण्ड को घूर्णन कराने में कोई कार्य करना नहीं पड़ता। इससे यह परिणाम निकलता है कि जब हम किसी पिण्ड को उसके गुरुत्व केंद्र के परितः घूर्णन कराते हैं तब वह पिण्ड घूर्णी संतुलन में होता है। अब हम इसी प्रश्न की जांच गणितीय रीति द्वारा, उसी विधि का उपयोग करके करते हैं जैसे कि हमने उत्तोलक में प्रयोग किया था। अर्थात्, बिंदु P के परितः पिण्ड को एक लघु कोण $\Delta\theta$ का घूर्णन देकर हम m_1, m_2.... आदि द्रव्यमानों के समस्त समुच्चय की स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन का परिकलन करते हैं। स्पष्टता के लिए हम चित्र 7.4b में केवल एकल द्रव्यमान का घूर्णन दर्शाते हैं। हम देखते हैं कि द्रव्यमान m_1 की ऊंचाई में हुई वृद्धि

$$\Delta h_1 = r_1 \Delta\theta \sin(\theta - \theta_1)$$
$$= \Delta\theta\,(r \sin\theta \cos\theta_1 - r_1 \cos\theta \sin\theta_1)$$

अन्य द्रव्यमानों पर भी इसी प्रकार के संबंध लागू होते हैं। समस्त पिण्ड की स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन प्राप्त करने के लिए, हम दोनों ओर m तथा g से गुणा करते हैं तथा सभी कणों के लिए प्राप्त परिणामों का योग करते हैं

$$\Delta V = g\,\Delta\theta\,[\sin\theta\,\Sigma\, m_i x_i - \cos\theta\,\Sigma\, m_i y_i]$$

घूर्णी संतुलन की यह शर्त पूर्ववत् ही बनी रहती है कि स्थितिज ऊर्जा, जो कि $\Delta\theta$ के समानुपाती है, के मान में कोई परिवर्तन नहीं होता। अतः

$$\Delta V = g\,\Delta\theta\,[\sin\theta\,\Sigma\, m_i x_i - \cos\theta\,\Sigma\, m_i y_i] = 0$$

अथवा $\sin\theta\,\Sigma\, m_i x_i = \cos\theta\,\Sigma\, m_i y_i$ (7.6a)

समीकरण (7.5) का अनुसरण करने पर

$$\Sigma m_i x_i = mx_c \text{ तथा } \Sigma m_i y_i = My_c$$

अतः $M\,x_c \sin\theta - M\,y_c \cos\theta = 0$

अथवा $M\,(x_c \sin\theta - y_c \cos\theta) = 0$ (7.6b)

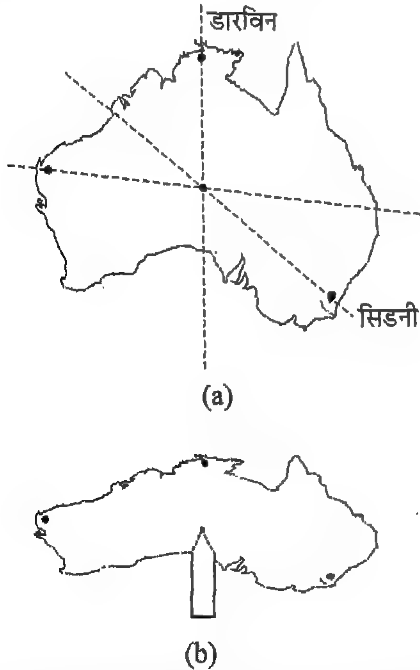
अब $x_c = R\cos\alpha$ तथा $y_c = R\sin\alpha$ समीकरण (7.6b) में रखने पर,

$$M\,[R\cos\alpha\,\sin\theta - R\sin\alpha\cos\theta] = 0$$

अथवा $MR\sin(\theta-\alpha)=0$

यदि $R \neq 0$ (अर्थात् घूर्णन बिंदु गुरुत्व केंद्र नहीं है), तब हमें संतुलन तभी प्राप्त होता है जब $\alpha=\theta$ अथवा $\alpha=\theta+\pi$ हो। इसका अर्थ यह हुआ कि गुरुत्व केंद्र टेक (support) बिंदु के पूर्णतया नीचे अथवा पूर्णतया ऊपर अवस्थित हो। पहले प्रकरण, $\alpha=\theta$, में स्थितिज ऊर्जा V अधिकतम (V के लिए समीकरण (7.6) से) है, अतः संतुलन अस्थायी है। घूर्णन द्वारा (ताकि गुरुत्व केंद्र बिंदु P के नीचे आ जाए) पिण्ड अपनी स्थितिज ऊर्जा घटा सकता है तथा स्थायी संतुलन की स्थिति $\alpha=\theta+\pi$ में पहुंच सकता है। जब कोई पिण्ड संतुलन की इस स्थिति में होता है, तब गुरुत्व केंद्र टेक बिंदु के पूर्णतया नीचे होता है।

▶ ***उदाहरण 7.1*** आस्ट्रेलिया के मानचित्र का गुरुत्व केंद्र ज्ञात कीजिए।



चित्र 7.5 किसी अनियमित समतली पिण्ड का गुरुत्व केंद्र ज्ञात करने की दो विधियां (a) दो भिन्न बिंदुओं से निलंबित करके (b) एक बिंदु पर संतुलित करके।

हल आस्ट्रेलिया के मानचित्र की गत्ते की आकृति काटिए। पहले इस पर डारविन के निकट एक छिद्र बनाइए और इस छिद्र से मानचित्र को निलंबित कीजिए। जब यह संतुलन में आ जाए तो टेक से गत्ते पर एक ऊर्ध्वाधर रेखा खींचिए। हमारी चर्चा के अनुसार गुरुत्व केंद्र इस रेखा पर अवस्थित होना चाहिए। अब दूसरा छिद्र किसी अन्य स्थान, जैसे सिडनी, पर बनाकर उपरोक्त क्रियाकलाप दोहराइए। गत्ते पर खींची गई दो रेखाओं का प्रतिच्छेदन बिंदु गुरुत्व केंद्र (CG) प्रदान करता है (चित्र 7.5a)। गुरुत्व केंद्र की जांच आप इस मानचित्र (गत्ते) को किसी तीसरे बिंदु से निलंबित करके तथा तीसरी रेखा खींचकर जो CG से ही गुजरेगी, कर सकते हैं। ◀

अभी हमने किसी पिण्ड के विभिन्न भागों पर, उसके अपने भार के अधीन, घूर्णी संतुलन पर विचार करते हुए, गुरुत्व केंद्र की संकल्पना से आपका परिचय कराया है। चूंकि गुरुत्व केंद्र (CG) के निर्देशांकों के व्यंजक केवल पिण्डों के द्रव्यमानों तथा उनकी ज्यामिति से ही संबंधित हैं, इस बिंदु (CG) को द्रव्यमान-केंद्र (CM) भी कहते हैं। इस अध्याय में हम बाद में यह देखेंगे कि ऐसा करना उन समस्याओं को हल करने में भी उपयोगी रहता है जिनमें गुरुत्व बल सम्मिलित नहीं होते।

▶ ***उदाहरण 7.2*** शीर्षों पर रखे तीन समान द्रव्यमानों से बने किसी त्रिभुज का गुरुत्व केंद्र प्राप्त कीजिए।

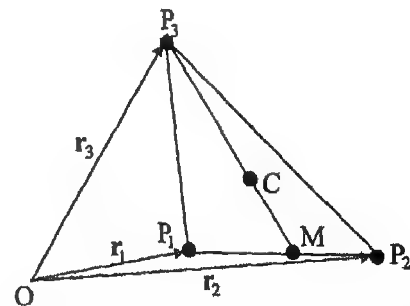
हल हम समीकरण (7.5) की दो समीकरणों को सदिश रूप में लिखते हैं

$$\mathbf{R}_c = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i}$$

दिए गए द्रव्यमानों की त्रिभुजाकार व्यवस्था के प्रकरण में

$$\mathbf{R}_c = \frac{m\,(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3)}{3\,m}$$

$$= \left[\frac{\dfrac{2(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)}{2}+\mathbf{r}_3}{2+1}\right]$$



चित्र 7.6 त्रिभुज बनाने वाले तीन समान द्रव्यमानों का गुरुत्व केंद्र।

गुरुत्व केंद्र के अंतिम व्यंजक का एक सरल भौतिक अर्थ है। यह त्रिभुज के दो शीर्षों (1 तथा 2 से नामांकित, देखें चित्र 7.6) के मध्य बिंदु पर रखे द्रव्यमान m, जो कि त्रिभुज के तीसरे शीर्ष पर है, के गुरुत्व केंद्र जैसा प्रतीत होता है। यह गुरुत्व केंद्र त्रिभुज की माध्यिका (त्रिभुज के किसी शीर्ष को सम्मुख भुजा के मध्य बिंदु से जोड़ने वाली रेखा) लेकर उसे 2:1 अनुपात में

विभाजित करके प्राप्त किया जाता है (चित्र 7.6)। ध्यान दीजिए, हम किन्हीं भी दो शीर्षों से आरंभ कर सकते हैं। हम यह कैसे सुनिश्चित करें कि हमें उपरोक्त विधि से किए गए तीनों प्रयासों में से एक ही गुरुत्व केंद्र प्राप्त होगा ? क्योंकि किसी त्रिभुज की तीनों माध्यिकाएं एक ही बिंदु पर प्रतिच्छेदन करती हैं, जो इन सभी माध्यिकाओं को 2:1 अनुपात में विभाजित करता है। आप स्वयं करके देख सकते हैं कि यदि कोई त्रिभुज तीन एकसमान छड़ों से मिलकर बनता है, तो भी उनका गुरुत्व केंद्र उसी बिंदु पर आता है, जिसे 'केंद्रक (centroid)' कहते हैं। ◄

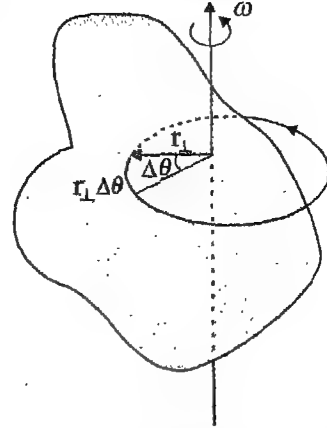
7.4 घूर्णन गतिज ऊर्जा तथा किसी दृढ़ पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण

अब हम किसी ऐसे पिण्ड के विषय में विचार करेंगे जो किसी अक्ष के परितः कोणीय चाल ω से घूर्णन करता है। प्रत्येक कण किसी ऐसे वृत्तीय पथ पर गति करते हैं जो घूर्णन अक्ष के लंबवत् तल में अवस्थित होते हैं। यदि किसी कण द्वारा समय Δt में कोण $\Delta\theta$ तय किया जाता है तब इस समय अंतराल Δt में औसत कोणीय चाल अनुपात $\Delta\theta/\Delta t$ द्वारा व्यक्त की जाती है। किसी दिए गए कण की रेखीय चाल घूर्णन अक्ष के लंबवत् दूरी $r_\perp$ पर निर्भर करती है तथा इसे सूत्र $v=r_\perp\omega$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। एक महत्त्वपूर्ण तथ्य यह है कि किसी दृढ़ पिण्ड के लिए प्रत्येक कण द्वारा इस अक्ष के परितः तय किया गया कोण समान होता है। अतः सभी कणों की कोणीय चाल समान होनी चाहिए। वेग सदिश वृत्त के तल में, वृत्त की त्रिज्या के लंबवत् (चित्र 7.7) अवस्थित होता है। अब हम किसी एक कण की कुल गतिज ऊर्जा परिकलित करेंगे। इसे हम वास्तव में $K=mv^2/2$ के रूप में लिख सकते हैं, परंतु यहां इसे कोणीय वेग के पदों में $K=m(\omega r_\perp)^2/2)$ के रूप में लिखना अधिक सुविधाजनक है। चूंकि सभी कणों की कोणीय चाल समान है, हम इन सभी गतिज ऊर्जाओं का योग करके कुल गतिज ऊर्जा प्राप्त कर सकते हैं

$$K=\sum m_i r_{i\perp}^2\omega^2/2=\left(\frac{1}{2}\right)\omega^2\sum m_i r_{i\perp}^2=\frac{1}{2}I\omega^2 \qquad (7.7)$$

यहां $I=\Sigma m_i r^2 i_\perp$ और संकलन (Σ) सभी कणों का समावेश कर लेता है।

ध्यान दीजिए समीकरण (7.7) में अंतिम समिका में हमने आपका परिचय प्रतीक I से कराया है जो कि पदों के योग के लिए है तथा इन पदों में प्रत्येक संहति m_i तथा इस संहित की अक्ष से लंबवत् दूरी $r_{i\perp}$ के वर्ग का गुणनफल (अर्थात् $m_i r_{i\perp}^2$) है। इस राशि को **जड़त्व-आघूर्ण (I)** कहते हैं। गणित में शब्द आघूर्ण का उपयोग किसी फलन को चर r की किसी भी घात द्वारा गुणा करके तथा गुणनफलों को जोड़ने से प्राप्त किया जाता है। इस संकल्पना का यह महत्त्व जो यह बताता है कि गतिज



चित्र 7.7 किसी व्यापक तीन विमीय पिण्ड का किसी व्यापक निश्चित अक्ष के परितः घूर्णन। प्रत्येक बिंदु उस अक्ष के लंबवत् तल में वृत्त में गति करता है।

ऊर्जा कोणीय चाल के वर्ग के आधे के आनुपातिक कैसे है। इस सूत्र की तुलना गतिज ऊर्जा के सामान्य सूत्र से (जिसमें चाल के वर्ग के आधे को कुल द्रव्यमान से गुणा किया जाता है) कीजिए। इसमें हमारे पास एक नई भौतिक राशि जड़त्व आघूर्ण, I, है जिसकी घूर्णन गतिज ऊर्जा में वही भूमिका है जो रैखिक गति (अर्थात् वह गति जिसमें पिण्ड के सभी कण समान वेग से गति करते हैं।) की गतिज ऊर्जा में द्रव्यमान की भूमिका होती है।

किसी पिण्ड के किसी अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण की व्यापक परिभाषा इस प्रकार दी जा सकती है। हमारे पास m_i ($i=1$ से N) द्रव्यमानों के N कण हैं तथा इन कणों की घूर्णन अक्ष से लंबवत् दूरियां $r_{i\perp}$ हैं। दोहराते हुए, जैसा कि पहले भी कहा जा चुका है, जड़त्व आघूर्ण की परिभाषा इस प्रकार की जाती है

$$I=\sum_{1}^{N} m_i r_{i\perp}^2 \qquad (7.8)$$

अब हम इस परिभाषा का अनुप्रयोग तीन प्रकरणों में करते हैं :

(a) R त्रिज्या तथा M द्रव्यमान के किसी पतले छल्ले पर विचार कीजिए जो अपने केंद्र के परितः अपने तल में कोणीय वेग ω से घूर्णन कर रहा है। छल्ले का प्रत्येक द्रव्यमान अवयव अक्ष से R दूरी पर है तथा चाल $v=R\omega$ से इस दिशा में गति कर रहा है कि उसका वेग त्रिज्या के लंबवत् है। अतः गतिज ऊर्जा

$$K=\frac{1}{2}Mv^2=\frac{1}{2}Mr^2\omega^2$$

इसकी समीकरण (7.7) से तुलना करने पर हमें प्राप्त होता है

$I=MR^2$

(b) अब, लंबाई l की कोई द्रव्यमानरहित ऐसी दृढ़ छड़ लीजिए जिसके सिरों पर M द्रव्यमान का कोई युगल जुड़ा हो और जो अपनी लंबाई के लंबवत् द्रव्यमान केंद्र से गुजरने वाले अक्ष के परित: घूर्णन करती हो । प्रत्येक द्रव्यमान $M/2$ अक्ष से $l/2$ दूरी पर है । अत: इस छड़ का जड़त्व आघूर्ण $\left(\frac{M}{2}\right)\left(\frac{l}{2}\right)^2+\left(\frac{M}{2}\right)\left(\frac{l}{2}\right)^2$ होगा ।

इस प्रकार, छड़ के लंबवत् अक्ष के परित: घूर्णन करने वाले द्रव्यमानों के युगल के लिए $I=\left(\frac{Ml^2}{4}\right)$

(c) अब हम किसी एकसमान छड़ का जड़त्व आघूर्ण उस अक्ष के परित: परिकलित करते हैं जो छड़ के केंद्र से गुजरता है तथा छड़ के लंबवत् है । पहले हम ऐसे 2N+1 कणों पर विचार करेंगे जो किसी रेखा के अनुदिश अवस्थित हैं तथा जिनमें पृथकन a है । चित्र 7.7a में N=4 के लिए इस व्यवस्था को दर्शाया गया है ।

इसकी कुल लंबाई $2Na$ है ।

$\pm na$ पर अवस्थित कणों के युगल का जड़त्व आघूर्ण के लिए योगदान $2m.n^2.a^2$ है । इसका कुल योग

$$I=\sum_{n=1}^{N}2m.a^2.n^2=2ma^2.\frac{\mathrm{N(N+1)(2N+1)}}{6}$$

(यहां हमने 1 से N तक की प्राकृत संख्याओं के वर्गों के योग संबंधी सुपरिचित परिणाम का उपयोग किया है)

अब $a=\frac{L}{2\mathrm{N}}$, $m=\frac{M}{(2\mathrm{N}+1)}$ लिखने पर हमें प्राप्त होता है

$$I=\frac{2}{6}M\frac{L^2}{4}\times\left[\frac{\mathrm{N(N+1)}}{\mathrm{N}^2}\right]$$
$$=\frac{ML^2}{12}\left[1+\frac{1}{\mathrm{N}}\right]$$

एकसमान छड़ के निरूपण के लिए, हमें यह मानना है कि संख्या N अनंत तक जाती है । तब कोष्ठक की राशि का मान 1 की ओर अग्रसरित होता है । अंतत: एकसमान छड़ के लिए हमें जड़त्व आघूर्ण का मान $I=ML^2/12$ प्राप्त होता है ।

इस प्रकार के परिकलनों को शीघ्रता से समाकलन गणित द्वारा किया जा सकता है । सारणी 7.1 में विभिन्न परिचित ठोसों के विशिष्ट अक्षों के परित: जड़त्व आघूर्ण दिए गए हैं ।

किसी दृढ़ पिण्ड का घूर्णन अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण घूर्णी गति में वही भूमिका निभाता है जो रैखिक गति में द्रव्यमान निभाता है । जड़त्व आघूर्ण को कभी-कभी रैखिक गति में द्रव्यमान का घूर्णी तुल्य रूप भी कहते हैं (सारणी 7.2 में देखिए)।

जिस प्रकार किसी पिण्ड का द्रव्यमान उस पिण्ड की रैखिक गति में होने वाले परिवर्तन का प्रतिरोध करता है तथा रैखिक गति में उस पिण्ड के जड़त्व की माप होता है, ठीक उसी प्रकार किसी दिए गए अक्ष के परित: किसी पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण उस पिण्ड में होने वाली घूर्णी गति में होने वाले परिवर्तन का प्रतिरोध करता है तथा इसे उस पिण्ड के घूर्णी जड़त्व की माप के रूप में माना जा सकता है । यह उस ढंग की माप है जिसके अनुसार पिण्ड के विभिन्न भाग घूर्णन अक्ष से विभिन्न दूरियों पर फैले हैं । द्रव्यमान की भांति किसी पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण एक निश्चित राशि नहीं होता वरन् इसका मान समस्त पिण्ड के संदर्भ में घूर्णन अक्ष की स्थिति तथा अभिविन्यास पर निर्भर करता है । उस ढंग की माप के रूप में जिसमें घूर्णन करते किसी दृढ़ पिण्ड का द्रव्यमान घूर्णन अक्ष के संदर्भ में विभाजित है, हम एक अन्य नए प्राचल **'परिभ्रमण त्रिज्या'** को परिभाषित कर सकते हैं । यह पिण्ड के समस्त द्रव्यमान तथा उसके जड़त्व आघूर्ण से संबंधित होती है ।

सारणी 7.1 पर ध्यान दीजिए । इसमें सभी प्रकरणों में हम $I=Mk^2$ लिख सकते हैं, यहां k की विमा लंबाई की विमा ही है । किसी छड़ के लिए, इसके मध्य बिंदु पर लंबवत् अक्ष के परित:, $k^2=\frac{L^2}{12}$, अर्थात् $k=\frac{L}{\sqrt{12}}$ । इसी प्रकार अपने व्यास के परित: किसी वृत्ताकार चक्रिका के लिए $k=R/2$ । लंबाई k, घूर्णन अक्ष तथा पिण्ड का ज्यामितीय गुण होती है । इसे **परिभ्रमण त्रिज्या** (Radius of gyration)कहते हैं ।

इस प्रकार किसी दृढ़ पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण, पिण्ड के द्रव्यमान, उसकी आकृति तथा आकार, घूर्णन अक्ष के परित: द्रव्यमान का विभाजन, तथा घूर्ण अक्ष की स्थिति तथा अभिविन्यास पर निर्भर करता है ।

पिण्ड के घूर्णी आघूर्ण की माप के रूप में इस अत्यंत महत्त्वपूर्ण राशि I के गुण का अत्यधिक व्यावहारिक उपयोग किया जाता है । भाप-इंजन, आटोमोबाइल इंजन आदि मशीनें, जिनका उपयोग घूर्णी गति उत्पन्न करने में किया जाता है, इनमें अधिक जड़त्व आघूर्ण की चक्रिका लगी होती हैं जिन्हें **गतिपालक चक्र** (Flywheel) कहते हैं । अधिक जड़त्व आघूर्ण होने के कारण गतिपालक चक्र, वाहन की यकायक चाल में कमी अथवा वृद्धि का अवरोध करता है । यह वाहनों की गति में धीरे-धीरे परिवर्तन होने देता है तथा झटकेदार गतियों से बचाव करता है । इस प्रकार, यह वाहन में यात्रा करने वाले यात्रियों को शान्त एवं निर्विघ्न सवारी प्रदान करने में सहायता करता है । चित्रों 7.8(a) तथा 7.8(b) में जड़त्व आघूर्ण से संबंधित दो उपयोगी प्रमेयों का चित्रण किया गया है । पहला प्रमेय समतली पिण्डों (चित्र 7.8a) पर लागू होता है । मान लीजिए x-तथा y-अक्ष समतल में अवस्थित हैं तथा z-अक्ष समतल के लंबवत् है । x-तथा y-अक्षों

सारणी 7.1 कुछ विशिष्ट पिण्डों के जड़त्व आघूर्ण

पिण्ड	अक्ष	चित्र	जड़त्व आघूर्ण I
पतली छड़, लंबाई L	छड़ के लंबवत् मध्य बिंदु पर		$\left(\frac{1}{12}\right)ML^2$
पतला वृत्तीय छल्ला, त्रिज्या R	व्यास		$\left(\frac{1}{2}\right)MR^2$
पतला वृत्तीय छल्ला, त्रिज्या R	तल के लंबवत्, केंद्र पर		MR^2
वृत्तीय चक्रिका, त्रिज्या R	व्यास		$\left(\frac{1}{4}\right)MR^2$
वृत्तीय चक्रिका, त्रिज्या R	चक्रिका के लंबवत् केंद्र पर		$\left(\frac{1}{2}\right)MR^2$
खोखला सिलिंडर, त्रिज्या R	सिलिंडर का अक्ष		MR^2
ठोस सिलिंडर, त्रिज्या R	सिलिंडर का अक्ष		$\left(\frac{1}{2}\right)MR^2$
गोला त्रिज्या R	व्यास		$\left(\frac{2}{5}\right)MR^2$

के परित: जड़त्व आघूर्ण I_x तथा I_y इस प्रकार व्यक्त किए जाते हैं

$$I_x = \sum m_i x_i^2,\; I_y = \sum m_i y_i^2$$

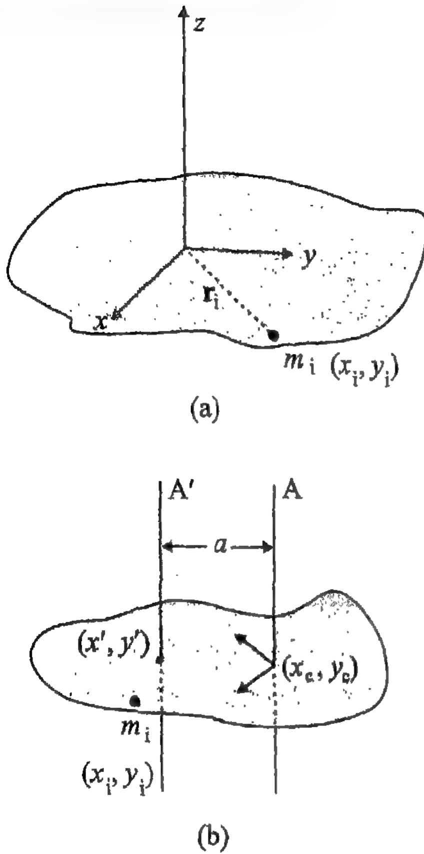
I_x तथा I_y का योग इस प्रकार व्यक्त किया जाता है

$$I_x + I_y = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum m_i r_i^2$$

यहां r_i मूल बिंदु से दूरी है, चूंकि पिण्ड x-y तल में है अत: यह z- अक्ष से भी दूरी है । अत:, किसी ऐसे पिण्ड के लिए जो x-y तल में है,

$$I_x + I_y = I_z \qquad (7.9)$$

इसे **लंबवत् अक्ष प्रमेय** कहते हैं । सारणी 7.1 से हम यह पाते हैं कि किसी व्यास के परित: छल्ले का जड़त्व आघूर्ण $MR^2/2$ । दो लंबवत् अक्षों पर अनुप्रयुक्त प्रमेय से हम यह पाते हैं कि छल्ले के तल के केंद्रीय अभिलंब से गुजरने वाले अक्ष के परित: I का मान $\frac{MR^2}{2} + \frac{MR^2}{2} = MR^2$ होना चाहिए, (जैसा सारणी 7.1 में दिया गया है) । दूसरा उपयोगी परिणाम, जिसे **समान्तर अक्ष प्रमेय** कहते हैं, हमें उस स्थिति में भी I का मान



चित्र 7.8 (a) लंबवत् अक्ष तथा (b) समान्तर अक्ष प्रमेय के लिए आवश्यक ज्यामितियां ।

ज्ञात करने की अनुमति प्रदान करता है जिसमें अक्ष गुरुत्व केंद्र से होकर नहीं गुजरता । चित्र 7.8(b) में, हमने एक अक्ष A गुरुत्व केंद्र (x_c, y_c) से गुजरता तथा तल के लंबवत् दिखाया है । दूसरा अक्ष A', अक्ष A के समान्तर किसी अन्य बिंदु (x', y') से गुजरता है । अक्ष A' के परित: जड़त्व आघूर्ण का परिकलन इस प्रकार किया जाता है :

$$I' = \sum m_i[(x_i - x')^2 + (y_i - y')^2]$$

हम लिखते हैं $(x_i - x')^2 = [(x_i - x_c) + (x_c - x')]^2$, तथा इसी प्रकार

$$(y_i - y')^2 = [(y_i - y_c) + (y_c - y')]^2$$

अत:

$$I' = \sum m_i[(x_i - x_c)^2 + (x_c - x')^2 + (y_i - y_c)^2 + (y_c - y')]^2$$
$$+2\sum m_i[(x_i - x_c)(x_c - x') + (y_i - y_c)(y_c - y')]$$

अब $(x_c - x')$ तथा $(y_c - y')$ जैसे पद i के चुनाव पर निर्भर नहीं करते, अत: हम इन्हें संकलन-चिह्न से बाहर ले सकते हैं । अत:

$$I' = \sum m_i(x_i - x_c)^2 + \sum m_i(y_i - y_c)^2 + (x_c - x')^2 \sum m_i$$
$$+(y_c - y')^2 \sum m_i + 2(x_c - x')\sum m_i(x_c - x_c)$$
$$+2(y_c - y')\sum m_i(y_i - y_c)$$

$$I' = \sum m_i(x_i - x_c)^2 + \sum m_i(y_i - y_c)^2 + (x_c - x')^2 M$$
$$+(y_c - y')^2 M + 2(x_c - x')\sum m_i(x_i - x_c)$$
$$+2(y_c - y')\sum m_i(y_c - y_c)$$

यहां $m = \Sigma m_i$, पिण्ड का कुल द्रव्यमान है ।

अब $\sum m_i(x_i - x_c) = 0$ तथा $\sum m_i(y_i - y_c) = 0$,[समीकरण (7.5) में दी गई x_c की परिभाषा के द्वारा] यहाँ चित्र 7.8(b) में a दो समान्तर अक्षों का पृथकन है ।

अत: $$I' = I + Ma^2 \qquad (7.10)$$

यहां I पिण्ड का अक्ष A, जो C से गुजरता है, के परित:, जड़त्व आघूर्ण है । यह 'समान्तर अक्ष प्रमेय' है ।

ध्यान दीजिए 'लंबवत् अक्ष प्रमेय' केवल समतली पिण्ड (पटल) के लिए ही सत्य है । हमारी समान्तर अक्ष प्रमेय के चित्र में भी पटल दर्शाया गया है जो केवल सरलता की दृष्टि से है । परन्तु यह व्यापक तीन विमाओं के पिण्डों के लिए भी सत्य है । इस पिण्ड को दो समान्तर अक्षों के लंबवत् समतली परिच्छेदों में स्तर-खण्डों में काटकर तथा हमारे तर्क का अनुप्रयोग प्रत्येक स्तर-खण्ड पर करके देखा जा सकता है ।

▶ उदाहरण 7.3 M **द्रव्यमान तथा** l **लंबाई की किसी छड़ का इसके एक सिरे से लंबवत् गुजरने वाले अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण क्या है ?**

हल समान्तर अक्ष प्रमेय से

$$I' = I + Ma^2$$

$$I = M\frac{l^2}{12} + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = M\frac{l^2}{3}$$

हम इसकी जांच स्वतंत्रतापूर्वक कर सकते हैं । चूंकि I उस छड़ के जड़त्व आघूर्ण का आधा है जिसका द्रव्यमान $2M$, लंबाई $2l$ है तथा जड़त्व आघूर्ण का परिकलन छड़ के मध्य के परित: किया गया है

$$I = 2M \cdot \frac{4l^2}{12} \times \frac{1}{2} = \frac{Ml^2}{3}$$ ◀

अब हम आपको घूर्णन गतिज ऊर्जा की संकल्पना से परिचित कराएंगे । किसी अक्ष के परितः कोणीय चाल ω से घूर्णी गति करने वाले दृढ़ पिण्ड पर विचार कीजिए । इस पिण्ड का i वां कण इसी अक्ष के परितः r_i त्रिज्या के वृत्त में गति करता है। इस कण की रैखिक चाल $v_i = r_i \omega$ है । इस कण की गतिज ऊर्जा है $\frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}m_i r_i^2 \omega^2$, घूर्णी गति के लिए समस्त पिण्ड की गतिज ऊर्जा इस प्रकार व्यक्त की जा सकती है

$$K = \Sigma \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} \omega^2 \Sigma m_i r_i^2$$

$$= \frac{1}{2} I \omega^2$$

इस गतिज ऊर्जा को घूर्णन गतिज ऊर्जा कहते हैं ।

उपरोक्त संकल्पना की व्याख्या के लिए उदाहरण 7.4 में दी गई व्यावहारिक स्थिति पर विचार करते हैं ।

▶ ***उदाहरण 7.4*** अपने अक्ष पर घूर्णन गति करने के लिए स्वतंत्र 12 kg द्रव्यमान तथा 20 cm त्रिज्या के किसी लकड़ी के ठोस सिलिंडर पर कोई हल्की रस्सी लिपटी है जिसके एक सिरे से 8 kg द्रव्यमान की बाल्टी लटकी है । कोई व्यक्ति जो रस्सी के स्वतंत्र सिरे को बाल्टी तथा सिलिंडर सहित आरंभ में विराम की स्थिति में थामे खड़ा है, बाल्टी को 50 m गहरे कुएं में मुक्त रूप से गिरने के लिए छोड़ देता है । घर्षण की उपेक्षा करते हुए कुएं के पानी में गिरने से तुरंत पहले सिलिंडर की कोणीय चाल तथा बाल्टी की रैखिक चाल ज्ञात कीजिए । $g = 10\ m\ s^{-2}$ लीजिए ।

हल अपने अक्ष के परितः सिलिंडर का जड़त्व आघूर्ण

$$I = \frac{1}{2}Mr^2 = \frac{1}{2} \times 12 \times (0.2)^2 = 0.24\ kg\ m^2$$

जब सिलिंडर कोणीय चाल ω से घूर्णन गति करता है तब इसकी गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2}I\omega^2 = 0.12\ \omega^2$ जूल है । चूंकि रस्सी सिलिंडर पर कसकर लिपटी है, जैसे ही बाल्टी किसी दर से, जो सिलिंडर के पृष्ठ के किसी बिंदु की चाल से प्राप्त होती है । नीचे गिरती है रस्सी की लंबाई में वृद्धि होती जाती है । इस प्रकार $v = r\omega = 0.2\omega\ m s^{-1}$ । यही बाल्टी की भी चाल है जिसकी गतिज ऊर्जा $K = \left(\frac{1}{2}\right) 8 \times (0.2\omega)^2 = 0.16\ \omega^2$ । अतः गिरती हुई बाल्टी तथा घूर्णी सिलिंडर की कुल गतिज ऊर्जा $= (0.16 + 0.12)\ \omega^2 = 0.28\ \omega^2$ जूल चूंकि बाल्टी विराम की स्थिति से गिरना आरंभ करती है तथा 50 m नीचे गिरती है । इसकी स्थितिज ऊर्जा में $50 \times 8 \times 10$ जूल की कमी हो जाती है । ऊर्जा में इस कमी को बाल्टी तथा सिलिंडर द्वारा प्राप्त गतिज ऊर्जा से समीकृत करने पर

$$0.28\omega^2 = 4000\ ;\ \omega^2 = (4000/0.28)$$

$$\therefore\ \omega = 119.5\ rad\ s^{-1},\ v = 0.2\omega = 23.9\ m\ s^{-1}$$

ध्यान दीजिए कि सिलिंडर की स्थितिज ऊर्जा में कोई परिवर्तन नहीं हुआ है । साथ ही यह भी कि पूर्णतः मुक्त रूप से गिरती बाल्टी की चाल

$\sqrt{2gh} = \sqrt{1000} = 31.6\ m\ s^{-1}$ अपेक्षाकृत अधिक है । ◀

उपरोक्त उदाहरण से यह स्पष्ट होता है कि किस प्रकार सिलिंडर पर रस्सी के तनाव द्वारा कार्य किए जाने के कारण सिलिंडर की घूर्णन गतिज ऊर्जा में वृद्धि होती है । हम यह पहले ही देख चुके हैं कि किया गया कार्य $T\Delta\theta$ है, यहां T बल आघूर्ण है। अब हम कार्य-ऊर्जा प्रमेय का उपयोग करके किसी बाह्य बल आघूर्ण के कारण कोणीय चाल में वृद्धि के लिए व्यापक व्यंजक प्राप्त करेंगे ।

मान लीजिए किसी निश्चित अक्ष के परितः पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण I है तथा t_1 से t_2 के लघु समय अंतराल में इसकी कोणीय चाल में ω_1 से ω_2 का परिवर्तन हो जाता है । तब गतिज ऊर्जा में परिवर्तन

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}I(\omega_2^2 - \omega_1^2)$$

बाह्य बल आघूर्ण T द्वारा किया गया कार्य $T\Delta\theta$ है । अतः कोणीय विस्थापन $\Delta\theta$ को इस प्रकार भी लिख सकते हैं

$$\Delta\theta = (\text{औसत कोणीय चाल} \times \text{समय})$$

$$= \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \times (t_2 - t_1)$$

अतः गतिज ऊर्जा में वृद्धि को किए गए कार्य से समीकृत करने पर,

$$\frac{1}{2}I\left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right) = T\Delta\theta$$

अथवा $$\frac{1}{2}I\,(\omega_2 - \omega_1)(\omega_2 + \omega_1) = T\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}(t_2 - t_1)$$

अतः $$I\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1}\right) = T \qquad (7.11)$$

समीकरण (7.11) का वाम पक्ष दो पदों का गुणनफल है । इनमें एक पद जड़त्व आघूर्ण I है तथा दूसरा पद कोणीय त्वरण $\alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ है, जो कि कोणीय चाल में परिवर्तन की दर है । उपरोक्त संबंध की व्युत्पत्ति में हमने यह माना है कि कोणीय त्वरण नियत रहता है (केवल तभी $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ सही औसत कोणीय चाल है) । तथापि, लघु समय

अंतराल के लिए यह पर्याप्त यथार्थ है । तात्क्षणिक कोणीय त्वरण $\Delta\omega/\Delta t$ जब $\Delta t \to 0$ है की सीमा होती है । अतः इस सीमा में हम समीकरण (7.11) को इस प्रकार लिख सकते हैं

$$I\alpha = I = \frac{d\omega}{dt} = T \qquad (7.11a)$$

यह समीकरण रैखिक गति के लिए न्यूटन के द्वितीय नियम से बहुत मेल खाती है ।

$$Ma = M = \frac{dv}{dt} = F$$

ध्यान दीजिए, घूर्णी गति के प्रकरण में द्रव्यमान को जड़त्व आघूर्ण तथा बल को बल आघूर्ण द्वारा प्रतिस्थापित किया गया है । शब्दों में,

बल आघूर्ण = जड़त्व आघूर्ण × कोणीय त्वरण

अब हम आपका परिचय एक अन्य महत्त्वपूर्ण भौतिक राशि से कराते हैं जिसे **कोणीय संवेग** कहते हैं । इसे इस प्रकार परिभाषित करते हैं

$$\mathbf{L} = I\omega \qquad (7.11b)$$

यह घूर्णी दृढ़ पिण्ड की कोणीय चाल तथा जड़त्व आघूर्ण का गुणनफल होता है । यह व्यंजक रैखिक संवेग के लिए व्यंजक $p = M\mathbf{v}$ के समान होता है । अब हम अपनी मूल समीकरण, समीकरण (7.11a), को इस प्रकार लिख सकते हैं

$$T = d\mathbf{L}/dt \qquad (7.11c)$$

इसे शब्दों में इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं

बल आघूर्ण = कोणीय संवेग में परिवर्तन की दर

अब हम एकसमान कोणीय त्वरण के लिए रैखिक गति की भांति, घूर्णन गति के लिए समीकरण लिख सकते हैं (अध्याय 3 देखिए) ।

एकसमान कोणीय त्वरण α, आरंभिक कोण θ_0 तथा आरंभिक कोणीय चाल ω_0 के घूर्णन गति की समीकरण इस प्रकार हैं

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

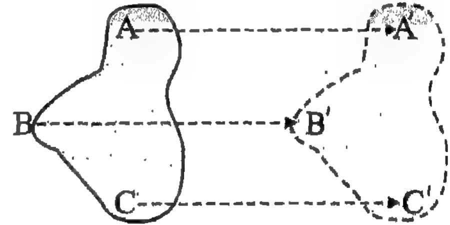
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

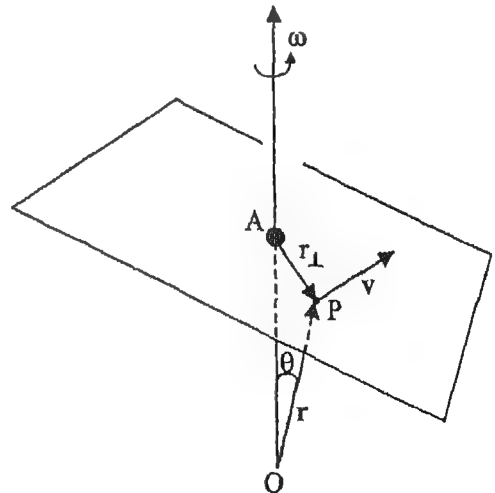
सारणी 7.2 में घूर्णन गति तथा रैखिक गति में तुल्यरूपता दी गई है ।

अब हम ऐसे त्रिविम दृढ़ पिण्डों पर विचार करेंगे जो किसी भी अक्ष के परितः घूर्णन कर सकें, यहां उस सदिश संकेत पद्धति का उपयोग करेंगे । किसी दृढ़ पिण्ड की दो प्रकार की गतियां हो सकती हैं । पहले प्रकार की गति में, सभी कण एक ही वेग $\mathbf{v}_0$ से गति करते हैं, अर्थात् $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3 \dots = \mathbf{v}_0$ । जैसा कि चित्र 7.9(a) में दर्शाया गया है, इसका सरल अर्थ यह है कि समस्त पिण्ड वेग $\mathbf{v}_0$ से, घूर्णन किए बिना, गति करता है । इसे **रैखिक गति** कहते हैं ।

सारणी 7.2 रैखिक तथा घूर्णन गतियों में तुल्यरूपता

रैखिक गति	घूर्णन गति
स्थिति x	कोण θ
वेग $v = \frac{dx}{dt}$	कोणीय वेग $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
त्वरण $a = \frac{dv}{dt}$	कोणीय त्वरण $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
द्रव्यमान m	जड़त्व आघूर्ण I
संवेग $p = mv$	कोणीय संवेग $L = I\omega$
बल F	बल आघूर्ण T
न्यूटन का नियम $F = \frac{dp}{dt}$	न्यूटन के नियम के परिणाम $T = \frac{dL}{dt}$
गतिज ऊर्जा $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$	गतिज ऊर्जा $K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{L^2}{2I}$
शक्ति $= Fv$	शक्ति $= T\omega$





चित्र 7.9 (a) रैखिक गति (b) घूर्णी गति

दृढ़ पिण्ड की दूसरी गति की संभावना यह है कि दृढ़ पिण्ड **कोणीय चाल** ω से किसी अक्ष के परित: घूर्णन गति करे। इस घूर्णन अक्ष पर हम कोई मूल बिंदु O चुनते हैं। जैसा कि चित्र 7.9(b) में दर्शाया गया है, किसी कण के वेग **v** का परिमाण $r_{\perp}\omega$ है, यहां $r_{\perp}=r\sin\theta$ कण की घूर्णन अक्ष से दूरी है। **r** तथा अक्ष के बीच का कोण θ है। कोणीय वेग ω एक सदिश राशि है जिसका परिमाण ω है। इसकी दिशा की स्थापना दक्षिण हस्त नियम का उपयोग करके की जाती है। ऐसा करने के लिए, अपने दाएं हाथ को इस प्रकार मोड़िए कि अंगुलियां घूर्णन की दिशा की ओर संकेत करें, तब आपका विस्तारित अंगूठा कोणीय वेग सदिश की दिशा में संकेत करेगा। इस परिपाटी द्वारा हम यह देखते हैं कि सदिश **v** दोनों सदिशों **r** तथा ω के लंबवत् है तथा इसका परिमाण $\omega\, \mathbf{r} \sin\theta$ है। अत: हम लिख सकते हैं, कि

$$\mathbf{v}=\omega\times\mathbf{r} \qquad (7.12)$$

यह समीकरण समतली गति के सुपरिचित संबंध $v_{\perp}=r\omega$ की यथार्थ त्रिविम सदिश व्याख्या है। लघु समय अंतराल Δt में विस्थापन Δr का मान है $\mathbf{v}\Delta\omega = \omega\Delta t\times\mathbf{r} = \Delta\phi\times\mathbf{r}$, यहां $\Delta\phi=\omega\,\Delta t$ लघु कोणीय विस्थापन को निरूपित करने वाला सदिश है। स्थानान्तरीय गति तथा घूर्णन गति, ये दो गतियां ही किसी दृढ़ पिण्ड की संभावित गतियां होती हैं।

अब हम किसी दृढ़ पिण्ड पर स्थित किसी बिंदु **r** के विस्थापन के लिए व्यापक सदिश सूत्र प्राप्त करेंगे, जबकि वह दृढ़ पिण्ड कोणीय वेग ω से घूर्णन गति तथा वेग **v** से स्थानान्तरीय गति करता है।

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{v}\Delta t+\omega\Delta t\times\mathbf{r}$$

r पर कार्यरत बाह्य बल **F** द्वारा किया गया कार्य

$$\Delta\omega=\Delta\mathbf{r}\,.\,\mathbf{F}$$

$$=\mathbf{v}\,.\mathbf{F}\Delta t+(\omega\times\mathbf{r}).\mathbf{F}.\Delta t$$

दाएं पक्ष के दूसरे पद को आदर्श त्रिक गुणनफल* के गुणों का उपयोग करके रूपान्तरित करने पर

$$\Delta\omega=\mathbf{F}\,.(\mathbf{v}\,\Delta t)+(\mathbf{r}+\mathbf{F}).\,\omega\Delta t$$

रैखिक विस्थापन $\Delta\mathbf{s} = \mathbf{v}\,\Delta t$ तथा कोणीय विस्थापन $\Delta\phi=\omega\Delta t$ के पदों में किया गया कार्य $\Delta\omega=\mathbf{F}.\Delta\mathbf{s}+\mathbf{T}.\Delta\phi$; यहां $\mathbf{T}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}$। सदिश $\mathbf{T}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}$ को हम बल आघूर्ण कहते हैं। हम यह सरलतापूर्वक जांच कर सकते हैं कि इसका परिमाण $|\mathbf{T}|=|\mathbf{r}|=|\mathbf{F}|\sin\theta$ हमारे द्वारा पहले दी गई किसी समतल में बल आघूर्ण की परिभाषा के अतिरिक्त अन्य कुछ नहीं है। परन्तु अब T की भी एक दिशा होती है जो r उस तल के लंबवत् है जिसमें v एवं F अवस्थित हैं।

जब विभिन्न बिंदुओं $\mathbf{r}_1$ पर बलों $\mathbf{F}_1$ का निकाय कार्यरत होता है, तब कार्य के लिए हमारा व्यंजक हो जाता है–

$$\Delta W=(\Sigma\mathbf{F}_i)(\Delta\mathbf{s})+(\Sigma\mathbf{T}_i)\cdot\Delta\phi \qquad (7.13)$$

समीकरण (7.13) में कार्य के लिए दिया गया पहला पद सुपरिचित है – यह बल तथा विस्थापन का बिंदु (अदिश) गुणनफल है। इसी प्रकार दूसरा पद बल आघूर्ण **T** तथा कोणीय विस्थापन $\Delta\phi$ का बिंदु गुणनफल है।

अब रैखिक एवं घूर्णी दोनों प्रकार के विस्थापन में हुए कार्य को शून्य के बराबर रखें तो हम पिंड के संतुलन की अपनी शर्त प्राप्त कर सकते हैं। अधिक परिशुद्धता कहें तो $\Delta\phi$ एवं $\Delta\mathbf{s}$ के किन्हीं दो यादृच्छिक मानों के लिए इन राशियों के समानुपाती व्यंजकों में प्रथम कोटि के पद शून्य होने चाहिए। इस प्रकार हम पाते हैं

$$\Sigma\mathbf{F}_i=0,\ \Sigma\mathbf{T}_i=0 \qquad (7.14)$$

इस प्रकार किसी दृढ़ पिण्ड के संतुलन के लिए उस पर कार्यरत सभी बलों का योग शून्य होना चाहिए तथा उस पर कार्यरत बल आघूर्णों का योग भी शून्य होना चाहिए। इससे पूर्व हमने किसी बिंदु के परित: घूर्णन करते समतली पिण्डों के विषय में चर्चा की थी, तथा हम इससे पूर्व भी कुल शून्य बल आघूर्ण की शर्त देख चुके हैं। बल की शर्त $\sum\mathbf{F}_i=0$, तब संतुष्ट हो जाती है जब हम टेक बिंदु (उदाहरण के लिए, उत्तोलक में आलंब) पर प्रतिक्रिया बल को भी सम्मिलित कर लेते हैं।

अब हम "कुल बल आघूर्ण शून्य के बराबर है" शर्त का उपयोग त्रिविम दृढ़ पिण्ड के गुरुत्व केंद्र को ज्ञात करने में करते हैं। $m_1\mathbf{g}, m_2\mathbf{g}....$ आदि बल $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2....$ आदि स्थितियों पर अवस्थित विभिन्न कणों का कार्य करते हैं। टेक किसी बिंदु $\mathbf{R}_s$ पर अवस्थित है। कुल बल को शून्य बनाने के लिए टेक पर प्रतिक्रिया बल – $(m_1+m_2+....)\,\mathbf{g}$ होने चाहिए। टेक बिंदु $\mathbf{R}_s$ के परित: आघूर्ण लेने पर

$$(\mathbf{r}_1-\mathbf{R}_s)\times m_1\mathbf{g}+(\mathbf{r}_2-\mathbf{R}_s)\times m_2\mathbf{g}+....=0$$

चूंकि प्रतिक्रिया बल $\mathbf{R}_s$ पर कार्य करते हैं अत: बल आघूर्ण में इनका योगदान नहीं होता। अत:

$$[(m_1+m_2+...)\mathbf{R}_s-(m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2+...)]\times\mathbf{g}=0 \qquad (7.15)$$

यदि हम पिण्ड के सापेक्ष **g** की किसी भी दशा के लिए बल आघूर्ण को शून्य बनाना चाहते हैं, तो हमें निम्न चयन करना होगा

$$\mathbf{R}_s=\mathbf{R}_c\equiv\frac{m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2+....}{m_1+m_2+....} \qquad (7.16)$$

यहां $\mathbf{R}_c$ द्रव्यमान केंद्र है जिसे एकविम तथा द्विविम पिण्डों में पहले उपयोग की गई विधि द्वारा इस प्रकार परिभाषित किया गया है,

---

* a, b तथा c के अदिश त्रिक गुणनफल को $\mathbf{a}(\bar{\mathbf{b}}\times\mathbf{c})$ के रूप में परिभाषित करते हैं। यह तत्समक (identity) $\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{c}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{b}.(\mathbf{c}\times\mathbf{a})$ का पालन करता है।

$$\mathbf{R}_c = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + ...}{m_1 + m_2 + ...} \quad (7.17)$$

जब कोई पिण्ड गुरुत्व केंद्र पर टिका होता है, तब वह घूमकर किसी भी स्थिति में आ सकता है और यहां संतुलन में रहता है। अन्यथा, संतुलन के लिए $M(\mathbf{R}_s - \mathbf{R}_c)\times\mathbf{g} = 0$ होना चाहिए, अर्थात् $\mathbf{R}_s - \mathbf{R}_c$ ऊर्ध्वाधर, **g**, के समान्तर हैं । यह भी एक सुपरिचित संकल्पना है । गुरुत्व केंद्र टेक के ऊर्ध्वाधर नीचे अथवा ऊपर होना चाहिए । हालांकि दूसरी स्थिति में संतुलन अस्थायी होगा ।

> *उदाहरण 7.5* आस्ट्रेलिया के मानचित्र का गुरुत्व केंद्र ज्ञात कीजिए ।

हल उदाहरण 7.1 में उपयोग किया गया गत्ते का मानचित्र ही उपयोग कीजिए । इसे चित्र 7.5(b) की भांति विभिन्न बिंदुओं पर किसी पेंसिल की नोक पर क्षैतिजतः संतुलित करने का प्रयास कीजिए । दक्षता द्वारा आप गुरुत्व केंद्र CG के निकट पहुंच सकते हैं । ◀

हम $\mathbf{R}_s$ पर स्थित किसी कण की स्थितिज ऊर्जा शून्य लेकर भी स्थितिज ऊर्जा V का परिकलन कर सकते हैं । **r** की $\mathbf{R}_s$ के ऊपर ऊंचाई को **g** से गुणा करने पर हमें प्राप्त होता है $-\mathbf{g}.(\mathbf{r} - \mathbf{R}_s)$ । अतः कुल स्थितिज ऊर्जा,

$$= -\sum m_i(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_s).\mathbf{g}$$

$$= -M(\mathbf{R}_c - \mathbf{R}_s).\mathbf{g} = Mgh_c \quad (7.18)$$

यहां h_c $\mathbf{R}_s$ के ऊपर $\mathbf{R}_c$ की ऊंचाई है ।

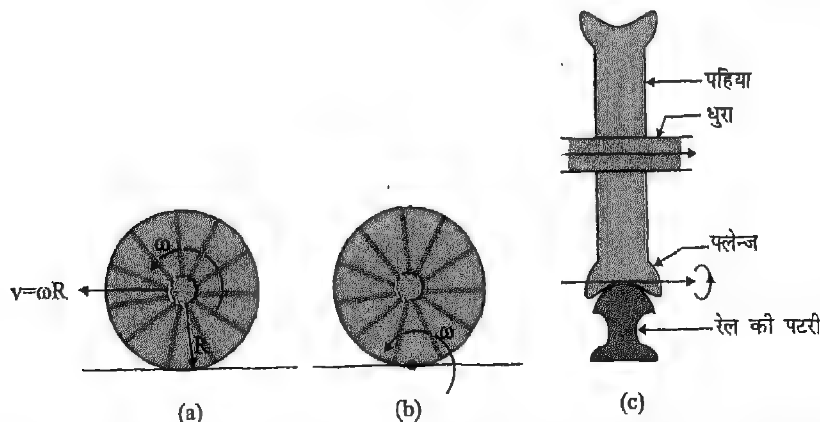
> **उदाहरण 7.6** फर्श से बराबर मोटाई की 2m ऊंची ईंटों की दीवार बनाने में किया गया कुल कार्य ज्ञात कीजिए जबकि दीवार का कुल द्रव्यमान 1000 kg है । ($g = 10$ m s^{-2} लीजिए ।)

हल दीवार की विभिन्न ईंटों की ऊंचाइयां भिन्न-भिन्न होने के कारण उनकी स्थितिज ऊर्जाएं भी भिन्न-भिन्न हैं । परंतु जिस परिणाम की हमने अभी चर्चा की है, उससे यह जानना पर्याप्त है कि (एकसमान मोटाई के लिए) दीवार का गुरुत्व केंद्र 1m ऊंचाई पर है । अतः दीवार की स्थितिज ऊर्जा, 1000 (kg) × 10 (m s^{-2}) × 1(m) = 10,000 J = 10 kJ ◀

अब हम संयोजित घूर्णन तथा स्थानान्तरीय गति का एक उदाहरण देते हैं । रेलगाड़ी का पहिया पटरी पर बिना फिसले घूर्णन गति करता है । इसका वर्णन दो विधियों द्वारा किया जा सकता है । हम यह कह सकते हैं कि पहिए का धुरा पटरियों के समान्तर वेग **v** से गति करता है तथा इसके साथ-साथ पहिया भी कोणीय वेग $\omega = v/R$ से वामावर्त घूर्णन करता है (चित्र 7.10a) । वैकल्पिक रूप से हम कह सकते हैं कि पहिया पटरी के संपर्क बिंदु से गुजरने वाले अक्ष के परितः कोणीय वेग ω से घूर्णन गति करता है, (चित्र 7.10) । इस विवरण में, पृथक स्थानान्तरीय वेग की आवश्यकता नहीं होती । धुरा आगे की दिशा में $R\omega$ चाल से गति करता है । चित्र 7.10 में इन दो भिन्न, परन्तु तुल्य प्रकथनों को निदर्शित किया गया है । हमनें चित्र में पहिए की संरचना भी दर्शाई है जिसमें घूर्णन अक्ष के नीचे के छोटे भाग को प्रस्तुत किया गया है (चित्र 7.10c)। इसका अर्थ यह हुआ कि पहिए का यह भाग वास्तव में पश्चगामी गति करता है !

पहिए के उदाहरण से समय के किसी दिए गए क्षण पर किसी दृढ़ पिण्ड की गति का हमें निम्नलिखित व्यापक चित्रण प्राप्त होता है । हम ऐसा सोच सकते हैं कि पिण्ड का द्रव्यमान केंद्र $\mathbf{v}_{cm}$ वेग से गतिमान है और साथ ही पिण्ड द्रव्यमान केंद्र के परितः कोणीय वेग ω से घूम रहा है ।

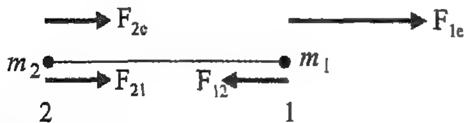
अब तक हमने किसी दृढ़ पिण्ड के विभिन्न भागों के बीच कार्य करने वाले आंतरिक बलों के विषय में कोई चर्चा नहीं की



चित्र 7.10 *एक रेलगाड़ी का पहिया (a) यह मानते हुए कि यह पहिया अपने अक्ष के परितः ω कोणीय चाल से घूर्णन गति तथा $v = \omega R$ रैखिक चाल से स्थानान्तरीय गति कर रहा है (b) यह मानते हुए कि पहिया संपर्क बिंदु के परितः घूर्णन गति कर रहा है तथा इसकी कोई अतिरिक्त स्थानान्तरीय गति नहीं है (c) पहिए की संरचना दर्शाता है, जो यह प्रस्तुत करता है कि टेक बिंदु से नीचे के बिंदु पश्चगामी गति करते हैं ।*

है । अब हम एक सरल प्रकरण में आंतरिक बलों की व्याख्या करते हैं । प्राथमिक भौतिकी में हमने यह पढ़ा था कि लकड़ी का गुटका या लोहे की छड़ जैसे पिण्ड ठोस होते हैं जो अपनी आकृति तथा आकार में परिवर्तन नहीं करते । यथातथ्य परिभाषा के अनुसार, कोई आदर्श दृढ़ पिण्ड वह होता है जिसमें दो कणों के किसी भी युगल के बीच औसत दूरी में कोई परिवर्तन नहीं होता, यद्यपि कण गतिमय हो सकते हैं । व्यावहारिक दृढ़ पिण्डों के लिए दूरी में यह परिवर्तन लघु होता है । इसकी व्याख्या हम दो समान द्रव्यमानों m को किसी ऐसी दृढ़ छड़ से जोड़कर कर सकते हैं जिसकी निश्चित लंबाई l है तथा जो द्रव्यमानरहित है । वास्तविक छड़ें न तो द्रव्यमानरहित होती हैं और न ही वे पूर्णत: दृढ़ होती हैं । परंतु व्यावहारिक उदाहरण के रूप में हम 50 cm लंबी कोई स्टील की छड़ ले सकते हैं जिसकी अनुप्रस्थ काट 1 वर्ग मिलीमीटर हो (ये विमाएं किसी साइकिल के पहिए में लगे अर (spoke) जैसी हैं ।) । इसकी लंबाई में 1mm के दसवें भाग के बराबर वृद्धि करने के लिए, प्रयोग यह दर्शाते हैं कि आपको 40 न्यूटन का बल चाहिए जो 4 kg द्रव्यमान का भार होता है । इस छड़ का अपना द्रव्यमान केवल 4 g है । अत: इस प्रकार की छड़ जिसके दोनों सिरों पर 100 g के द्रव्यमान जुड़े हों, दृढ़ पिण्ड का एक अच्छा उदाहरण हो सकता है । यदि इस छड़ पर कार्यरत बल अत्यधिक परिमाण के न हों, तो इसकी लंबाई में बहुत कम वृद्धि होगी ।

अब हम दो द्रव्यमान m_1 तथा m_2 जो चित्र 7.11 में दर्शाए अनुसार l लंबाई की किसी द्रव्यमानरहित छड़ से जुड़े हैं, के निकाय पर विचार करते हैं । छड़ के समान्तर दोनों द्रव्यमानों पर बाह्य बल F_{1e} तथा F_{2e} आरोपित कीजिए । द्रव्यमान m_2 द्वारा द्रव्यमान m_1 पर बल F_{12} (छड़ द्वारा संचारित) तथा m_1 द्वारा m_2 द्रव्यमान पर बल F_{21} हैं ।



चित्र 7.11 सरलतम दृढ़ पिण्ड, m_1 तथा m_2 द्रव्यमानों का युगल किसी हल्की द्रव्यमानरहित छड़ द्वारा जुड़ा हुआ है । चित्र में दोनों द्रव्यमानों पर कार्यरत बाह्य तथा आंतरिक बल दर्शाए गए हैं ।

पिण्ड कैसे गति करेगा ? निश्चित लंबाई l के कारण दोनों द्रव्यमानों को समान त्वरण $a = dv/dt$ से गति करनी पड़ेगी । कणों 1 तथा 2 पर न्यूटन के द्वितीय तथा तृतीय नियमों का अनुप्रयोग करने पर हमें प्राप्त होता है,

$$F_{1e} + F_{12} = ma\,; \quad F_{2e} + F_{21} = F_{2e} - F_{12} = ma$$

जोड़ने पर हमें प्राप्त होता है

$$F_{1e} + F_{2e} = 2ma, \qquad a = \frac{F_{1e} + F_{2e}}{2m} \tag{7.19}$$

हमें आंतरिक बलों के विषय में जानने की कोई आवश्यकता नहीं है; दृढ़ता की शर्त $(a_1 = a_2 = a)$ होना पर्याप्त है । इसके विपरीत हमारी रुचि इस विषय में हो सकती है कि संयोजक छड़ टूटेगी अथवा नहीं । यदि हम आंतरिक बलों के विषय में जानना चाहते हैं तो हमें दोनों समीकरणों को घटाना होगा और इस प्रकार हमें प्राप्त होगा

$$2F_{12} + F_{1e} - F_{2e} = 0$$

अथवा $$F_{12} = \frac{F_{2e} - F_{1e}}{2} \tag{7.20}$$

उदाहरण के लिए, यदि $F_{1e} = 0$ तब $F_{12} = F_{2e}/2$ । यदि F_{2e} धनात्मक है, तो F_{12} भी धनात्मक ही होगा तथा छड़ तनाव में होगी । यह हमारी सहज बुद्धि से मेल खाता है । यदि किसी रेलगाड़ी को खींचने के लिए सबसे आगे जुड़े इंजन द्वारा ही समस्त बल लगाया जाता है, तो डिब्बों के बीच के सभी जोड़ खींचे जाते हैं, अर्थात् वे तनाव में होते हैं । यदि रेलगाड़ी को इंजन पीछे से धक्का देता है, तब सभी जोड़ संपीडन की अवस्था में होते हैं । ध्यान दीजिए, हमारे उदाहरण में, आवश्यकतानुसार छड़ को थोड़ा खींचने अथवा संपीडित करने पर आवश्यक आंतरिक बल उत्पन्न होते हैं । चूंकि छड़ की लंबाई में परिवर्तन बहुत कम है, अत: आंतरिक बलों द्वारा किया गया कार्य भी कम ही होगा । यदि दो कणों के विस्थापन x_1 तथा x_2 हैं, तब किया गया कार्य $F_{12}x_1 + F_{21}x_2 = F_{12}(x_1 - x_2)$ [न्यूटन के तृतीय नियम के अनुप्रयोग द्वारा] । पद $(x_1 - x_2)$ छड़ की लंबाई में परिवर्तन है जो कि बहुत कम है, अत: आंतरिक बलों द्वारा किया गया कार्य भी कम ही है । यही कारण है कि हमने दृढ़ पिण्डों पर कार्य-ऊर्जा सिद्धांत के अपने पूर्व अनुप्रयोगों में इस कार्य को नगण्य मानकर उसकी उपेक्षा की थी ।

7.5 कणों के निकाय के लिए न्यूटन का द्वितीय नियम

अब हम अपने अध्ययन का विस्तार कणों के ऐसे समुच्चय से करते हैं जिसमें कणों के बीच एक दूसरे से दूरियों में समय के साथ परिवर्तन हो सकता है अर्थात् ये कण एक दृढ़ पिण्ड का निर्माण नहीं करते । माना कि इनके द्रव्यमान $m_1, m_2 \ldots\ldots m_n$ हैं(N कणों की संख्या है) । किसी जड़त्वीय फ्रेम के मूल बिंदु O के सापेक्ष इन कणों के स्थिति सदिश को $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \ldots\ldots \mathbf{r}_n$ (चित्र 7.12) द्वारा निर्दिष्ट किया गया है । एक साथ लेने पर इन सभी कणों के कुल द्रव्यमान M को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है। $M = m_1 + m_2 + \ldots\ldots\ldots m_N$ यदि इनमें प्रत्येक कण पर कार्यरत बल $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2 \ldots\ldots \mathbf{F}_N$ हैं, तब निकाय पर कार्यरत कुल बल $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots\ldots \mathbf{F}_N$$

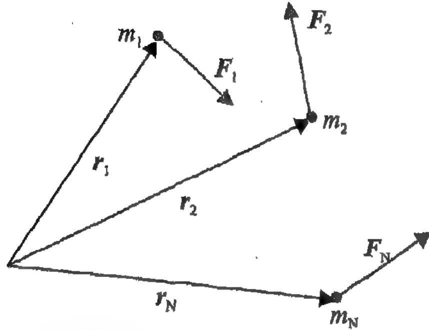
इन कणों के आघूर्ण $\mathbf{p}_i$ वेगों $\mathbf{v}_i$ से इस प्रकार संबंधित हैं,

$$\mathbf{p}_1 = m_1\mathbf{v}_1 = m_1\left(\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\right) \ldots\ldots \mathbf{p}_N = m_N\left(\frac{d\mathbf{r}_N}{dt}\right)$$

अब निकाय के प्रत्येक कण पर न्यूटन के गति के द्वितीय नियम को अनुप्रयुक्त किया जा सकता है

$$\mathbf{F}_1 = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m_1\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = m\left(\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\right) = m_1\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2}$$

$$\mathbf{F}_2 = m_2\left(\frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2}\right)\ldots\ \mathbf{F}_N = m_N\frac{d^2\mathbf{r}_N}{dt^2}$$



चित्र 7.12 N बिंदु कण उनकी स्थिति सदिश $\mathbf{r}_i$ तथा उन पर कार्यरत बल $\mathbf{F}_i$ दर्शाते हुए ।

उपरोक्त N समीकरणों को संक्षिप्त रूप में व्यक्त करने का ढंग इस प्रकार है :

$$\mathbf{F}_i = m\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}_i\,(i=1,2,\ldots\ldots N) \qquad (7.21)$$

अब हम इन सभी समीकरणों का योग करते हैं तथा कुल द्रव्यमान से विभाजित करते हैं

$$\frac{\mathbf{F}}{M} = \frac{m_1}{M}\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} + \ldots\frac{m_N}{M}\frac{d^2\mathbf{r}_N}{dt^2}$$

$$= \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{m_1\mathbf{r}_1 + \ldots m_N\mathbf{r}_N}{m_1 + m_2 + \ldots m_N}\right) \qquad (7.22)$$

समीकरण (7.22) के दाएं पक्ष में कोष्ठक में लिखे सदिश को **R** द्वारा निर्दिष्ट करते हैं । यह N कण निकाय का द्रव्यमान केंद्र (CM) है ।

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \ldots m_N\mathbf{r}_N}{m_1 + m_2 + \ldots m_N} \qquad (7.23)$$

अतः समीकरण (7.22) का दायां पक्ष द्रव्यमान केंद्र का त्वरण ही है । याद रखिए, **R** पर किसी भौतिक कण का अवस्थित होना आवश्यक नहीं है ! समीकरण (7.22) का बायां पक्ष निकाय पर कार्यरत कुल बल $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots\ldots \mathbf{F}_N$ जिसे कुल द्रव्यमान M द्वारा विभाजित किया गया है, को निर्दिष्ट करता है । समीकरण (7.22) को हम न्यूटन के द्वितीय नियम का ही एक रूपान्तरण मानते हैं जिसे हमें कणों के निकाय पर लागू करना चाहिए । इसे इस प्रकार लिख सकते हैं

$$\mathbf{F} = M\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} \qquad (7.24)$$

शब्दों में इसे इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है "निकाय के सभी कणों पर कार्यरत बल उस निकाय के कुल द्रव्यमान तथा द्रव्यमान केंद्र के त्वरण का गुणनफल होता है । द्रव्यमान केंद्र के वेग **V** को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{m_1\frac{d\mathbf{R}}{dt} + \ldots + m_N\frac{d\mathbf{R}_N}{dt}}{M}$$

$$= \frac{m_1\mathbf{v}_1 + \ldots + m_N\mathbf{v}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}$$

वज्र-गुणन करने पर

$$m_1\mathbf{v} + m_2\mathbf{v}_2 + \ldots\ldots + m_N\mathbf{v}_N = M\mathbf{v} = M(d\mathbf{R}/dt)$$

सभी कणों का कुल संवेग कुल द्रव्यमान M तथा द्रव्यमान केंद्र के वेग **V** का गुणनफल होता है । यह अत्यंत उपयोगी भौतिक राशि है । कुल संवेग ज्ञात करने के लिए हमें केवल कुल द्रव्यमान तथा द्रव्यमान केंद्र का वेग ज्ञात होना चाहिए ।

वेग **V** से गतिमान किसी निर्देश फ्रेम (Frame of reference) का उपयोग एक उपयोगी धारणा है । इस प्रकार के निर्देश फ्रेम को द्रव्यमान केंद्र फ्रेम कहते हैं । इस फ्रेम में एकाकी कणों के वेग $\mathbf{v}_1 - \mathbf{V}, \mathbf{v}_2 - \mathbf{V}$ आदि हैं । ऊपर दिए गए **V** के व्यंजक का उपयोग करके हम निम्नलिखित दर्शा सकते हैं

$$m_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{V}) + m_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{V}) + \ldots + m_N(\mathbf{v}_n - \mathbf{V})$$
$$= -(m_1 + m_2 + \ldots m_N)\mathbf{V} + m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \ldots + m_N\mathbf{v}_N$$
$$= 0 \qquad (7.25)$$

द्रव्यमान केंद्र फ्रेम में निकाय का कुल संवेग शून्य होता है ।

समीकरण (7.24) अब तक मात्र प्रत्येक कण के लिए पृथक्-पृथक् न्यूटन के नियमों का योग ही है । अब हम एक अत्यंत उपयोगी सरलीकरण बनाते हैं । याद कीजिए, $\mathbf{F}_i$ कण 1 पर कुल बल है, जिसमें बाह्य बल $\mathbf{F}_{1e}$ के साथ-साथ निकाय के आंतरिक बल भी सम्मिलित हैं । उदाहरण के लिए, इसमें कण 1 द्वारा कण 2 पर आरोपित बल, जिसे हम $\mathbf{F}_{12}$ कहते है, भी कार्यरत है । कण 1 पर कार्यरत सभी बलों का योग करने पर हमें प्राप्त होता है:

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{1e} + \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \ldots\ldots\ldots + \mathbf{F}_{1N}$$

इसी प्रकार अन्य कणों के लिए

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_{2e} + \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \ldots\ldots\ldots + \mathbf{F}_{2N}$$

$$\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_{3e} + \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32} + \ldots\ldots\ldots + \mathbf{F}_{3N}$$

$$\mathbf{F}_N = \mathbf{F}_{Ne} + \mathbf{F}_{N1} + \mathbf{F}_{N2} + \ldots\ldots\ldots + \mathbf{F}_{(N-1)N}$$

निकाय पर कार्यरत कुल बल ज्ञात करने के लिए हमें बलों $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2 \mathbf{F}_N$ आदि का योग करना है । तब हमें $\mathbf{F}_{12}+\mathbf{F}_{21}$ संयोजन प्राप्त होगा । यह कण 1 द्वारा कण 2 पर आरोपित बल तथा कण 2 द्वारा कण 1 पर आरोपित बल का योग है । न्यूटन के तृतीय नियम के अनुसार (अनुभाग 5.6 देखिए), ये दोनों बल परिमाण में समान तथा दिशा में विपरीत हैं, अर्थात् $\mathbf{F}_{12}-\mathbf{F}_{21}$ । अत: कणों 1 तथा 2 के युगल के बीच आंतरिक बलों, जो न्यूटन के तृतीय नियम का पालन करते हैं, का योग शून्य होता है तथा वे निकाय पर लगे कुल बलों में कोई योगदान नहीं देते । यही निकाय के अन्य कणों के युगलों पर भी लागू होता है । अत: हम यह लिख सकते हैं कि

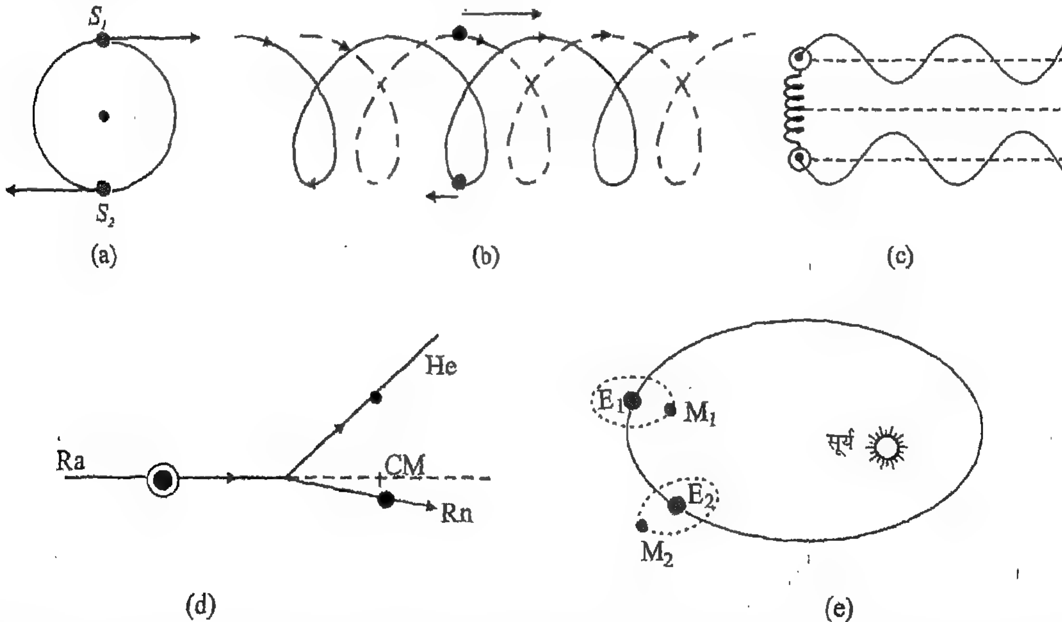
$$\mathbf{F}=\mathbf{F}_{1e}+\mathbf{F}_{2e}+....+\mathbf{F}_{Ne}=\mathbf{F}_e$$

यहां $\mathbf{F}_e$ निकाय पर लगा कुल बाह्य बल है ।

द्रव्यमान केंद्र का त्वरण $\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}$ (समीकरण (7.24) का दायां पक्ष) केवल पिण्ड पर कार्यरत बाह्य बलों द्वारा ही निर्धारित होता है । समीकरण (7.24) के स्थान पर अब हम यह लिख सकते हैं

$$\mathbf{F}_e = m\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} \qquad (7.26)$$

यह कणों के किसी निकाय के लिए न्यूटन का द्वितीय नियम है । याद कीजिए, इस नियम तक पहुंचने के लिए हमने न्यूटन के तृतीय नियम का उपयोग किया है । यह अत्यंत महत्त्वपूर्ण परिणाम है । यदि यह सत्य न हो तो, किसी पिण्ड का द्रव्यमान केंद्र पूर्णत: आंतरिक बलों के कारण त्वरित होना आरंभ कर देगा । हम अपने दैनिक जीवन में इस प्रकार की कोई घटना नहीं देखते । पिछले अध्यायों में हमने विभिन्न पिण्डों (गेंद, कार आदि) पर न्यूटन के द्वितीय नियम का अनुप्रयोग, केवल बाह्य बलों का उपयोग करके, किया था । हमने यह पहले से ही मान लिया था कि पिण्ड के विभिन्न भागों के बीच आंतरिक बल द्रव्यमान केंद्र के त्वरण में कोई योगदान नहीं करते । अब हमें ज्ञात हो गया है कि ऐसा क्यों है । इसका एक महत्त्वपूर्ण अनुप्रयोग उस प्रकरण में होता है जिसमें कोई बाह्य बल नहीं होता, यद्यपि उसमें आंतरिक बल हो सकते हैं । एकाकी कण त्वरित गति करते हैं, परंतु द्रव्यमान केंद्र R किसी सरल रेखा के अनुदिश एकसमान गति करता है । इसके लिए हमें न्यूटन के प्रथम नियम का आभारी होना चाहिए । खगोलिकी में युग्म तारा (binary अथवा double star) होना सामान्य घटना है । किसी युग्म तारे का द्रव्यमान केंद्र एक मुक्त कण की भांति इस शर्त के साथ, गति करता है कि उस निकाय पर कोई बाह्य बल कार्यरत नहीं है (चित्र 7.13) । चित्र 7.13(b) की कक्षाएं स्पष्ट रूप से जटिल प्रतीत होती हैं । परन्तु ये केवल दो गतियों के संयोजन हैं : (i) द्रव्यमान केंद्र R की एक सरल रेखा में एकसमान गति, (ii) R के परित: दोनों तारों



चित्र 7.13 (a) समान द्रव्यमान के दो तारे S_1 तथा S_2 अपने द्रव्यमान केंद्र, जो विराम में है, के परित: वृत्तीय कक्षा में गति करते हुए । (b) वही युग्म तारा निकाय, परंतु द्रव्यमान केंद्र एकसमान गति करते हुए (c) किसी गतिमान, कंपमान सममित द्विपरमाणुक अणु (जैसे O_2) का व्यवस्थात्मक निरूपण । रासायनिक आबंध कमानी के रूप में दर्शाया गया है । द्रव्यमान केंद्र (CM) की रैखिक गति पर ध्यान दीजिए । (d) कोई भारी नाभिक (Ra) हल्के नाभिक (R_n) तथा एक ऐल्फा कण (He) में टूटता है । ये दोनों खण्ड द्रव्यमान केंद्र के सापेक्ष विपरीत दिशाओं में गति करते हैं । (e) पृथ्वी-चंद्रमा निकाय का द्रव्यमान केंद्र दीर्घ वृत्तीय कक्षा में गति करता है जबकि पृथ्वी तथा चंद्रमा स्वयं ऐसा नहीं करते ।

की वृत्तीय कक्षाओं में गति-ध्यान दीजिए ये दोनों तारे द्रव्यमान केंद्र के विपरीत अक्षों पर स्थित होने चाहिए।

O_2 जैसे किसी द्विपरमाणुक अणु को भी एक प्रकार के द्विअंगी निकाय की भांति माना जा सकता है। हां, यह सत्य है कि दोनों परमाणुओं को साथ बाँधकर रखने वाला बल गुरुत्वीय नहीं है। यदि कोई बाह्य बल कार्यरत नहीं है (अर्थात् अन्य अणुओं अथवा पात्र की दीवारों से कोई टक्कर न हो) तो द्रव्यमान केंद्र एक सरल रेखा के अनुदिश एकसमान गति करेगा। अणु में कंपन तथा घूर्णन गतियां भी हो सकती हैं परन्तु ये गतियां आंतरिक बलों द्वारा नियंत्रित होती हैं, अतः गुरुत्व केंद्र को प्रभावित नहीं करतीं और यह एक मुक्त कण की भांति व्यवहार करता है (चित्र 7.13(c))।

तीसरे उदाहरण के रूप में हम किसी गतिमान अस्थायी कण के रेडियोएक्टिव क्षय को लेते हैं। रेडियम नाभिक के रेडियोएक्टिव क्षय में एक रेडॉन नाभिक तथा एक ऐल्फा कण बनता है। ये दोनों कण एक साथ विभिन्न सरल रेखीय पदों के अनुदिश इस प्रकार गति करते हैं कि इनको द्रव्यमान केंद्र अपने मूल प्रक्षेप-पथ पर ही निरन्तर गतिमान रहता है [चित्र 7.13(d)]। अंतिमतः, हम पृथ्वी-चंद्रमा निकाय पर विचार करते हैं। चूंकि चंद्रमा का द्रव्यमान पृथ्वी के द्रव्यमान का लगभग 1/80वां भाग है, इस निकाय का द्रव्यमान केंद्र पृथ्वी-चंद्रमा को मिलाने वाली EM रेखा को 1:80 के अनुपात में विभाजित करता है। वास्तव में यह बिंदु पृथ्वी के भीतर अवस्थित होता है। यह कहना अधिक यथार्थ होगा कि यह बिंदु (अर्थात् द्रव्यमान केंद्र) सूर्य के परितः किसी परवलयिक प्रक्षेप-पथ पर गति करता है न कि पृथ्वी अथवा चंद्रमा एकाकी रूप से [चित्र 7.13(e)]।

समीकरण (7.26) के मूल परिणाम को समस्त निकाय के संवेग **p** के पदों में भी व्यक्त किया जा सकता है। हम यह जानते हैं कि संवेग **p** में परिवर्तन की दर कुल बाह्य बल $\mathbf{F}_e$ द्वारा प्राप्त होती है

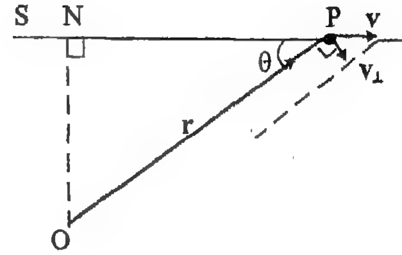
$$\mathbf{F}_e = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = M\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right) = M\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} \tag{7.26a}$$

7.6 कोणीय संवेग

किसी दृढ़ पिण्ड के कोणीय संवेग की संकल्पना से तो हम पहले से ही परिचित हैं। अब हमारा उद्देश्य इस संकल्पना का विस्तार, एक दूसरे पर बल आरोपित करने वाले, कणों के व्यापक (अदृढ़) निकायों तक करना है। हम सरलतम प्रकरण-एक कण जिस पर कोई बल कार्यरत नहीं है, से आरंभ करते हैं। सरल रेखा S के अनुदिश एकसमान वेग **v** से गतिमान m द्रव्यमान के किसी कण P पर विचार करिए। मान लीजिए, मूल बिंदु O, रेखा S के बाहर है तथा हम स्थिति सदिश OP को **r** द्वारा निर्दिष्ट करते हैं (चित्र 7.14)। बिंदु O से रेखा S पर डाला गया लंब ON है, तथा इसकी लंबाई $ON = OP\sin\theta$ है। यहां θ स्थिति सदिश **r** तथा वेग सदिश **v** के बीच का कोण है।

मूल बिंदु O के परितः कण P के कोणीय संवेग L की परिभाषा ON तथा कण के संवेग mv के गुणनफल के रूप में दी जाती है। प्रतीकों में

$$L = mvr\sin\theta \tag{7.27}$$



चित्र 7.14 किसी कण P की सरल रेखा S के अनुदिश एकसमान गति। मूलबिंदु O के परितः कोणीय संवेग L का मान $mvr\sin\theta$ होता है।

हम कोणीय संवेग L को द्रव्यमान m, कण P की मूल बिंदु O से दूरी $r = OP$ तथा $v\sin\theta = v_\perp$ रेखा OP के लंबवत् वेग घटक के गुणनफल के रूप में मान सकते हैं। अध्याय 4 में हमने देखा है कि किसी कण की कोणीय चाल $\omega = v_\perp r$ होती है। तब

$$L = mrv_\perp = mr^2\omega \tag{7.28}$$

चिह्न परिपाटी के अनुसार यदि रेखा OP तल में धनात्मक दिशा (वामावर्त) में घूर्णन करती है, तब L धनात्मक होता है। ध्यान दीजिए, चित्र 7.14 में कोणीय संवेग ऋणात्मक है। कोणीय संवेग प्रति एकांक द्रव्यमान को h द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है

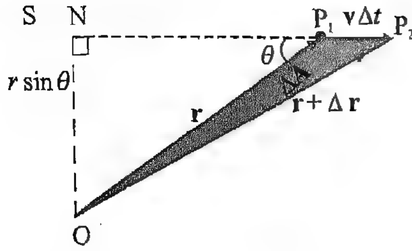
$$h = \frac{L}{m} = vr\sin\theta \tag{7.29}$$

इसकी एक ज्यामितीय व्याख्या है। रेखा OP समय Δt में $v\Delta t$ आधार तथा शीर्ष लंब $ON = r\sin\theta$, (चित्र 7.15) के त्रिभुज के रूप में तय कर लेती है, जिसका क्षेत्रफल

$$\Delta A = \frac{1}{2}\, v\Delta t \times r\sin\theta \tag{7.30}$$

प्रति एकांक समय में तय किए गए क्षेत्र $\Delta A/\Delta t$ को 'क्षेत्रीय वेग' कहते हैं। उपरोक्त समीकरण (7.29) से, यह कोणीय संवेग प्रति एकांक द्रव्यमान का ठीक आधा है,

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{h}{2} \tag{7.31}$$



चित्र 7.15 रेखा OP द्वारा Δt समय में घेरा गया क्षेत्रफल $\Delta A = OP_1P_2$ है। अनुपात $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ को क्षेत्रीय वेग कहते हैं जो प्रति एकांक द्रव्यमान कोणीय संवेग का आधा होता है।

ध्यान से देखने पर हम यह पाते हैं कि हमारा मुक्त कण रेखा S के अनुदिश उसी चाल v से गति करता रहता है, तथा मूल बिंदु से लंबवत् दूरी ON में समय के साथ कोई परिवर्तन नहीं होता। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि मूल बिंदु O के परितः कण का कोणीय संवेग नियत रहता है।

अब तक हमारे द्वारा दी गई कोणीय संवेग की परिभाषा में परिमाण तथा चिह्न दोनों हैं। यदि हमारी रुचि केवल एक तल में गति के प्रकरण में ही है तो यह परिभाषा पर्याप्त है। परंतु यदि हम त्रिविम गतियों के विषय में अध्ययन करना चाहते हैं तो हमें अपनी इस परिभाषा में सुधार करना होगा। तब हमें कोणीय संवेग को एक सदिश राशि की भांति मानना होगा। कोणीय संवेग को $\mathbf{r}$ तथा $\mathbf{p}$ के सदिश गुणनफल के रूप में परिभाषित किया जाता है।

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} \qquad (7.32)$$

पूर्व की ही भांति कोणीय संवेग L का परिमाण $mvr\sin\theta$ है।

हम किसी लघु समय अंतराल Δt के पश्चात् सदिश **L** में हुए परिवर्तन $\Delta \mathbf{L}$ का परिकलन करके यह प्रत्यक्ष जांच कर सकते हैं कि **L** नियत रहता है।

$$\Delta\mathbf{L} = \mathbf{L}(t+\Delta t) - \mathbf{L}(t)$$
$$= \mathbf{r}(t+\Delta t)\times\mathbf{p} - \mathbf{r}(t) - \mathbf{p}$$
$$= [\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)]\times\mathbf{p}$$

ध्यान दीजिए, चूंकि **p** नियत रहता है अतः समयों t तथा $(t+\Delta t)$ पर समान संवेग **p** का उपयोग किया गया है। कोष्ठक में दिया गया पद समय Δt में हुआ विस्थापन $\Delta \mathbf{r}$ है जिसका मान $\mathbf{v}\Delta t$ है।

अतः कोणीय संवेग में परिवर्तन की दर

$$\frac{\Delta \mathbf{L}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}\Delta t \times \mathbf{p}}{\Delta t} = \mathbf{v}\times\mathbf{p} = 0$$

हमने दो समान्तर सदिशों **v** तथा **p** के बीच सदिश गुणनफल रखा है, जो शून्य होता है। हमने एक विधि से परिचय कराने के लिए जिसका उपयोग हम बाद में करेंगे, कोणीय संवेग **L** की स्थिरता (संरक्षण) व्युत्पन्न की है। कोणीय संवेग के संरक्षण का नियम कितना अधिक महत्त्वपूर्ण एवं शक्तिशाली है, यह आप आगे आने वाले उदाहरणों में देखेंगे।

► ***उदाहरण 7.7*** यह दर्शाइए कि किसी मुक्त कण का कोणीय संवेग मूल बिंदु के उपयुक्त चुनाव द्वारा शून्य किया जा सकता है।

हल कण की गति की रेखा पर मूल बिंदु चुनिए। ऐसा करने पर, संवेग सदिश **p** स्थिति सदिश **r** के समान्तर होगा।

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p} = 0$$ ◄

अब हम यह कल्पना करते हैं कि हमारा कण P मुक्त नहीं है, उस पर बल **F** आरोपित है। हम फिर लघु समय अंतराल Δt में कोणीय संवेग में परिवर्तन $\Delta \mathbf{L}$ का परिकलन कर सकते हैं। पहले की ही भांति, इस लघु समय अंतराल में विस्थापन $v\Delta t$ है। परन्तु इस समय अंतराल में, संवेग में भी **p** से $\mathbf{p}+\Delta\mathbf{p}$ परिवर्तन होता है, जहां $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{F}\Delta t$ (न्यूटन के द्वितीय नियम के अनुसार)। तब हमारे $\Delta \mathbf{L}$ के परिकलन द्वारा

$$\Delta\mathbf{L} = (\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r})\times(\mathbf{p}+\Delta\mathbf{p}) - \mathbf{r}\times\mathbf{p}$$
$$= \Delta\mathbf{r}\times\mathbf{p} + \mathbf{r}\times\Delta\mathbf{p} + \Delta\mathbf{r}\times\Delta\mathbf{p}$$
$$= 0 + (\mathbf{r}\times\mathbf{F})\,\Delta t + \Delta\mathbf{r}\times\Delta\mathbf{p}$$

हमें पहले से ही ज्ञात है कि पद $\Delta\mathbf{r}\times\mathbf{p} = 0$। Δt से विभाजित करने पर हमें कोणीय संवेग में परिवर्तन की दर प्राप्त होती है,

$$\frac{\Delta\mathbf{L}}{\Delta t} = \mathbf{r}\times\mathbf{F} + \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}\times\mathbf{F}\Delta t$$

सीमा $\Delta t \to 0$ लेने पर द्वितीय पद $\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}\times\mathbf{F}\Delta t \to 0$ होता है। तब

$$\frac{d\mathbf{L}}{\Delta t} = \mathbf{r}\times\mathbf{F} \equiv \mathbf{T} \qquad (7.33)$$

समीकरण (7.33) के दाएं पक्ष में विद्यमान सदिश $\mathbf{r}\times\mathbf{F}$ को संकेत **T** द्वारा प्रदर्शित किया जाता है और यह हम पहले भी देख चुके हैं कि यह कण पर आरोपित बल **F** द्वारा मूल बिंदु O के परितः बल आघूर्ण है।

एक विशिष्ट महत्त्वपूर्ण परिस्थिति वह होती है जिसमें बल आघूर्ण शून्य हो जाता है। जब **F** सदिश **r** के समान्तर होता है, अर्थात् वह केंद्र O की ओर (अथवा उससे दूर) क्रिया करता है, तब $\mathbf{r}\times\mathbf{F} = 0$ होता है। इस प्रकार के बल को 'केंद्रीय बल' कहते हैं। दो बिंदु द्रव्यमानों के बीच गुरुत्वाकर्षण बल तथा दो बिंदु आवेशों के बीच कूलॉम बल, ये दोनों ही केंद्रीय बलों के उदाहरण हैं। इस प्रकरण में $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$, अर्थात् कण का कोणीय संवेग संरक्षित रहता है।

अब तक हमने सदैव ही किसी मूल बिंदु के सापेक्ष बल आघूर्ण की चर्चा की है। यदि मूल बिंदु में परिमाण **a** का स्थानांतरण

कर दिया जाए, तो नई स्थिति सदिश $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a}$। तब नया बल आघूर्ण

$$\mathbf{T}' = \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum_i \mathbf{a} \times \mathbf{F}_i = \mathbf{T} + \mathbf{a} \times \mathbf{F}_i$$

ऐसी दो परिस्थितियां हैं जिनमें बल आघूर्ण मूल बिंदु $\mathbf{a}$ के स्थानान्तरण पर निर्भर नहीं करता। पहली परिस्थिति में $\mathbf{a}$ कुल बल $\sum_i \mathbf{F}_i$ के समान्तर होता है। दूसरी परिस्थिति में, हमारे पास बलों $\mathbf{F}_i$ का एक निकाय होता है जिसका कुल योग $\sum_i \mathbf{F}_i = 0$ होता है। इस प्रकरण में, मूल बिंदु की स्थिति में कितना भी और किसी भी दिशा में स्थानान्तरण करें, बल आघूर्ण में कोई परिवर्तन नहीं होता। एक सरल तथा महत्त्वपूर्ण उदाहरण लेते हैं जिसमें दो समान एवं विपरीत बल $\mathbf{F}$ तथा $-\mathbf{F}$ किन्हीं दो समान्तर रेखाओं के अनुदिश, जिनके बीच पृथकन d कार्यरत है, इस परिस्थिति में किसी भी मूल बिंदु के परितः बल आघूर्ण $\mathbf{F} \times \mathbf{d}$ होता है। समान एवं विपरीत, ऐसे बलों के युगल को बल युग्म कहते हैं (अनुभाग 7.2 देखिए)। जब भी हम किसी बोतल के ढक्कन को घुमाकर खोलने का प्रयास करते हैं, हम स्वतः ही दो पार्श्वों पर विपरीत घर्षण बल आरोपित कर देते हैं। यदि हमें कोई किवाड़ खोलनी हो, तो यह कब्जों के परितः घूर्णन करती है। किवाड़ को खोलने के लिए आरोपित बल तथा कब्जों पर प्रतिक्रिया बल मिलकर बलयुग्म बनाते हैं। कब्जे से दूरतम बिंदु पर बल आरोपित करके (धक्का देकर) हम बल आघूर्ण को यथा संभव बड़ा बनाते हैं। समान बल के लिए, आलंब से बल की क्रिया रेखा की लंबवत् दूरी (अर्थात् 'उत्तोलक भुजा') में वृद्धि करके हम बल आघूर्ण को बड़ा बना सकते हैं।

अब हम कोणीय संवेग संरक्षण नियम का एक उपयोगी अनुप्रयोग सूर्य के चारों ओर किसी ग्रह की गति पर करते हैं। सूर्य को अत्यधिक भारी पिण्ड होने के कारण विराम में मानते हुए हम इसे अपना मूल बिंदु चुन लेते हैं। ग्रह के आकार को इसकी सूर्य से दूरी की तुलना में नगण्य माना जा सकता है, अर्थात् ग्रह को एक बिंदु द्रव्यमान मानते हैं। इस तथ्य के अतिरिक्त अन्य अधिक कुछ भी न जानते हुए कि बल $\mathbf{r}$ के अनुदिश है हम यह कह सकते हैं कि, $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$, को एक ऐसा अचर सदिश होना चाहिए जो $\mathbf{r}$ तथा $\mathbf{v}$ दोनों के लंबवत् हो। सर्वप्रथम, यह हमें बताता है कि हर समय सदिश $\mathbf{r}$ तथा $\mathbf{v}$ अचर सदिश $\mathbf{L}$ के लंबवत् निश्चित तल में अवस्थित रहेंगे। अर्थात् ग्रह की कक्षा किसी तल में अवस्थित है। साथ ही चूंकि $\mathbf{L}$ का परिमाण नियत है, हम पहले समीकरण (7.31) में परिभाषित क्षेत्रीय वेग से इसके संबंध का उपयोग कर सकते हैं। ग्रह को सूर्य से जोड़ने वाली सरल रेखा एक अचर क्षेत्रीय वेग से गति करती है अर्थात् यह "समान समय अंतरालों में समान क्षेत्र तय करती है"। ध्यान दीजिए, यह प्रमाण किसी भी केंद्रीय बल पर लागू किया जा सकता है। इसके लिए बल का व्युत्क्रम वर्ग के रूप में होना आवश्यक नहीं है।

7.7 कोणीय संवेग तथा कणों के निकाय की ऊर्जा

अब हम कणों के किसी ऐसे निकाय पर विचार करते हैं जिस पर आंतरिक तथा बाह्य दोनों बल कार्यरत हैं। हम एकाकी कणों के कोणीय आघूर्णों का योग करके कुल कोणीय संवेग $\mathbf{L}$ प्राप्त कर सकते हैं।

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_1\mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2 + \ldots\ldots + \mathbf{r}_N \times \mathbf{p}_N$$

इसी प्रकार निकाय पर कार्यरत कुल बाह्य बल आघूर्ण $\mathbf{T}$ को इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं।

$$\mathbf{T} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{1e} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{2e} + \ldots\ldots + \mathbf{r}_N \times \mathbf{F}_{Ne}$$

कणों के किसी निकाय के लिए उपरोक्त समीकरण (7.33) का व्यापीकरण एक अत्यंत महत्त्वपूर्ण परिणाम है जिसे हम विस्तृत प्रमाण के बिना ही लिख रहे हैं। कुल कोणीय संवेग में परिवर्तन की दर बाह्य बलों द्वारा आरोपित कुल बल आघूर्ण से प्राप्त होती है।

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{T}_e \qquad (7.34)$$

इस समीकरण में यह माना गया है कि आंतरिक बल कुल कोणीय संवेग के परिवर्तन में कोई योगदान नहीं देते। यह हमारे सामान्य अनुभवों से मेल खाती है। पिण्ड स्वयं तब तक चक्रण आरंभ नहीं करते जब तक उन पर कोई बाह्य बल आघूर्ण आरोपित न किए जाएं। समीकरण (7.34) स्थानान्तरीय गति के लिए दिए गए समीकरण (7.26a) का घूर्णी, तुल्यरूप है।

अब हम कणों के किसी निकाय की गतिज ऊर्जा पर विचार करते हैं। हम यह देखेंगे कि इसे दो घटकों में विभाजित किया जा सकता है जिनमें प्रत्येक का अपना स्पष्ट भौतिक अर्थ होता है। मान लीजिए द्रव्यमान केंद्र का स्थिति-सदिश $\mathbf{R}$ है। यह भी माना कि इसके सापेक्ष m_i द्रव्यमान के किसी कण का स्थिति-सदिश $\mathbf{r}_i$ है। तब इस द्रव्यमान की गतिज ऊर्जा

$$K = \frac{1}{2}m_i\left(\frac{d\mathbf{R}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}m_i\left(\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m_i\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) + m_i\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}\frac{d\mathbf{R}}{dt} \qquad (7.35)$$

अब हम सभी कणों के योगदानों का योग करते हैं। तब पहला पद इस प्रकार बन जाता है

$$\frac{1}{2}\left(\sum m_i\right)\left(\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right)^2$$

यह द्रव्यमान केंद्र की गति की गतिज ऊर्जा है।

पद $d\mathbf{r}_i/dt$ किसी ऐसे फ्रेम जिसमें द्रव्यमान केंद्र विराम में है, में कण i का वेग है। अतः दूसरा पद $(½)m_i(d\mathbf{r}_i/dt)^2$ द्रव्यमान केंद्र के सापेक्ष गति की गतिज ऊर्जा है। (यह चाहे पिण्ड दृढ़

हो अथवा नहीं सभी के लिए सत्य है) । अत: अब तक हमारे पास दो गतिज ऊर्जाओं का योग है । अब तीसरा पद का क्या है ? यह पद इस प्रकार है,

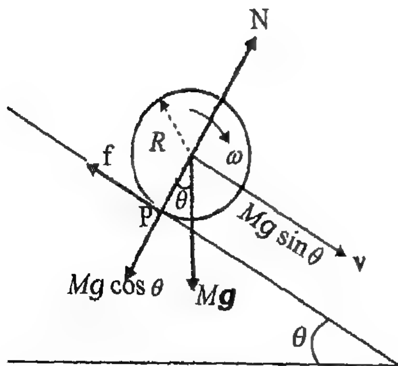
$$\left(\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right)\cdot\sum\frac{d}{dt}\left(\frac{m_i\mathbf{r}_i}{M}\right)\times M$$

ध्यान दीजिए कि इस प्रकार कुल गतिज ऊर्जा के तीसरे पद को पुन: लिखा गया है । याद कीजिए $\mathbf{r}_i$ द्रव्यमान केंद्र के सापेक्ष m_i की स्थिति-सदिश था । अत: $\Sigma(m_i\mathbf{r}_i)/M$ द्रव्यमान केंद्र (CM) का अपने स्वयं के सापेक्ष स्थिति-सदिश **R** है । अत: उपरोक्त समीकरण (7.35) का तीसरा पद लुप्त हो जाता है ।

अत: हमने मूल परिणाम सिद्ध कर लिया है ।

कुल गतिज ऊर्जा = द्रव्यमान केंद्र की गति की गतिज ऊर्जा + द्रव्यमान केंद्र के सापेक्ष गति की गतिज ऊर्जा

इस परिणाम की और विस्तृत व्याख्या के लिए हम किसी आनत तल पर किसी **सिलिंडर के बिना फिसले लोटनिक गति पर विचार करते हैं** । क्षैतिज से θ कोण पर झुके किसी आनत तल पर बिना फिसले लोटनिक गति करते M द्रव्यमान तथा R त्रिज्या के किसी ठोस सिलिंडर पर विचार कीजिए । आइए, हम सिलिंडर की ऐसी गति का वर्णन करते हैं जिसमें वह बिना फिसले लोटन करता है । इसमें वही प्रकरण है जिसमें किसी दृढ़ पिण्ड का द्रव्यमान केंद्र किसी सरल रेखा में गति करता है, और यह माना जाता है कि इस गति में कोई त्वरण है । चित्र 7.16 में आनत तल पर बिना फिसले लोटन करते सिलिंडर की अनुप्रस्थ काट दर्शाई गई है ।



चित्र 7.16 *बिना फिसले लोटन करता सिलिंडर ।*

सिलिंडर पर कार्यरत बाह्य बल इस प्रकार हैं :

(i) सिलिंडर का भार Mg जो ऊर्ध्वाधर अधोमुखी है और प्रभावी रूप से द्रव्यमान केंद्र से होकर गुजरता है,

(ii) सिलिंडर तथा समतल के स्पर्श बिंदु P (वास्तव में स्पर्श रेखा) पर अभिलंब बल N जो तल के अभिलंबवत् प्रभावी है, तथा

(iii) सिलिंडर तथा आनत तल के बीच बिंदु P पर प्रभावी घर्षण बल, जो तल के समान्तर स्पर्श रेखा के अनुदिश ऊपरिमुखी कार्यरत है ।

बिना फिसले लोटनिक गति करने की शर्त में यह निहित है कि ***प्रत्येक क्षण संपर्क रेखा क्षण भर के लिए विराम की स्थिति में है*** तथा इस संपर्क रेखा के परित: सिलिंडर घूर्णन गति करता है । यदि इस घूर्णी गति का कोणीय वेग ω है, जो कि द्रव्यमान केंद्र से गुजरने वाले क्षैतिज अक्ष के परित: घूर्णन गति के समान है, तब आनत तल पर नीचे की ओर लोटनिक गति करते सिलिंडर के द्रव्यमान केंद्र का रैखिक वेग **v** तथा त्वरण **a** क्रमश: $\mathbf{v} = R\omega$ तथा $\mathbf{a} = R\alpha$ हैं, यहां α आनत तल पर नीचे जाते सिलिंडर का कोणीय त्वरण है । चूंकि आनत तल के अभिलंबवत् दिशा में कोई गति नहीं है, अत:

$$N = Mg\cos\theta \qquad (7.36)$$

द्रव्यमान केंद्र की रैखिक गति के लिए न्यूटन के गति के द्वितीय नियम का प्रयोग करने पर, आनत तल पर नीचे की ओर लोटनिक गति करते सिलिंडर पर नेट बल :

$$F = Ma = M\frac{dv}{dt} = MR\frac{d\omega}{dt} = MR\alpha$$

$$= Mg\sin\theta - f \qquad (7.37)$$

समीकरणों (7.11) तथा (7.33) के कोणीय संवेग नियम का उपयोग करते हुए, द्रव्यमान केंद्र से होकर गुजरते क्षैतिज अक्ष के परित: इन समीकरणों को लागू करने पर, लोटनिक गति करते सिलिंडर पर कार्यरत बल आघूर्ण

$$T = \frac{dL}{dt} = T\frac{d\omega}{dt} = I\alpha$$

$$= \frac{Ia}{R} = Rf \qquad (7.38)$$

जिसमें $\quad I = \frac{1}{2}MR^2 \qquad (7.39)$

यहां I अपने द्रव्यमान केंद्र से गुजरने वाले सममित अक्ष के परित: ठोस सिलिंडर का जड़त्व आघूर्ण है ।

ध्यान दीजिए, न तो भार Mg और न ही अभिलंब बल N समीकरण (7.38) में बल आघूर्ण में कोई योगदान देते हैं । तथापि घर्षण बल f सिलिंडर को कोणीय त्वरण α से लोटनिक गति करने के लिए सिलिंडर पर बल आघूर्ण उत्पन्न करने के लिए

उत्तरदायी है। समीकरणों (7.37) तथा (7.38) से हमें प्राप्त होता है

$$f = Ia/R^2 \quad (7.40)$$

$$a = g\sin\theta/(1+I/MR^2) \quad (7.41)$$

समीकरण (7.39) से (7.41) तक हमें द्रव्यमान केंद्र के रैखिक त्वरण a तथा घर्षण बल f के लिए व्यंजक प्राप्त करने में हमारा मार्गदर्शन करती है

$$a = \frac{2}{3} g\sin\theta \quad (7.42)$$

$$F = Ma/2 = \frac{1}{3} Mg\sin\theta \quad (7.43)$$

समीकरण (7.42) यह दर्शाती है कि आनत तल पर नीचे की ओर गति करते सिलिंडर का रैखिक त्वरण a गुरुत्वीय त्वरण g से कम होता है अर्थात् $a<g$। साथ ही समीकरण (7.43) से यह स्पष्ट है कि घर्षण बल f सिलिंडर के भार Mg से कम है अर्थात् $f<Mg$। यहां जड़त्व आघूर्ण का प्रभाव प्रत्यक्ष रूप से स्पष्ट है, उदाहरणार्थ यदि सिलिंडर ठोस न होकर खोखला होता है (जिसके लिए $I=MR^2$), तो समीकरण (7.42) तथा (7.43) के कारक $(\frac{2}{3})$ तथा $(\frac{1}{3})$दोनों ही $(\frac{1}{2})$ में परिवर्तित हो जाते हैं।

समीकरणों (7.36) तथा (7.43) के उपयोग करने पर सिलिंडर तथा आनत तल के बीच स्थैतिक घर्षण गुणांक

$$\mu_S = \frac{f}{N} = \frac{1}{3}\tan\theta \quad (7.44)$$

व्यापक रूप में, किसी आनत तल पर किसी ठोस सिलिंडर के बिना फिसले लोटनिक गति करने के लिए μ_s तथा θ के मानों को निम्नलिखित शर्त को संतुष्ट करना चाहिए :

$$\tan\theta \le 3\mu_s \quad (7.45)$$

वैकल्पिक रूप में, ऊर्जा संरक्षण नियमों के तर्कों के द्वारा भी हम उपरोक्त परिणाम प्राप्त कर सकते हैं। हम यह सरलतापूर्वक दर्शा सकते हैं कि जब कोई सिलिंडर बिना फिसले लोटनिक गति करता है तब चूंकि सिलिंडर का द्रव्यमान केंद्र एक सरल रेखा में गति करता है तथा उसी क्षण वह घूर्णन गति भी करता है, अतः इसकी कुल ऊर्जा में स्थानान्तरीय तथा घूर्णन दोनों ही गतिज ऊर्जाओं का योगदान है जो इस प्रकार है

$$K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

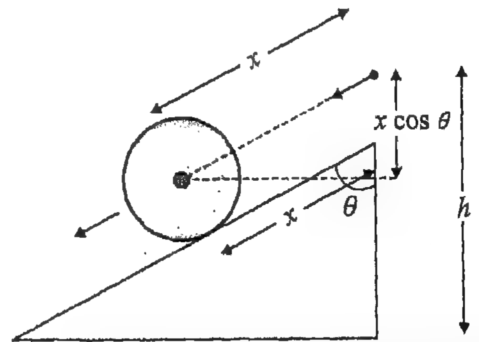
$$= \frac{1}{2}(I+MR^2)\,\omega^2 \quad (7.46)$$

जब सिलिंडर आनत तल पर नीचे की ओर लोटनिक गति करता है, तब उसकी कुल गतिज ऊर्जा निरन्तर बढ़ती है। तब चूंकि सिलिंडर का द्रव्यमान केंद्र निरन्तर अपनी ऊंचाई में कमी करता है, अतः सिलिंडर की गतिज ऊर्जा में हुई उपरोक्त वृद्धि गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा में हानि होने के कारण होती है। इन दोनों ऊर्जाओं को संतुलित करने पर समीकरण (7.43) पुनः प्राप्त किया जा सकता है।

ध्यान दीजिए, समान द्रव्यमान के दो पिण्डों का जड़त्व आघूर्ण समान नहीं होता। उदाहरण 7.8 में दिए गए तर्कों के आधार पर समान द्रव्यमान तथा विमाओं के दो गोले, एक ठोस तथा दूसरा खोखला के प्रकरण द्वारा, आइए इस तथ्य की विस्तृत व्याख्या करें।

> **उदाहरण 7.8** ऐलुमिनियम का एक ठोस गोला तथा उतनी ही त्रिज्या एवं द्रव्यमान का लोहे का एक खोखला गोला लीजिए। आप यह कैसे ज्ञात करेंगे कि इनमें कौन-सा गोला खोखला है?

हल जड़त्व आघूर्ण का परिकलन किए बिना भी हम यह देख सकते हैं कि दूसरे गोले का जड़त्व आघूर्ण पहले गोले की तुलना में अधिक होगा। इसका कारण यह है कि खोखले गोले में द्रव्यमान का विभाजन घूर्णन अक्ष से दूर है। समान कोणीय वेग पर खोखले गोले की गतिज ऊर्जा अपेक्षाकृत अधिक होती है। इसी के कारण बाहर से एक से दिखाई देने पर भी समान द्रव्यमान के दो गोलों, एक ठोस तथा दूसरा खोखला, में भेद किया जा सकता है। इसकी व्याख्या एक प्रयोग द्वारा की जा सकती है जिसमें कोई गोला कोण θ के आनत तल पर नीचे की ओर बिना फिसले लोटनिक गति करता है (चित्र 7.17)।



चित्र 7.17 कोई गोला आनत तल पर नीचे की ओर लोटनिक गति करते हुए। स्थितिज ऊर्जा में हुई हानि घूर्णन तथा स्थानान्तरीय गतिज ऊर्जा में रूपान्तरित हो जाती है। यदि एक गोले का जड़त्व आघूर्ण समान त्रिज्या के दूसरे गोले से अधिक है तो उसकी घूर्णन गतिज ऊर्जा अधिक होती है तथा इसीलिए उसकी स्थानान्तरीय गतिज ऊर्जा कम होती है, अर्थात् वह अपेक्षाकृत धीरे से नीचे की ओर लोटनिक गति करता है।

यदि आनत तल पर नीचे की ओर चली यह दूरी x है तथा चाल $v = dx/dt$ है, तब कुल गतिज ऊर्जा

$$K = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

चूँकि गोला बिना फिसले लोटनिक गति करता है, संपर्क बिंदु तात्कालिक रूप से विराम में होता है । गोले का द्रव्यमान केंद्र v वेग से गति करता है। गोले का आनत तल के संपर्क का बिंदु वेग $v - \omega R$ से गति करता है क्योंकि घूर्णी गति इसे पीछे की ओर ले जाती है । फिसलन न हो इसके लिए $v - \omega R = 0$, अर्थात् $\omega = v/R$ । स्थितिज ऊर्जा $Mg\,(h - x\cos\theta)$ को जोड़ने पर हमें कुल ऊर्जा प्राप्त होती है जो संरक्षित रहती है । यह ऊर्जा निम्न व्यंजक के रूप में लिखी जा सकती है :

$$E = M\left[\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\frac{I}{M}\frac{v^2}{R^2}\right] + Mg(h - x\cos\theta)$$

$$= \frac{1}{2}Mv^2\left[1 + \frac{I}{MR^2}\right] + Mg(h - x\cos\theta) \qquad (7.47)$$

$\frac{1}{2}Mv^2$ से गुणा होने वाले कोष्ठक का द्वितीय पद (I/MR^2) विमाहीन है । यह बताता है कि समान चाल v के लिए लोटनिक गति करते दृढ़ पिण्ड की गतिज ऊर्जा कम होती है। इसका अर्थ यह हुआ कि समान गतिज ऊर्जा के लिए यदि जड़त्व आघूर्ण अधिक है तो चाल कम होगी । क्या अब आप समझ सकते हैं कि हमारे समान द्रव्यमान तथा समान त्रिज्या के दो गोलों में ठोस गोले की अपेक्षा खोखले गोले ने नीचे की ओर अपेक्षाकृत कम चाल से लोटनिक गति क्यों की ? ◀

संपर्क बिंदु से गुजरने वाले अक्ष के परितः कोणीय चाल ω से घूर्णन गति मान कर भी गतिज ऊर्जा ज्ञात की जा सकती थी । इस अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण $I + MR^2$ है । इस जड़त्व आघूर्ण में $\frac{1}{2}\omega^2$ से गुणा करने पर तथा $\omega = v/R$ का उपयोग कर, कुल गतिज ऊर्जा का उपरोक्त व्यंजक प्राप्त हो जाता है ।

सारांश

1. दृढ़ पिण्ड वह होता है जिसके विभिन्न कणों की दूरियों में कोई परिवर्तन नहीं होता, यद्यपि वे गति करते हैं ।
2. कोई दृढ़ पिण्ड दो प्रकार की गतियां कर सकता है । पहली है किसी अक्ष के परितः घूर्णी गति, तथा दूसरी है स्थानान्तरीय गति जिसमें पिण्ड के समस्त कण समान वेग से गति करते हैं ।
3. जब किसी दृढ़ पिण्ड का एक बिंदु स्थिर होता है तब घूर्णी संतुलन की यह शर्त है कि उस पर कार्यरत समस्त बलों के बल-आघूर्णों के योग को लुप्त (शून्य) होना चाहिए

$$\Sigma \mathbf{T}_i = \Sigma\, \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = 0$$

$\mathbf{r}_i$ को स्थिर बिंदु से मापा जाता है ।

4. $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 .... \mathbf{r}_N$ पर रखी $m_1, m_2 ... m_N$ के $\mathbf{N}$ द्रव्यमानों का गुरुत्व केंद्र (जिसे द्रव्यमान केंद्र भी कहते हैं) अवस्थित होता है

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + ... + m_N\mathbf{r}_N}{m_1 + m_2 + ... + m_N}$$

यदि पिण्ड अपने गुरुत्व केंद्र पर टिका होता है तब वह प्रत्येक स्थिति में घूर्णी संतुलन में होता है । यदि कोई अन्य बिंदु स्थिर रखा गया है, तब संतुलन के लिए गुरुत्व केन्द्र को उस बिंदु के ऊपर अथवा नीचे अवस्थित होना चाहिए।

5. जब कोई दृढ़ पिण्ड किसी स्थिर अक्ष के परितः कोणीय चाल ω से घूर्णी गति करता है, तब उसकी गतिज ऊर्जा को $\frac{1}{2}I\omega^2$ के रूप में लिख सकते हैं । आनुपातिकता कारक I की विमाएं द्रव्यमान × दूरी^{2} की विमाएं होती हैं । N कणों के निकाय के लिए, यह N पदों का योग होता है जिनमें से प्रत्येक पद किसी कण की संहति m_i तथा उसकी अक्ष से दूरी $r_{i\perp}$ के वर्ग का गुणनफल होता है ।

$$I = \sum m_i \mathbf{r}_{i\perp}^{\;2}$$

यदि हमें गुरुत्व केंद्र से गुजरने वाले अक्ष के लिए I ज्ञात है, तो a दूरी पर किसी समान्तर अक्ष के लिए इसका मान $I + Ma^2$ होता है।

6. किसी तल पर किसी गोले अथवा सिलिंडर की बिना फिसले लोटनिक गति में द्रव्यमान केंद्र की स्थानान्तरीय गति होती है तथा उसके अपने अक्ष के परितः घूर्णी गति होती है । इन दोनों का संयोजन यह सुनिश्चित करता है कि गोले (अथवा सिलिंडर) तथा तल के बीच का संपर्क बिंदु तात्क्षणिक रूप से विराम में रहे हैं । हम इस गति को संपर्क बिंदु से गुजरने वाले अक्ष के परितः पूर्णतः घूर्णी गति भी कह सकते हैं ।
7. N कणों का कोई निकाय, जिसका दृढ़ पिण्ड होना आवश्यक नहीं है, के प्रत्येक कण पर भिन्न-भिन्न बाह्य बल कार्यरत हो सकते हैं । ऐसे निकाय के द्रव्यमान केंद्र की गति का त्वरण निकाय पर कार्यरत सभी बाह्य बलों के योग को कुल द्रव्यमान द्वारा विभाजित करने पर प्राप्त होता है

$$\frac{l}{M}\sum F_{ei} = \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}$$

न्यूटन के तृतीय नियम के कारण आंतरिक बल द्रव्यमान केंद्र में कोई त्वरण उत्पन्न नहीं करते ।

8. किसी N कणों के निकाय का मूल बिंदु $\mathbf{r}_i$ के सापेक्ष कोणीय संवेग सदिश $\mathbf{L}$ द्वारा परिभाषित किया जाता है

$$\mathbf{L} = \sum m_{\perp} \mathbf{r}_i \times v_i = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$$

यहां पर $\mathbf{v}_i$'s तथा $\mathbf{p}_i$'s क्रमशः कणों के वेग तथा संवेग हैं ।

जब कणों के बीच कोई बाह्य बल तथा केंद्रीय बल नहीं होता तब $\mathbf{L}$ संरक्षित रहता है, अर्थात् $\frac{d\mathbf{L}}{dt} =$ नियतांक। अधिक व्यापक रूप में, किसी पिण्ड के भीतरी आन्तरिक बल उसके कुल कोणीय संवेग में कोई परिवर्तन नहीं कर सकते । जब $\mathbf{r}_i$ स्थिति पर रखे कण पर बाह्य बल $\mathbf{F}_{ei}$ कार्य करते हैं, तब $\mathbf{r}_i$ के मूल बिंदु के सापेक्ष कण का बल आघूर्ण $\mathbf{T}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ei}$। पिण्ड पर कुल बल आघूर्ण $\mathbf{T} = \sum \mathbf{T}_i$ तथा यह कुल कोणीय संवेग में परिवर्तन की दर $\frac{d\mathbf{L}}{dt}$ के बराबर होता है।

9. किसी निश्चित अक्ष के परितः घूर्णी गति करते दृढ़ पिण्ड के लिए उस अक्ष के समान्तर कोणीय संवेग $\mathbf{L} = I\omega$ होता है, यहां I उस अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण है । कोणीय त्वरण $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ का मान $\mathbf{T} = I\alpha$ से प्राप्त होता है, यहां $\mathbf{T}$ अक्ष के समान्तर कुल बल आघूर्ण है ।

कणों के किसी सामान्य (दृढ़ होना आवश्यक नहीं) निकाय के लिए, कुल गतिज ऊर्जा दो भागों में विभाजित हो जाती है

(i) द्रव्यमान-केंद्र के सापेक्ष गति की गतिज ऊर्जा $\sum \frac{1}{2} m_i \left(v_i - \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right)^2$ तथा

(ii) द्रव्यमान-केंद्र की गति की गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2} M \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt} \right)^2$

भौतिक राशि	प्रतीक	विमाएं	मात्रक	टिप्पणी
कोणीय वेग	ω	$[T^{-1}]$	rad s^{-1}	$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{v} \times \mathbf{r}$
कोणीय संवेग	$\mathbf{L}$	$[ML^2T^{-1}]$	J s	$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$
बल आघूर्ण	$\mathbf{T}$	$[ML^2T^{-2}]$	N m	$\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$
जड़त्व आघूर्ण	I	$[ML^2]$	kg m^2	$I = \sum m_i r_{i\perp}^2$

विचारणीय विषय

1. कुल बाह्य बल का लुप्त होना तथा कुल बाह्य बल आघूर्ण का लुप्त होना स्वतंत्र शर्तें हैं । हम एक शर्त का उपयोग दूसरे के बिना कर सकते हैं । किसी बल युग्म में, कुल बाह्य बल शून्य होता है परन्तु कुल बल आघूर्ण शून्येतर होता है । संगामी बलों का योग शून्येतर हो सकता है परन्तु बल आघूर्ण शून्य होता है ।
2. यदि कुल बाह्य बल शून्य है, तो किसी निकाय पर कुल बल आघूर्ण मूल बिंदु पर निर्भर नहीं करता ।
3. किसी दृढ़ पिण्ड के कोणीय वेग के लिए किसी मूल बिंदु का संदर्भ आवश्यक नहीं होता ।
4. रैखिक संवेग तथा वेग सदिश सदैव ही एक दूसरे के समान्तर होते हैं। परन्तु कोणीय संवेग $\mathbf{L}$ तथा कोणीय वेग ω अनिवार्यतः समान्तर सदिश नहीं होते ।

5. इस अध्याय में वर्णित सरल स्थितियों के लिए, जब घूर्णन गति किसी ऐसे स्थिर अक्ष के परितः होती है, जो सममित अक्ष भी होता है, तब संबंध $\mathbf{L} = I\omega$ लागू होता है ।
6. परिमित आकार के पिण्डों (अथवा कणों के निकायों) के लिए न्यूटन का गति का द्वितीय नियम, कणों के लिए न्यूटन के द्वितीय तथा न्यूटन के तृतीय नियम पर आधारित है ।
7. किसी पिण्ड का गुरुत्व केंद्र केवल तभी उसके द्रव्यमान केंद्र के संपाती होता है जब गुरुत्वीय क्षेत्र एकसमान हो ।
8. किसी जड़त्वीय फ्रेम में, व्यापक रूप से संबंध $\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$ सत्य है । तथापि, विलक्षण रूप में, किसी द्रव्यमान केंद्र फ्रेम में, चाहे वह त्वरित है (अतः अजड़त्वीय है), यह संबंध सत्य है । ऐसा होने का कारण द्रव्यमान-केंद्र फ्रेम की विशिष्ट प्रकृति है ।

अभ्यास

7.1 एकसमान द्रव्यमान घनत्व के निम्नलिखित पिण्डों में प्रत्येक के द्रव्यमान केंद्र की अवस्थिति लिखिए :

(a) गोला, (b) सिलिंडर, (c) छल्ला तथा (d) घन ।

क्या किसी पिण्ड का द्रव्यमान केंद्र आवश्यक रूप से उस पिण्ड के भीतर स्थित होता है ?

7.2 HCl अणु में दो परमाणुओं के नाभिकों के बीच पृथकन लगभग 1.27Å (1Å = 10^{-10} m) है । इस अणु के द्रव्यमान केंद्र की लगभग अवस्थिति ज्ञात कीजिए । यह ज्ञात है कि क्लोरीन का परमाणु हाइड्रोजन के परमाणु की तुलना में 35.5 गुना भारी होता है तथा किसी परमाणु का समस्त द्रव्यमान उसके नाभिक पर केंद्रित होता है ।

7.3 कोई बच्चा किसी चिकने क्षैतिज फर्श पर एकसमान चाल v से गतिमान किसी लंबी ट्रॉली के एक सिरे पर बैठा है । यदि बच्चा खड़ा होकर ट्रॉली पर किसी भी प्रकार से दौड़ने लगता है, तब (ट्रॉली + बच्चा) निकाय के द्रव्यमान केंद्र की चाल क्या है ?

7.4 लंबाई a के किसी समबाहु त्रिभुज के शीर्षों पर तीन द्रव्यमान बिंदु m_1, m_2 तथा m_3 अवस्थित हैं । m_1 से गुजरने वाले त्रिभुज के शीर्षलंब के अनुदिश अक्ष के परितः निकाय का जड़त्व आघूर्ण क्या है ?

7.5 त्रिज्या R तथा द्रव्यमान M की किसी वृत्ताकार चक्रिका का जड़त्व आघूर्ण, एक ऐसे अक्ष के परितः बताइए जो (i) इसके केंद्र से गुजरता है तथा चक्रिका के अभिलंबवत् है; (ii) इसके किनारे पर किसी बिंदु से गुजरता है तथा चक्रिका के अभिलंबवत् है । यह ज्ञात है कि चक्रिका का अपने किसी भी व्यास के परितः जड़त्व आघूर्ण $\frac{1}{4}MR^2$ है ।

7.6 20 kg द्रव्यमान का कोई ठोस सिलिंडर अपने अक्ष के परितः 100 rad s^{-1} की कोणीय चाल से घूर्णन कर रहा है । सिलिंडर की त्रिज्या 0.25 m है । सिलिंडर के घूर्णन से संबद्ध गतिज ऊर्जा क्या है ? सिलिंडर के अपने अक्ष के परितः कोणीय संवेग का परिमाण क्या है ?

7.7 (i) कोई बच्चा किसी घूर्णिका (घूर्णीमंच) पर अपनी दोनों भुजाओं को बाहर की ओर फैलाकर खड़ा है । घूर्णिका को 40 rev/min की कोणीय चाल से घूर्णन कराया जाता है । यदि बच्चा अपने हाथों को वापस सिकोड़ कर अपना जड़त्व आघूर्ण अपने आरंभिक जड़त्व आघूर्ण का 2/5 गुना कर लेता है, तो इस स्थिति में उसकी कोणीय चाल क्या होगी ? यह मानिए कि घूर्णिका की घूर्णन गति घर्षणरहित है ।

(ii) यह दर्शाइए कि बच्चे की घूर्णन की नई गतिज ऊर्जा उसकी आरंभिक घूर्णन की गतिज ऊर्जा से अधिक है । आप गतिज ऊर्जा में हुई इस वृद्धि की व्याख्या किस प्रकार करेंगे ?

7.8 3kg द्रव्यमान तथा 40 cm त्रिज्या के किसी खोखले सिलिंडर पर कोई नगण्य द्रव्यमान की रस्सी लपेटी गई है । यदि रस्सी को 30 N बल से खींचा जाए तो सिलिंडर का कोणीय त्वरण क्या होगा ? रस्सी का रैखिक त्वरण क्या है ? यह मानिए कि इस प्रकरण में कोई फिसलन नहीं है ।

7.9 5 kg द्रव्यमान तथा 30 cm त्रिज्या का कोई सिलिंडर जो अपने अक्ष पर घूर्णन करने के लिए स्वतंत्र है आरंभ में 3 kg m^2 s^{-1} का कोई कोणीय आवेग ग्रहण करता है, तथा इसके प्रत्येक 4 s पश्चात् वह इसी प्रकार के आवेग ग्रहण करता रहता है । आरंभिक आवेग ग्रहण करने के 30 s पश्चात् सिलिंडर की कोणीय चाल क्या है ? आरंभ में सिलिंडर विरामावस्था में है ।

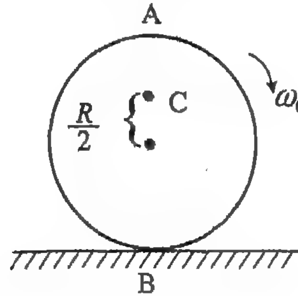
7.10 किसी घूर्णक (रोटर) की 200 rad s^{-1} की एकसमान कोणीय चाल बनाए रखने के लिए एक इंजन द्वारा 180 N m का बल आघूर्ण प्रेषित करना आवश्यक होता है । इंजन के लिए आवश्यक शक्ति ज्ञात कीजिए । (नोट : घर्षण की अनुपस्थिति में एकसमान कोणीय वेग होने में यह समाविष्ट है कि बल आघूर्ण शून्य है । व्यवहार में लगाए गए बल आघूर्ण की आवश्कता घर्षणी बल आघूर्ण को निरस्त करने के लिए होती है ।) यह मानिए कि इंजन की दक्षता 100% है ।

अतिरिक्त अभ्यास

7.11 किसी खोखले सिलिंडर तथा किसी ठोस गोले जिनकी द्रव्यमान एवं त्रिज्या समान हैं, पर समान परिमाण के बल आघूर्ण लगाए जाते हैं । सिलिंडर अपने सममिति के मानक अक्ष के परितः घूर्णन करने के लिए स्वतंत्र है तथा गोला अपने केंद्र से गुजरने वाले किसी अक्ष के परितः घूर्णन करने के लिए स्वतंत्र है । किसी निश्चित समय के पश्चात् इनमें से कौन अधिक कोणीय चाल प्राप्त कर लेगा ?

7.12 दो चक्रिकाएं जिनके अपने-अपने अक्षों (चक्रिका के अभिलंबवत् तथा चक्रिका के केंद्र से गुजरने वाले) के परितः जड़त्व आघूर्ण I_1 तथा I_2 हैं और जो ω_1 तथा ω_2 कोणीय चालों से घूर्णन कर रही हैं, को उनके घूर्णन अक्ष संपाती करके आमने-सामने लाया जाता है । (a) इस दो चिक्रिका निकाय की कोणीय चाल क्या है ? (b) यह दर्शाइए कि इस संयोजित निकाय की गतिज ऊर्जा दोनों चक्रिकाओं की आरंभिक गतिज ऊर्जाओं के योग से कम है । ऊर्जा में हुई इस हानि की आप कैसे व्याख्या करेंगे ? $\omega_1 \neq \omega_2$ लीजिए ।

7.13 अपने अक्ष पर ω_0 कोणीय चाल को घूर्णन करने वाली किसी चक्रिका को धीरे से (स्थानान्तरीय धक्का दिए बिना) किसी पूर्णतः घर्षणरहित मेज पर रखा जाता है । चक्रिका की त्रिज्या R है । चित्र 7.18 में दर्शाई चक्रिका के बिंदुओं A, B तथा C पर रैखिक वेग क्या हैं ? क्या यह चक्रिका चित्र में दर्शाई दिशा में लोटनिक गति करेगी ?



चित्र 7.18

7.14 स्पष्ट कीजिए कि चित्र 7.18 में अंकित दिशा में चक्रिका की लोटनिक गति के लिए घर्षण होना आवश्यक क्यों है ?

(a) B पर घर्षण बल की दिशा तथा परिशुद्ध लुढ़कन आरंभ होने से पूर्व घर्षणी बल-आघूर्ण की दिशा क्या है ?

(b) परिशुद्ध लोटनिक गति आरंभ होने के पश्चात् घर्षण बल क्या है ?

7.15 10 cm त्रिज्या की कोई ठोस चक्रिका तथा इतनी ही त्रिज्या का कोई छल्ला किसी क्षैतिज मेज पर एक ही क्षण 10π rad s^{-1} की कोणीय चाल से रखे जाते हैं । इनमें से कौन पहले लोटनिक गति आरंभ कर देगा । गतिज घर्षण गुणांक $\mu_k = 0.2$ ।

7.16 10 kg द्रव्यमान तथा 15 cm त्रिज्या का कोई सिलिंडर किसी 30° झुकाव के समतल पर परिशुद्धतः लोटनिक गति कर रहा है । स्थैतिक घर्षण गुणांक $\mu_k \times 0.25$ है ।

(a) सिलिंडर पर कितना घर्षण बल कार्यरत है ?

(b) लोटन की अवधि में घर्षण के विरुद्ध कितना कार्य किया जाता है ?

(c) यदि समतल के झुकाव θ में वृद्धि कर दी जाए ता θ के किस मान पर सिलिंडर परिशुद्धतः लोटनिक गति करने की बजाय फिसलना आरंभ कर देगा ?

7.17 समान द्रव्यमानों तथा समान त्रिज्याओं के तीन पिण्ड - एक छल्ला, एक चक्रिका तथा एक गोला समान ऊंचाई h से एक ही क्षण किसी आनत तल पर लोटनिक गति आरंभ करते हैं । इन तीनों में से कौन (a) सबसे पहले, तथा (b) सबसे बाद में नीचे पहुंचेगा ?

7.18 125 rad s^{-1} की आरंभिक कोणीय चाल से घूर्णन करता 20 kg द्रव्यमान तथा 0.12 m त्रिज्या का कोई ठोस सिलिंडर धीरे से (अर्थात् स्थानान्तरीय धक्का दिए बिना) किसी क्षैतिज मेज पर रखा जाता है तथा सिलिंडर व मेज के बीच गतिज घर्षण गुणांक $\mu_k = 0.15$ है ।

(a) कितने समय के पश्चात सिलिंडर लोटनिक गति आरंभ करता है ?

(b) सिलिंडर की (a) आरंभिक स्थानान्तरीय ऊर्जा, (b) आरंभिक घूर्णी ऊर्जा, तथा (c) आरंभिक कुल ऊर्जा कितनी है?

(c) सिलिंडर की अंतिम (अर्थात् लोटनिक गति आरंभ होने के पश्चात्) (a) स्थानान्तरीय ऊर्जा, (b) घूर्णी ऊर्जा, तथा (c) कुल ऊर्जा कितनी है ?

(d) क्या सिलिंडर की गति की कुल अंतिम ऊर्जा कुल आरंभिक ऊर्जा के बराबर है ? यदि नहीं, तो इतने अंतर की ऊर्जा कहां विलुप्त हो जाती है ?

(e) गति की ऊर्जा में हुई कुल हानि का विवरण निम्नलिखित ढंग से दीजिए : पिण्ड पर इसकी स्थानान्तरीय गति के लिए घर्षण द्वारा किया गया कार्य, तथा पिण्ड द्वारा इसकी घूर्णी गति के संदर्भ में घर्षण के विरुद्ध किया गया कार्य ज्ञात कीजिए । यह दर्शाइए कि पिण्ड पर घर्षण द्वारा किया गया नेट कार्य ऋणात्मक है तथा यह परिमाण में ऊपर (d) में परिकलित ऊर्जा में हुई कुल हानि के बराबर है ।

7.19 नीचे दिए गए प्रत्येक प्रकथन को ध्यानपूर्वक पढ़िए तथा कारण सहित उत्तर दीजिए कि इनमें से कौन-सा सत्य है और कौन-सा असत्य है ।

(a) लोटनिक गति करते समय घर्षण बल उसी दिशा में कार्यरत होता है जिस दिशा में पिण्ड का द्रव्यमान केंद्र गति करता है।

(b) लोटनिक गति करते समय संपर्क बिंदु की तात्क्षणिक चाल शून्य होती है ।

(c) लोटनिक गति करते समय संपर्क बिंदु का तात्क्षणिक त्वरण शून्य होता है ।

(d) परिशुद्ध लोटनिक गति के लिए घर्षण के विरुद्ध किया गया कार्य शून्य होता है ।

(e) किसी पूर्णतः घर्षणरहित आनत समतल पर नीचे की ओर गति करते पहिए की गति फिसलन गति (लोटनिक गति नहीं) होगी।

अभ्यास तथा अतिरिक्त अभ्यासों के उत्तर

अध्याय 2

2.1 (a) 10^{-6}; (b) 1.5×10^{4}; (c) 5:11.3; (d) 1.13×10^{4}

2.2 (a) 10^{7}; (b) 10^{-16}; (c) 3.888×10^{4}; (d) 6.67×10^{-8}

2.5 500

2.6 (iii)

2.7 0.035 mm

2.9 94.1

2.10 (i) 1; (ii) 3; (iii) 4; (iv) 4, (v) 4; (vi) 4

2.11 8.72 m^2 ; 0.0855 m^3

2.12 (a) 2.3 kg ; (b) 0.02 g

2.13 13%; 3.8

2.14 विमीय आधार पर (ii) तथा (iii) गलत हैं । संकेत : किसी त्रिकोणमितीय फलन का कोणांक सदैव विमाहीन होना चाहिए ।

2.15 सही सूत्र $m = m_0 \left(1-v^2/c^2\right)^{-1/2}$ है ।

2.16 संकेत : $\tan\theta$ विमाहीन होना चाहिए । सही सूत्र $\tan\theta = v/v'$ है, यहां v' वर्षा की चाल है ।

2.17 10^{11} से 10^{12} में 1 भाग की परिशुद्धता ।

2.18 $\cong 3\times 10^{-7}\,m^3$

2.19 $\cong 10^4$; किसी गैस में अंतराअणुक पृथकन अणु के आकार से बहुत अधिक होता है ।

2.20 $\cong 0.7\times 10^3$ kg m^{-3}, ठोस प्रावस्था में परमाणु दृढ़तापूर्वक संकुलित होते हैं, अत: परमाणु द्रव्यमान घनत्व ठोस के द्रव्यमान घनत्व के लगभग बराबर होता है ।

2.21 $\cong 0.3\times 10^{18}\,m^{-3}$ नाभिकीय घनत्व द्रव्य के परमाण्वीय घनत्व का प्ररूपी 10^{15} गुना है ।

2.23 $\cong 3\times 10^{16}$ m; लंबाई के मात्रक के रूप में 1 पारसेक को 3.084×10^{16} m के बराबर परिभाषित किया जाता है ।

2.24 1.32 पारसेक; 2.64″ (सेकंड, चाप का)

2.25 3.84×10^8 m

2.26 55.8 km

2.27 2.8×10^{22} km

2.30 1.4×10^3 kgm^{-3}, सूर्य का द्रव्यमान-घनत्व द्रवों/ठोसों के घनत्वों के परिसर में होता है, गैसों के घनत्वों के परिसर में नहीं । सूर्य की भीतरी परतों के कारण बाहरी परतों पर अंतर्मुखी गुरुत्वाकर्षण बल के कारण ही गर्म प्लैज़्मा का इतना उच्च घनत्व हो जाता है ।

2.31 1.429×10^5 km

2.32 $\varepsilon = 22.3^\circ$

बुध और पृथ्वी के बीच की दूरी = 1.384×10^8 km

2.33 0.63 गुना कम

2.35 3,581 km

2.36 2.31×10^{41} J

2.37 3.54×10^8 वर्ष

2.38 संकेत : राशि $e^4/(16\pi^2\varepsilon_0^2 m_p m_e^2 c^3 G)$ की विमा समय की विमा होती है ।

अध्याय 3

3.1 (a), (b)

3.2 (a) A .... B, (b) A .... B, (c) B .... A, (d) वही (e) B .... A.........एक बार ।

3.4 37 s

3.5 1000 km h^{-1}

3.6 3.06 m s^{-2}, 11.4 s

3.7 1250 m (संकेत : B की A के सापेक्ष गति देखिए)

3.8 1 m s^{-2} (संकेत : A के सापेक्ष B एवं C की गति देखिए ।

3.9 $T = 9$ min, चाल = 40 km h^{-1} [संकेत $vt/(v-20)=18$; $vt/(v+20)=6$]

3.10 (a) ऊर्ध्वाधर अधोमुखी; (b) शून्य वेग, 9.8 m s^{-2} का अधोमुखी त्वरण; (c) $x>0$ (उपरिमुखी तथा अधोमुखी गति); $v<0$ (उपरिमुखी); $v>0$ (अधोमुखी), $a>0$ हर समय; (d) 44.1 m, 6 s

3.11 (a) सही; (b) गलत ; (c) सही (यदि कण संघट्ट के उसी क्षण उसी चाल से प्रतिक्षेपित होता है, तो इससे यह अर्थ निकलता है कि त्वरण अनंत है, जो कि भौतिक रूप से संभव नहीं है); (d) गलत (तभी सही है जबकि चुनी हुई धनात्मक दिशा गति की दिशा के अनुदिश है)।

3.14 (i) 5 km h^{-1}, 5 km h^{-1}; (ii) 0.6 kmh^{-1}; (iii) $\frac{15}{8}$ km h^{-1}, $\frac{45}{8}$ km h^{-1}

3.15 क्योंकि किसी यादृच्छिक लघु समय अंतराल के लिए, विस्थापन का परिमाण पथ-लंबाई के बराबर होता है ।

3.16 चारों ग्राफ असंभव हैं । (a) एक ही समय किसी कण की दो विभिन्न स्थितियां नहीं हो सकतीं; (b) एक ही समय किसी कण के विपरीत दिशाओं में वेग नहीं हो सकते ; (c) चाल कभी भी ऋणात्मक नहीं होती ; (d) किसी कण की कुल पथ-लंबाई समय के साथ कभी भी नहीं घट सकती (ध्यान दीजिए, ग्राफ पर बने तीर के चिह्न अर्थहीन हैं) ।

3.17 नहीं, गलत है । x-t आलेख किसी कण के प्रक्षेपण को प्रदर्शित नहीं करता । संदर्भ : कोई पिंड किसी मीनार से गिराया जाता है ($x=0$), $t=0$ पर ।

3.18 105 m s^{-1}

3.19 (a) चिकने फर्श पर विराम में रखी किसी गेंद पर किक लगाई जाती है जिससे वह गेंद किसी दीवार से टकराकर समानीत (reduced) चाल से वापस लौटती है तथा विपरीत दीवार की ओर जाती है जो उसे रोक देती है ।

(b) किसी आरंभिक वेग से ऊर्ध्वाधरत: ऊपर फेंकी गई कोई गेंद फर्श से हर टक्कर के पश्चात् घटी चाल से वापस लौटती है ।

(c) एकसमान वेग से गतिशील कोई क्रिकेट गेंद अत्यंत लघु समय अंतराल के लिए बल्ले से हिट होकर वापस लौटती है।

3.20 $x<0$, $v<0$, $a>0$; $x>0$, $v>0$, $a<0$; $x<0$, $v>0$, $a>0$ ।

3.21 3 में सबसे अधिक, 2 में सबसे कम; 1 तथा 2 में $v > 0$; 3 में $v < 0$

3.22 2 में त्वरण का परिमाण अधिकतम; 3 में चाल अधिकतम; 1, 2 तथा 3 में $v>0$, 1 तथा 3 में $a>0$, 2 में $a<0$; A, B, C तथा D पर $a = 0$

3.23 एकसमान त्वरित गति के लिए समय अक्ष पर झुकी सरल रेखा, एक समान गति के लिए समय अक्ष के समांतर सरल रेखा ।

3.24 10 s, 10 s

3.25 (a) 13 $km h^{-1}$; (b) 5 $km h^{-1}$; (c) दोनों दिशाओं में 20 s; किसी भी अभिभावक के देखने पर दोनों ही दिशाओं में बच्चे की चाल 9 $km h^{-1}$ है; (c) अपरिवर्तित ।

3.26 $x_2 - x_1 = 15t$ (रैखिक भाग); $x_2 - x_1 = 200 + 30t - 5t^2$ (वक्रित भाग) ।

3.27 (a) 60 m, 6 m s^{-1}; (b) 36 m, 9 m s^{-1}

3.28 (iii), (iv), (vi)

अध्याय 4

4.1 आयतन, द्रव्यमान, चाल, घनत्व, मोलों की संख्या, कोणीय आवृत्ति अदिश है, शेष सभी सदिश हैं ।

4.2 कार्य, विद्युत् धारा

4.3 आवेग

4.4 केवल (c) तथा (d) स्वीकार्य हैं ।

4.5 (a) *T*, (b) *F*, (c) *F*, (d) *T*, (e) *T*

4.6 **संकेत** : किसी त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योग (अंतर) कभी भी तीसरी भुजा से कम (अधिक) नहीं हो सकता । सरेखी सदिशों के लिए यह योग (अंतर) तीसरी भुजा के समान होता है ।

4.7 (i) के अतिरिक्त सभी प्रकथन सही हैं ।

4.8 प्रत्येक के लिए 400 m ; B

4.9 (a) 0; (b) 0; (c) 21.4 kmh^{-1}

4.10 1 km परिमाण का विस्थापन आरंभिक दिशा से 60° का कोण बनाते हुए; कुल पथ-लंबाई = 1.5 km (तीसरा मोड़); उदासीन विस्थापन सदिश; पथ-लम्बाई = 3 km (छठा मोड़); 866 m 30° 4 km (आठवां मोड़) ।

4.11 (a) 49.3 $km h^{-1}$; (b) 21.4 $km h^{-1}$, नहीं, केवल सीधे पथों के लिए ही परिमाण में माध्य चाल, माध्य वेग के बराबर होती है ।

4.12 ऊर्ध्वाधर से लगभग 18° पर, दक्षिण की ओर ।

4.13 15 min, 750 m

4.14 पूर्व (लगभग)

4.15 150.5 m

4.16 50 m

4.17 9.9 m s^{-2}, हर बिंदु पर त्रिज्या के अनुदिश केंद्र की ओर ।

4.18 6.4 g

4.19 (a) गलत (केवल एकसमान वृत्तीय गति के लिए ही सही) ।

(b) सही, (c) सही

4.20 (a) $\mathbf{v}(t) = (3.0\ \hat{\mathbf{i}} - 4.0\ t\ \hat{\mathbf{j}})$

$\mathbf{a}(t) = -4.0\ \hat{\mathbf{j}}$

(b) 8.54 m s^{-1}, x-अक्ष से 70°

4.21 (a) 2 s, 24 m, 21.26 m s^{-1}

4.22 $\sqrt{2}$, x-अक्ष से 45° पर ; $\sqrt{2}$, x-अक्ष से – 45° पर, $\left(5/\sqrt{2}-1/\sqrt{2}\right)$

4.23 (ii) तथा (v)

4.24 $3a_x + 2b_y$ के अतिरिक्त सभी

4.25 केवल (e) सही है ।

4.26 182.2 m s^{-1}

4.28 नहीं, व्यापक रूप में घूर्णन को सदिशों के साथ संबद्ध नहीं किया जा सकता ।

4.29 किसी सदिश को समतल क्षेत्र से संबद्ध किया जा सकता है ।

4.30 नहीं ।

4.31 43.8°

4.32 ऊर्ध्वाधर से किसी कोण $\sin^{-1}(1/3) = 19.5°$ पर ; 16 km

4.33 0.86 m s^{-2}, वेग की दिशा से 54.5°

अध्याय 5

5.1 (a) से (d) में न्यूटन के प्रथम नियम के अनुसार कोई नेट बल नहीं लगता (e) क्योंकि यह वैद्युत चुंबकीय तथा गुरुत्वीय बल उत्पन्न करने वाली भौतिक ऐजेंसियों से बहुत दूर है, अतः कोई बल नहीं लगता ।

5.2 प्रत्येक स्थिति में (वायु के प्रभाव को नगण्य मानते हुए) कंकड़ पर केवल एक ही बल–गुरुत्व बल = 0.5 N ऊर्ध्वाधरतः अधोमुखी लगता है । यदि कंकड़ की गति ऊर्ध्वाधर के अनुदिश नहीं है तब भी उत्तर में कोई परिवर्तन नहीं होता । कंकड़ उच्चतम बिंदु पर विराम में नहीं है । इसकी समस्त गति की अवधि में इस पर वेग का एकसमान क्षैतिज घटक कार्यरत रहता है ।

5.3 (a) 1 N ऊर्ध्वाधरतः अधोमुखी (b) वही जो (a) में है, (c) वही जो (a) में है । किसी भी क्षण बल उस क्षण की स्थिति पर निर्भर करता है, इतिहास पर नहीं । (d) 0.1 N रेलगाड़ी की गति की दिशा में ।

5.4 (i) T

5.5 $a = -2.5$ m s^{-2}, $v = u + at$ का प्रयोग करने पर, $0 = 15 - 2.5\,t$ अर्थात् $t = 6.0$ s

5.6 $a = 1.5/25 = 0.06$ m s^{-2}, $F = 3 \times 0.06 = 0.18$ N गति की दिशा में ।

5.7 परिणामी बल = 10 N, 8 N बल की दिशा से $\tan^{-1}(3/4) = 37°$ का कोण बनाते हुए ।

त्वरण = 2 m s^{-2} परिणामी बल की ही दिशा में ।

5.8 $a = -2.5$ m s^{-2}; मंदक बल $= 465 \times 2.5 = 1.2 \times 10^3$ N

5.9 $F - 20{,}000 \times 10 = 20{,}000 \times 5.0$ अर्थात् $F = 3.0 \times 10^5$ N

5.10 $a = -20$ m s^{-2} $0 \le t \le 30$ s

$t = -5$ s $x = ut = -10 \times 5 = -50$ m

$t = 25$ s $x = ut + \frac{1}{2}at^2 = (10 \times 25 - 10 \times 62.5)$m $= -6.0$ km

$t = 100$ s पहले 30 s तक की गति पर विचार कीजिए

$x_1 = 10 \times 30 - 10 \times 900 = -8700$ m

$t = 30$ s पर $v = 10 - 20 \times 30 = -590$ m s^{-1}

30 s से 100 s की गति के लिए

$x_2 = -590 \times 70 = -41300$ m

$x = x_1 + x_2 = -8700$ m $- 41300$ m $= -50000$ m $= -50$ km

5.11 (a) $t = 10$ s पर कार का वेग $= 0 + 2 \times 10 = 20$ m s^{-1}

न्यूटन के गति के प्रथम नियम के अनुसार समस्त गति की अवधि में वेग का क्षैतिज घटक 20 m s^{-1} है,

$t = 11$s पर वेग का ऊर्ध्वाधर घटक $= 0 + 10 \times 1 = 10$ m s^{-1}

$t = 11$s पर पत्थर का वेग $= \sqrt{20^2 + 10^2} = \sqrt{500} = 22.4$ m s^{-1} क्षैतिज दिशा से $\tan^{-1}(½)$ का कोण बनाते हुए।

(b) 10 m s^{-2} ऊर्ध्वाधरतः अधोमुखी।

5.12 (a) चरम स्थिति पर गोलक की चाल शून्य है। यदि डोरी काट दी जाए तो वह ऊर्ध्वाधर अधोमुखी गिरेगा।

(b) माध्य स्थिति पर गोलक में क्षैतिज वेग होता है। यदि डोरी काट दी जाए तो वह किसी परवलयिक पथ के अनुदिश गिरेगा।

5.13 तुला का पाठ्यांक व्यक्ति द्वारा फर्श पर आरोपित बल की माप होता है। न्यूटन के गति के तृतीय नियम के अनुसार यह फर्श द्वारा व्यक्ति पर आरोपित अभिलंब बल N के समान एवं विपरीत होता है।

(a) $N = 70 \times 10 = 700$ N; पाठ्यांक 70 kg है।

(b) $70 \times 10 - N = 70 \times 5$; $N = 35$ kg

(c) $N - 70 \times 10 = 70 \times 5$; $N = 105$ kg

(d) $70 \times 10 - N = 70 \times 10$; $N = 0$; पैमाने का पाठ्यांक शून्य होगा।

5.14 (a) तीनों समय अंतरालों में त्वरण और इसलिए बल भी, दोनों शून्य हैं।

(b) $t = 0$ पर 3 kg m s^{-1} (c) $t = 4$ s पर -3 kg m s^{-1}

5.15 यदि 20 kg द्रव्यमान के पिंड को खीचते हैं, तो

$600 - T = 20\,a$, $a = 20$ m s^{-2}, $T = 10\,a$ अर्थात् $T = 200$ N। यदि 10 kg द्रव्यमान के पिंड को खींचते हैं, तो $a = 20$ m s^{-2}; $T = 400$ N

5.16 $T - 8 \times 10 = 8\,a$; $12 \times 10 - T = 12\,a$

अर्थात् $a = 2$ m s^{-2}; $T = 96$ N

5.17 संवेग संरक्षण नियम द्वारा कुल अंतिम संवेग शून्य है। दो संवेग सदिशों का योग तब तक शून्य नहीं हो सकता जब तक कि वे दोनों समान एवं विपरीत न हों।

5.18 प्रत्येक गेंद पर आवेग का परिमाप $= 0.05 \times 12 = 0.6$ kg m s^{-1}। दोनों आवेग विपरीत दिशाओं में हैं।

5.19 संवेग संरक्षण नियम के अनुसार : $100\,v = 0.02 \times 80$

$v = 0.016$ m s^{-1} $= 1.6$ cm s^{-1}

5.20 आवेग, आरंभिक तथा अंतिम दिशाओं के सम द्विभाजक रेखा के अनुदिश निर्दिष्ट है।

इसका परिमाण $= 0.15 \times 2 \times 15 \times \cos 22.5° = 4.2$ kg m s^{-1}

5.21 $v = 2\pi \times 1.5 \times \frac{40}{60} = 2\pi$ m s^{-1}

$$T = \frac{mv^2}{R} = \frac{0.25 \times 4\pi^2}{1.5} = 6.6 \text{ N}$$

$200 = \frac{mv^2_{max}}{R}$; इससे प्राप्त होता है $v_{max} = 34.6$ m s^{-1}

5.22 प्रथम नियम के अनुसार विकल्प (b) सही है।

5.23 (b) जड़त्वीय प्रेक्षक है; शेष अजड़त्वीय हैं।

5.24 हमारे द्वारा सामान्य उपयोग में लाए जाने वाले किसी भी जड़त्वीय निर्देश फ्रेम (उदाहरणार्थ, प्रयोगशाला का फ्रेम जो सन्निकटत: जड़त्वीय है) के सापेक्ष यह प्रकथन गलत है। वृत्तीय गति करता कोई कण साम्यावस्था में नहीं होता; इस पर अभिकेंद्र त्वरण कार्य करता है। किसी भी जड़त्वीय निर्देश फ्रेम के सापेक्ष अपकेंद्र बल का कोई अस्तित्व ही नहीं होता। कण के साथ घूर्णी गति करते फ्रेम (अजड़त्वीय) के सापेक्ष यह प्रकथन सही है।

5.25 (a) रिक्त दिक्‌स्थान (empty space) से घोड़ा-गाड़ी निकाय पर कोई बाह्य बल कार्यरत नहीं है। घोड़ा तथा गाड़ी के बीच पारस्परिक बल निरस्त हो जाते हैं (तृतीय नियम)। फर्श पर, निकाय तथा फर्श के बीच संपर्क बल (घर्षण बल) घोड़े तथा गाड़ी को विराम से गति में लाने का कारण होते हैं।

(b) शरीर का जो भाग सीट के सीधे संपर्क में नहीं है उसके जड़त्व के कारण।

(c) घास-लावक (lawn mower) को किसी कोण पर बल आरोपित करके खींचा अथवा धकेला जाता है। जब आप धक्का देते हैं, तब ऊर्ध्वाधर दिशा में संतुलन के लिए अभिलंब बल (N) उसके भार से अधिक होना चाहिए इसके फलस्वरूप घर्षण बल $f (f \propto N)$ बढ़ जाता है। और इसीलिए मूवर को चलाने के लिए अधिक बल आरोपित करना पड़ता है। खींचते समय ठीक इसके विपरीत होता है।

(d) ऐसा वह खिलाड़ी संवेग परिवर्तन की दर को घटाने और इस प्रकार गेंद को रोकने के लिए आवश्यक बल को कम करने के लिए करता है।

5.26 $x = 0$ तथा $x = 2$ cm पर स्थित दीवारों से हर 2 s के पश्चात् 1 cm s^{-1} की एकसमान चाल से गतिमान कण द्वारा प्राप्त आवेग का परिमाण $0.04 \text{ kg} \times .02 \text{ m s}^{-1} = 8 \times 10^{-4} \text{ kg m s}^{-1}$

5.27 नेट बल $= 65 \text{ kg} \times 1 \text{ m s}^{-2} = 65 \text{ N}$

$a_{\text{अधिकतम}} = \mu_s g = 2 \text{ m s}^{-2}$

5.28 विकल्प (1) सही है। ध्यान दीजिए

$$mg + T_2 = \frac{mv_2^2}{R}, \quad T_1 - mg = \frac{mv_1^2}{R}$$

नीति यह है : किसी पिंड पर आरोपित वास्तविक भौतिक बलों (तनाव, गुरुत्वाकर्षण बल, आदि) तथा इन बलों के प्रभाव (जैसे इसी उदाहरण में अभिकेंद्र त्वरण v_2^2/R अथवा v_1^2/R) में भ्रांत न हो।

5.29 (a) "बल निर्देशक" (free body) : चालक दल तथा यात्री

फर्श द्वारा निकाय पर बल $= F$

$F - 300 \times 10 = 300 \times 15$

$F = 7.5 \times 10^3$ N उपरिमुखी

तृतीय नियम द्वारा, चालक दल तथा यात्रियों द्वारा फर्श पर बल $= 7.5 \times 10^3$ N अधोमुखी

(b) "बल निर्देशक" : हेलीकॉप्टर + चालक दल तथा यात्री

वायु द्वारा निकाय पर बल $= R$

$R - 1300 \times 10 = 1300 \times 15$

$R = 3.25 \times 10^4$ N उपरिमुखी

तृतीय नियम के अनुसार, वायु द्वारा हेलीकॉप्टर पर बल (क्रिया) $= 3.25 \times 10^4$ N अधोमुखी

(c) 3.25×10^4 N उपरिमुखी

5.30 प्रति सेकंड दीवार से टकराने वाले जल की संहति = 10^3 kg m^{-3} × 10^{-2} m^2 × 15 m s^{-1} = 150 kg s^{-1} । दीवार द्वारा आरोपित बल = प्रति सेकंड जल के संवेग में हानि = 150 kg s^{-1} × 15 m s^{-1} = 2.25 × 10^3 N

5.31 (a) 3 mg अधोमुखी (b) 3 mg अधोमुखी (c) 4 mg उपरिमुखी

ध्यान दीजिए कि (b) का उत्तर mg नहीं वरन् 3 mg है ।

5.32 यदि पंखों पर अभिलंब बल N है, तब

$$N \cos\theta = mg,\ N \sin\theta = \frac{mv^2}{R}$$

$$\therefore R = \frac{v^2}{g \tan\theta} = \frac{200 \times 200}{10 \times \tan 15^\circ} = 14.9 \text{ km}$$

5.33 पटरियों द्वारा पहियों के उभरे हुए किनारों पर पार्श्वीय प्रणोद आवश्यक अभिकेंद्र बल प्रदान करता है । तृतीय नियम के अनुसार रेलगाड़ी के पहिए पटरियों पर समान एवं विपरीत प्रणोद आरोपित करते हैं जिसके कारण पटरियों में टूट-फूट होती है ।

मोड़ का ढाल-कोण $= \tan^{-1} \dfrac{v^2}{Rg} = \tan^{-1} \dfrac{15 \times 15}{30 \times 10} = 37^\circ$ (सन्निकटतः)

5.35 संतुलनावस्था में व्यक्ति पर आरोपित बलों पर विचार कीजिए : उसका भार, डोरी द्वारा आरोपित बल तथा फर्श के कारण अभिलंब बल ।

(a) 750 N (b) 250 N ∴ ढंग (b) अपनाना चाहिए ।

5.36 (a) $T - 400 = 240$ $T = 640$ N

(b) $400 - T = 160$ $T = 240$ N

(c) $T = 400$ N

(d) $T = 0$

स्थिति (a) में रस्सी टूट जाएगी ।

5.37 हम पिंड A व B तथा दृढ़ विभाजक दीवार के बीच आदर्श संपर्क मानते हैं । उस स्थिति में विभाजक दीवार द्वारा B पर आरोपित स्वसमायोजी अभिलंब बल (प्रतिक्रिया) 200 N के बराबर है । यहां कोई समुपस्थित गति नहीं है तथा घर्षण नहीं है । A तथा B के बीच क्रिया-प्रतिक्रिया बल भी 200 N हैं । जब विभाजक दीवार को हटा लेते हैं, तब गतिज घर्षण कार्य करने लगता है ।

A + B का त्वरण $= \dfrac{200 - (150 \times 0.15)}{15} = 11.8 \text{ m s}^{-2}$

A पर घर्षण = 0.15 × 50 = 7.5 N

$200 - 7.5 - F_{AB} = 5 \times 11.8$

$F_{AB} = 133.5$ N गति के विपरीत

$F_{BA} = 133.5$ N गति की दिशा में

5.38 (a) गुटके तथा ट्राली के बीच समुपस्थित सापेक्ष गति का विरोध करने के लिए संभावित अधिकतम घर्षण बल = 150 × 0.18 = 27 N जो कि ट्राली के साथ गुटके को त्वरित करने के लिए आवश्यक घर्षण बल = 15 × 0.5 = 7.5 N से अधिक है । जब ट्राली एकसमान वेग से गति करती है तब गुटके पर कोई घर्षण बल कार्य नहीं करता ।

(b) त्वरित प्रेक्षक (अजड़त्वीय) के लिए प्रेक्षक के सापेक्ष गुटके को विराम में रखें तो घर्षण बल का विरोध समान परिमाण के छद्म बल द्वारा किया जाता है, जब ट्राली एकसमान वेग से गति करती है, तब न तो कोई घर्षण बल होता है और न ही गतिशील प्रेक्षक (जड़त्वीय) के लिए कोई छद्म बल होता है ।

5.39 घर्षण के कारण संदूक का त्वरण $= \mu g = 0.15 \times 10 = 1.5\ m\ s^{-2}$ । परंतु ट्रक का त्वरण अधिक है । ट्रक के सापेक्ष संदूक का त्वरण $0.5\ m\ s^{-2}$ है और यह ट्रक के पिछले भाग की ओर निर्दिष्ट है । संदूक द्वारा ट्रक से नीचे गिरने में लिया समय $= \sqrt{\frac{2 \times 5}{0.5}} = \sqrt{20}\ s$ । इतने समय में ट्रक द्वारा चली गई दूरी $= \frac{1}{2} \times 2 \times 20 = 20\ m$ ।

5.40 सिक्के को रिकार्ड के साथ परिक्रमण करने के लिए, घर्षण बल आवश्यक अभिकेंद्री बल प्रदान करने के लिए पर्याप्त होना चाहिए, अर्थात् $\frac{mv^2}{r} \leq \mu mg$ । अब $v = r\omega$, यहां $\omega = \frac{2\pi}{T}$ रिकार्ड की कोणीय आवृत्ति है । दिए गए μ तथा ω के लिए, शर्त है $r \leq \frac{\mu g}{\omega^2}$ यह शर्त पास वाले सिक्के (केंद्र से 4 cm दूरी वाले) द्वारा संतुष्ट होती है ।

5.41 उच्चतम बिंदु पर, $N + mg = \frac{mv^2}{R}$, जहां N मोटर साइकिल सवार पर चैम्बर की छत द्वारा लगाया गया अभिलंब बल (अधोमुखी) है । उच्चतम बिंदु पर $N = 0$ के तदनुरूपी न्यूनतम संभव चाल है ।

$v_{\text{न्यूनतम}} = \sqrt{Rg} = \sqrt{25 \times 10} = 15.8\ m\ s^{-1}$

5.42 दीवार द्वारा व्यक्ति पर क्षैतिज बल N आवश्यक अभिकेंद्र बल प्रदान करता है : $N = m R\omega^2$ । घर्षण बल f (ऊर्ध्वाधर उपरिमुखी) भार mg का विरोध करता है । वह व्यक्ति दीवार से फर्श को हटाने के पश्चात् भी चिपका रह सकता है यदि $mg = f < \mu N$ हो, अर्थात् $mg < \mu m R \omega^2$ । बेलन के घूर्णन की न्यूनतम कोणीय चाल $\omega_{\text{न्यूनतम}} = \sqrt{\frac{g}{\mu R}} = 4.7\ s^{-1}$

5.43 उस स्थिति में मनके के बल निर्देशक आरेख पर विचार कीजिए जबकि वृत्ताकार तार के केंद्र से मनके को जोड़ने वाला त्रिज्य सदिश ऊर्ध्वाधर अधोमुखी दिशा से θ कोण बनाता है । इस स्थिति में $mg = N\cos\theta$ तथा $m R \sin\theta\, \omega^2 = N \sin\theta$ । इन समीकरणों से हमें प्राप्त होता है $\cos\theta = g/R\omega^2$ । चूंकि $|\cos\theta| \leq 1$ वह मनका $\omega \leq \sqrt{g/R}$ के लिए अपने निम्नतम बिंदु पर रहता है । $\omega = \sqrt{\frac{2g}{R}}$ के लिए $\cos\theta = \frac{1}{2}$ अर्थात् $\theta = 60°$ ।

अध्याय 6

6.1 (i) धनात्मक (ii) ऋणात्मक (iii) ऋणात्मक (iv) धनात्मक (v) ऋणात्मक

6.2 (a) 882 J ; (b) –247 J ; (c) 635 J ; (d) 635 J

किसी पिंड पर नेट बल द्वारा किया गया कार्य इसकी गतिज ऊर्जा में परिवर्तन के बराबर होता है ।

6.3 (i) $x > a; 0$ (ii) $-\infty < x < \infty; V_1$

(ii) $x < a, x > b; -V_1$ (iv) $-b/2 < x < -a/2, a/2 < x < b/2; -V_1$

6.5 (a) रॉकेट; (b) एक संरक्षी बल के तहत किसी पथ पर चलने में किया गया कार्य पिंड की स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन का ऋणात्मक होता है । पिंड जब अपनी कक्षा में एक चक्र पूर्ण करता है तो उसकी स्थितिज ऊर्जा में कोई परिवर्तन नहीं होता; (c) गतिज ऊर्जा में वृद्धि होती है जबकि स्थितिज ऊर्जा घटती है, तथा इन दोनों ऊर्जाओं का योग, घर्षण के विरुद्ध ऊर्जा क्षय के कारण, घट जाता है ; (d) दूसरे प्रकरण में ।

6.6 (a) कम हो जाती है; (b) गतिज ऊर्जा ; (c) बाह्य बल; (d) कुल रैखिक संवेग, तथा कुल ऊर्जा भी (यदि दो पिंडों का निकाय वियुक्त है) ।

6.7 (a) F ; (b) F ; (c) F ; (d) F (प्राय: सही परंतु सदैव नहीं, क्यों ?) ।

6.8 (a) नहीं; (b) हां; (c) किसी अप्रत्यास्थ संघट्ट के समय रैखिक संवेग संरक्षित रहता है, गतिज ऊर्जा संघट्ट समाप्त होने के पश्चात् भी संरक्षित नहीं रहती; (d) प्रत्यास्थ ।

6.9 (v) को छोड़कर सभी असंभव हैं ।

6.11 (ii) t

6.12 (iii) $t^{3/2}$

6.13 12 J

6.14 इलेक्ट्रॉन अपेक्षाकृत अधिक तीव्र है, $v_e/v_p = 13.5$

6.15 प्रत्येक आधे में 0.082 J ; – 0.163 J

6.16 हां, (अणु + दीवार) निकाय का संवेग संरक्षित है । दीवार का प्रतिक्षेप संवेग इस प्रकार है कि, दीवार का संवेग + बाहर जाने वाले अणु का संवेग = आने वाले अणु का संवेग । यहां यह माना गया है कि दीवार आरंभ में विराम अवस्था में है। तथापि, दीवार का अत्यधिक द्रव्यमान होने के कारण प्रतिक्षेप संवेग इसमें नगण्य वेग उत्पन्न कर पाता है । चूंकि यहां गतिज ऊर्जा भी संरक्षित रहती है, अत: संघट्ट प्रत्यास्थ है ।

6.17 43.6 kW

6.18 (ii)

6.19 यह अपना समस्त संवेग मेज पर रखी गेंद को स्थानांतरित कर देता है तथा जरा भी ऊपर नहीं उठता ।

6.20 5.3 m s^{-1}

6.21 27 km h^{-1} (चाल में कोई परिवर्तन नहीं)

6.22 50 J

6.23 (a) $m = \rho A v t$ (b) $K = \rho A v^3 t/2$ (c) P = 4.5 kWh

6.24 (a) 49000 J (b) 6.45×10^{-3} kg

6.25 (a) 200 m^3 (b) 14 m × 14 m विमा के किसी बड़े घर की छत से तुलनीय ।

6.26 175 धड़कन प्रति मिनट, मानव में इसे 70 मानते हुए ।

6.27 10^{-5} J

6.28 21.2 cm, 28.5 J

6.29 नहीं, अधिक ढालू समतल पर पत्थर शीघ्र तली तक पहुंचता है । हां, वे एक ही चाल v से नीचे पहुंचेंगे । $[mgh = (1/2)\, mv^2]$

$V_B = V_C = 14.1 \text{ m s}^{-1}$, $t_B = 2\sqrt{2}$ s, $t_c = 2\sqrt{2}$ s

6.30 0.125

6.31 (i) $-3 \text{ m} < x < +3 \text{ m}$; $V_{max} = 5.45 \text{ m s}^{-1}$

(ii) $-2 \text{ m} < x < -1 \text{ m}$, $1 \text{ m} < x < 2\text{m}$; $V_{max} = 1.5 \text{ m s}^{-1}$

6.32 दोनों प्रकरणों के लिए 8.82 J

6.33 आरंभ में बच्चा ट्राली को कुछ आवेग प्रदान करता है तथा फिर ट्राली के नए वेग के सापेक्ष 4 m s^{-1} के नियत सापेक्ष वेग से दौड़ता है । बाहर स्थित किसी प्रेक्षक के लिए संवेग संरक्षण नियम लागू कीजिए । 10.36 m s^{-1}, 25.9 m

6.34 3.26 MeV

6.35 173.8 MeV

6.36 1.34×10^{-7} keV, ध्यान दीजिए, E ऊर्जा की γ-किरण का संवेग E/c होता है, जहां c किसी वैद्युतचुंबकीय विकिरणों की चाल है ।

6.37 संकेत : नेट बल द्वारा किए गए कार्य में छद्म बल को सम्मिलित कीजिए ।

6.38 465.4 J

6.39 3.51 J

अध्याय 7

7.1 प्रत्येक का ज्यामितीय केंद्र । नहीं, द्रव्यमान केंद्र वस्तु के बाहर स्थित हो सकता है जैसा कि किसी छल्ले, खोखले गोले, खोखले सिलिंडर, खोखले घन आदि प्रकरणों में होता है ।

7.2 H तथा Cl नाभिकों को मिलाने वाली रेखा पर H सिरे से 1.24Å दूरी पर अवस्थित ।

7.3 चूंकि निकाय पर कोई बाह्य बल कार्यरत नहीं है ; अतः (ट्राली + बच्चा) निकाय के द्रव्यमान-केंद्र की चाल अपरिवर्तित (v के बराबर) रहती है । ट्राली को दौड़ाए रखने में जो बल सम्मिलित हैं वे सभी इस निकाय के आंतरिक बल हैं ।

7.4 $(a^2/4)\ (m_2 + m_3)$

7.5 (i) $1/2\ MR^2$ (लंब अक्ष प्रमेय उपयोग कीजिए) ; $3/2\ MR^2$ (समांतर अक्ष प्रमेय उपयोग कीजिए) ।

7.6 गतिज ऊर्जा = 3125 J ; कोणीय संवेग = 62.5 J s

7.7 (a) 100 चक्कर/मिनट (कोणीय संवेग संरक्षण नियम उपयोग कीजिए) ।

(b) नई गतिज ऊर्जा घूर्णन की प्रारंभिक गतिज ऊर्जा की 2.5 गुनी है । बच्चा अपनी आंतरिक ऊर्जा का उपयोग अपनी घूर्णी गतिज ऊर्जा में वृद्धि करने के लिए करता है ।

7.8 $25\ s^{-2}$; $10\ m\ s^{-2}$

7.9 $106.7\ rad\ s^{-1}$ (कोणीय आवेग = कोणीय संवेग में परिवर्तन) ।

7.10 36 kW

7.11 गोला

7.12 (a) कोणीय संवेग संरक्षण द्वारा, उभयनिष्ठ कोणीय चाल $\omega = (I_1\ \omega_1 + I_2\ \omega_2)/(I_1 + I_2)$

(b) दोनों डिस्कों के बीच घर्षणीय संपर्क के कारण ही ये दोनों डिस्क किसी उभयनिष्ठ कोणीय चाल ω पर आकर घूमती हैं, और इसी घर्षण में ऊर्जा क्षय के कारण हानि होती है । तथापि, चूंकि घर्षणीय बल आघूर्ण निकाय के लिए आंतरिक है, अतः कोणीय संवेग अपरिवर्तित रहता है ।

7.13 A का वेग = $\omega_0 R$ तीर की गति की दिशा में ; B का वेग = $\omega_0 R$ तीर की गति की विपरीत दिशा में ; C का वेग = $\omega_0 R/2$ तीर की गति की दिशा में । घर्षणहीन समतल पर डिस्क नहीं लुढ़केगी ।

7.14 (i) B पर घर्षण बल B के वेग का विरोध करता है । अतः घर्षण बल तथा तीर की दिशा समान है । घर्षण बल आघूर्ण के कार्य करने की दिशा इस प्रकार है कि यह कोणीय गति का विरोध करता है । ω_0 तथा $\boldsymbol{\tau}$ दोनों ही कागज के पृष्ठ के अभिलंबवत् कार्य करते हैं, इनमें ω_0 कागज के पृष्ठ के अंतर्मुखी तथा $\boldsymbol{\tau}$ कागज के पृष्ठ के बहिर्मुखी हैं ।

(ii) घर्षण बल संपर्क-बिंदु B के वेग को घटा देता है । जब यह वेग शून्य होता है तो डिस्क की लोटन गति आदर्श सुनिश्चित हो जाती है । एक बार ऐसा हो जाने पर घर्षण बल शून्य हो जाता है ।

7.15 घर्षण बल द्रव्यमान-केंद्र को उसके आरंभिक शून्य वेग से त्वरित करता है । घर्षण-बल आघूर्ण आरंभिक कोणीय चाल ω में मंदन उत्पन्न करता है । गति की समीकरण हैं : $\mu_k mg = ma$ तथा $\mu_k mgR = -I\alpha$, जिनसे प्राप्त होता है $v = \mu_k gt$, $\omega = \omega_0 - \mu_k mgR\ t/I$ । लुढ़कना तब आरंभ होता है जब $v = R\omega$ । किसी छल्ले के लिए, $I = MR^2$ तथा $t = \omega_0 R/2\ \mu_k g$ पर छल्ले का लुढ़कना आरंभ होता है । किसी डिस्क के लिए, $I = \frac{1}{2}mR^2$, तथा $t = R\omega_0/3\ \mu_k g$ पर डिस्क का लुढ़कना आरंभ होता है । इस प्रकार समान R तथा ω_0 के लिए छल्ले की अपेक्षा डिस्क पहले लुढ़कना आरंभ कर देती है । $R = 10$ cm, $\omega_0 = 10\ \pi\ rad\ s^{-1}$, $\mu_R = 0.2$ के लिए वास्तविक समयों के मान ज्ञात किए जा सकते हैं ।

7.16 (a) 16.4 N (b) शून्य (c) 37° (सन्निकटतः)

7.17 किसी आनत समतल पर किसी लुढ़कते छल्ले, डिस्क तथा गोले के त्वरण क्रमशः $(1/2)\ g \sin\theta$, $(2/3)\ g \sin\theta$ तथा $(5/7)\ g \sin\theta$ हैं । इस प्रकार समान ऊंचाई से आरंभ करके तली पर गोला सबसे पहले तथा छल्ला सबसे बाद में पहुंचता

है । ध्यान दीजिए, यहां पर उत्तर द्रव्यमान अथवा त्रिज्या के मानों पर निर्भर नहीं करता । अर्थात् इन तीनों पिंडों के द्रव्यमान तथा त्रिज्या के मान कुछ भी हो सकते हैं–उत्तर में कोई परिवर्तन नहीं होगा ।

7.18 (i) 3.4 s

(ii) (a) शून्य (b) 1125 J (c) 1125 J

(iii) (a) 250 J (b) 125 J (c) 375 J

(iv) नहीं, ऊर्जा की हानि = 750 J लुढ़कना आरंभ करने से पूर्व घर्षण के विरुद्ध क्षयित ऊर्जा

(v) स्थानांतरीय गति के लिए घर्षण द्वारा किया गया कार्य = + 250 J

घूर्णन गति के विरुद्ध घर्षण द्वारा किया गया कार्य $= -\mu_k mg R \times \theta = -100$ J

यहां $\theta = \omega_0 t - \frac{1}{2}\alpha t^2$, $t = \frac{R\omega_0}{3\mu_0 g}$, $\alpha = \frac{\mu_k mgR}{I}$

इस प्रकार, घर्षण द्वारा पिंड पर किया गया नेट कार्य = + 250 J – 1000 J = – 750 J । यह (iv) में नोट की गई ऊर्जा की हानि का स्पष्टीकरण करता है ।

विज्ञान संबंधित मूल्य

जिज्ञासा, ज्ञान-पिपासा, वस्तुनिष्ठता, ईमानदारी व सच्चाई, प्रश्न करने का साहस, क्रमबद्ध तर्क, प्रमाण/सत्यापन के पश्चात् स्वीकृति, खुला दिमाग, पूर्णता प्राप्त करने की अभिलाषा तथा मिलजुल कर कार्य करने की भावना आदि विज्ञान संबंधी कुछ आधारभूत मूल्य हैं। इन मूल्यों द्वारा विज्ञान के उन प्रक्रमों को अभिलक्षणित किया जाता है, जो प्रकृति एवं उसकी अपघटनाओं से संबंधित सत्य के अन्वेषण में सहायता प्रदान करते हैं। विज्ञान का उद्देश्य विभिन्न वस्तुओं एवं अपघटनाओं की व्याख्या करना है। अतः विज्ञान सीखने एवं उसका अभ्यास करने के लिए —

- **अपने परिवेश की वस्तुओं तथा घटनाओं के प्रति जिज्ञासु बनें।**
- **प्रचलित विश्वासों एवं मान्यताओं पर प्रश्नचिह्न लगाने का साहस करें।**
- **"क्या", "कैसे" तथा "क्यों" में प्रश्न करें एवं सूक्ष्म प्रेक्षणों, प्रयोगों, परामर्शों, चर्चाओं व तर्कों द्वारा अपना उत्तर प्राप्त करें।**
- **प्रयोगशाला में अथवा उसके बाहर प्राप्त अपने प्रेक्षणों एवं प्रायोगिक परिणामों को सच्चाईपूर्वक लिखें।**
- **आवश्यकता पड़ने पर, प्रयोगों की पुनरावृत्ति सावधानीपूर्वक एवं क्रमबद्ध तरीके से करें, किन्तु किसी भी परिस्थिति में अपने परिणामों में हेरफेर न करें।**
- **तथ्यों, विचार-बुद्धि एवं तर्कों द्वारा अपना मार्गदर्शन करें, पूर्वाग्रहों से ग्रस्त न हों।**
- **अनवरत एवं समर्पित कार्य के द्वारा नई खोजों एवं नए आविष्कारों के लिए उत्कट अभिलाषा रखें।**